

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

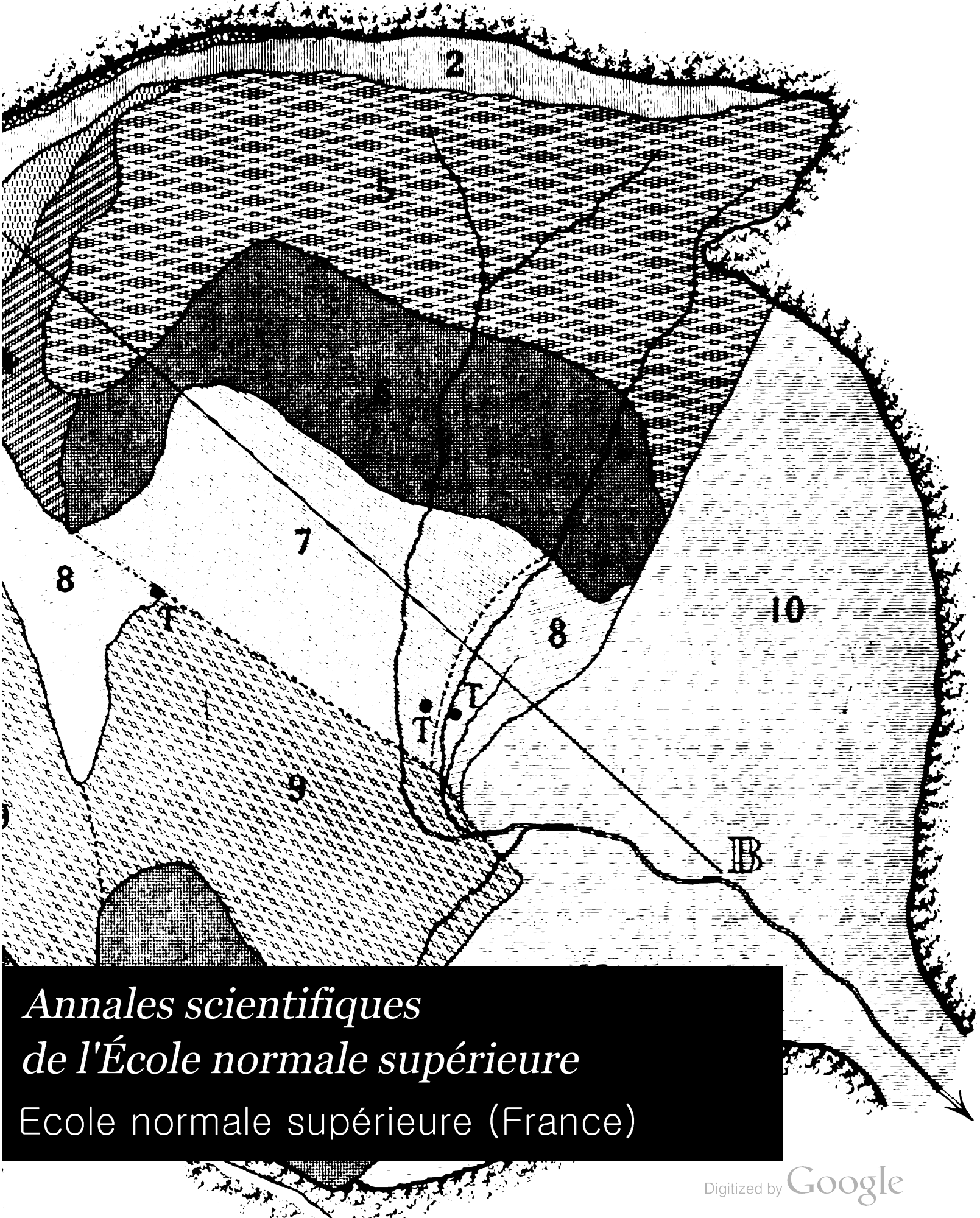
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Annales scientifiques de l'École normale supérieure

Ecole normale supérieure (France)

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

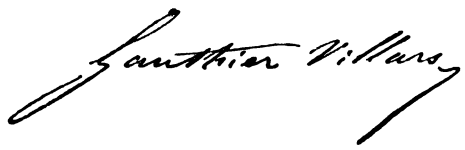
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Digitized by Google

L'Éditeur de cet Ouvrage se réserve le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Il poursuivra, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1882, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



7456 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

Digitized by Google

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME ONZIÈME. — ANNÉE 1882.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1882

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

183911

STANFORD LIBRARY

Digitized by Google

COMITÉ DE RÉDACTION

COMPOSÉ DES MAITRES DES CONFÉRENCES SCIENTIFIQUES.

Sciences mathématiques.

MM.

APPELL.
BERTRAND, de l'Institut.
BONNET, de l'Institut.
BOUQUET, de l'Institut.
BOURGET, Recteur de l'Académie d'Aix.
BRIOT, Prof. à la Sorbonne.
DARBOUX, Prof. à la Sorbonne.
HERMITE, de l'Institut.
PUISEUX, de l'Institut.
TANNERY.
TISSERAND, de l'Institut.

Sciences physiques.

MM.

BERTHELOT, de l'Institut.
BERTIN, Sous-Direct. de l'École Normale.
DEBRAY, de l'Institut.
FRIEDEL, de l'Institut.
GERNEZ.
HAUTEFEUILLE.
MASCART, Professeur au Collège de France.
TROOST, Prof. à la Sorbonne.

Sciences naturelles.

MM.

BONNIER.
DASTRE, Suppl. à la Sorbonne.
DES CLOIZEAUX, de l'Institut.
DE LACAZE-DUTHIERS, de l'Institut.
LORY, Correspondant de l'Institut.
PASTEUR, de l'Institut.
PERRIER, Prof. au Muséum.
POUCHET, Prof. au Muséum.
VAN TIEGHEM, de l'Institut.

ADMINISTRATION.

MM. DEBRAY, de l'Institut..... *Directeur.*
GERNEZ, Maître de Conférences à l'École Normale.....
HAUTEFEUILLE, Maître de Conférences à l'École Normale..... *Secrétaires.*
TISSERAND, de l'Institut.....

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

ÉTUDE GÉOLOGIQUE
DES
GISEMENTS DE TOPAZES
DE LA PROVINCE DE MINAS-GÉRAËS (BRÉSIL),

PAR M. H. GORCEIX.

Les topazes et les euclases qui les accompagnent n'ont été rencontrées dans leur gisement primitif, au moins jusqu'à ce jour, que dans un petit bassin placé à l'ouest de la ville d'Ouro-Preto, capitale de la province de Minas-Géraës.

Ce bassin forme un triangle dont Ouro-Preto occupe le sommet.

Les deux côtés sud-est et nord sont limités : le premier par la serra de Caxoeira, le second par l'ensemble des massifs de l'Itacolumy et de l'Itatiaia. Sa base serait parallèle à une ligne joignant les deux villages de Caxoeira et d'Ouro-Branco.

Ce bassin, essentiellement montagneux, n'est qu'une partie du massif d'Ouro-Preto, nœud du système orographique de la province, formé d'un enchevêtrement de chaînons des plus complexes.

A l'est et au sud, il est coupé par un lacet de ravins au fond desquels coulent de petits ruisseaux, tributaires du rio Doce dont ils peuvent représenter les sources.

Digitized by Google

Le centre forme un plateau, dont le point culminant serait placé près du hameau de Boa-Vista, à une hauteur de 1250^{m} à 1300^{m} au-dessus du niveau de la mer.

A l'ouest, le terrain est moins accidenté; la gorge qui sépare la serra de Caxoeira de celle d'Ouro-Branco s'élargit et s'ouvre dans la vallée du village de Caxoeira-do-Campo, où débouchent quelques ruisseaux affluents du rio das Velhas et par suite du São-Francisco, dont les eaux ne sont ainsi en ce point séparées de celles du rio Doce que par de faibles accidents de terrain de quelques mètres de largeur.

Les terrains de cette région forment un ensemble où, pour établir les divisions, on vient se heurter contre l'absence de fossiles, difficulté qui rend si pénibles et si incertaines les recherches géologiques dans une contrée où, pendant des centaines de lieues, les roches semblent conserver les mêmes caractères pétrographiques.

Les schistes y dominent; les quartzites à matière verte, considérée en général jusqu'ici comme talc, apparaissent quelquefois au milieu de ceux-ci, mais ne prennent de l'importance que sur les limites du bassin, où ils vont augmentant de puissance, dans les serras de Caxoeira, d'Ouro-Branco et d'Itatiaia.

Un amas considérable de calcaire cristallisé forme dyke dans la partie ouest de ce bassin (1), et l'on en retrouve un second, très riche en carbonate de magnésie (39 pour 100), aux portes d'Ouro-Preto, près du point indiqué sur la Carte sous le nom de *Seramenha*.

Les couches de toutes ces roches sont relevées vers l'ouest, 15° à 20° sud, la déclinaison étant de 6° vers l'ouest. Elles courent à peu près N.-O.-N., direction fréquente dans la serra d'Espinhaço, qui constitue la ligne stratigraphique la plus importante de la province de Minas-Géraës; leur inclinaison varie entre 30° et 50° et, en général, va en augmentant à mesure qu'on s'approche de la serra de Caxoeira.

Les schistes sont ou argileux, passant même à de véritables argiles, ou onctueux, doux au toucher, écailleux et paraissant, à première vue, constituer des roches *talqueuses* ou *chloriteuses*. Leurs couleurs, variables, sont : bleuâtre, rougeâtre, grise, lie-de-vin, etc.

---

(1) Ces calcaires constituent de véritables couches intercalées dans les autres roches métamorphiques.

Digitized by Google

En général, leur schistosité augmente avec la profondeur, en se rapprochant de vrais phyllades; d'autres fois ils se transforment en roches fibreuses, où tout indique un métamorphisme plus prononcé.

La pyrophyllite en cristaux aciculaires y forme alors des croûtes entre les feuillets; ils sont pénétrés de cristaux octaédriques de fer oligiste, tantôt durs, brillants, tantôt ternes, très fragiles; quelquefois même le moule seul du cristal existe. Ces faits et d'autres plus convaincants encore m'ont fait adopter l'opinion que tous pouvaient provenir de l'altération des pyrites. J'ai réuni une collection complète de ces cristaux, depuis la pyrite de fer en cubes, en octaèdres, en dodécaèdres pentagonaux à peine altérée à la superficie, jusqu'aux cristaux à facettes des plus brillantes, des plus nettes, de fer oligiste ayant les mêmes formes cristallines. Il paraît y avoir un passage si graduel et si net entre ces divers états extérieurs de l'oxyde de fer, que la martite doit être considérée comme une altération de la substance primitive (pyrite) avec conservation de la forme extérieure (1). Je dois ajouter que l'accroissement des caractères cristallins, des éléments minéralogiques de ces roches, correspond au développement des mêmes caractères dans les minéraux résultant de l'altération des pyrites.

L'étude de ces roches et de celles de la même famille que l'on rencontre en divers points de la province de Minas-Géraës fera l'objet d'un autre travail. Je me contente d'indiquer les analyses suivantes :

I. — *Matière verte intercalée au milieu des quartzites des environs d'Ouro-Preto, onctueuse au toucher, se laissant rayer par l'ongle, fondant superficiellement au rouge blanc.*

Silice	63,4
Alumine	21,7
Sesquioxyde de fer	3,6
» de chrome	0,4
Magnésie	1,3
Manganèse	traces
Potasse	4,5
Soude	0,7
Perte au feu	3,9
	99,5

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1880, n° 7.

Digitized by Google

II. — *Roche schisteuse verdâtre de Boa-Vista, près Ouro-Preto, douce au toucher, fondant légèrement au bon rouge* (densité = 2,7).

Silice	54,1
Alumine	27,3
Sesquioxyde de fer	7,7
Magnésie	0,8
Manganèse	traces
Potasse	3
Soude	3,6
Perte au feu	3,8
	100,3

III. — *Roche fibreuse de Boa-Vista, contenant souvent des cristaux de pyrophyllite et de pyrite altérés, fondant superficiellement au rouge blanc.*

Silice	47,4
Alumine	31,2
Sesquioxyde de fer	6,7
Magnésie	2
Soude	2,7
Potasse	4,5
Perte au feu	5,6
	100,1

La roche ne perd ses derniers éléments volatils qu'au rouge blanc, obtenu avec l'appareil à air comprimé et le chalumeau Deville.

IV. — *Roche écailleuse de Boa-Vista, très onctueuse au toucher, blanchâtre* (densité = 2,7).

Silice	62,4
Alumine	22,7
Sesquioxyde de fer	3,8
Magnésie	1,3
Soude	1,4
Potasse	4,2
Perte au feu	3,4
	99,2

Comme pour la roche précédente, il m'a semblé qu'une faible partie

Digitized by Google

des éléments volatils ne se dégage qu'au rouge blanc, température à laquelle la roche se fritte et fond superficiellement au fond du creuset.

Ces analyses suffisent pour montrer combien ces roches s'éloignent de la famille des talcs, et qu'il en est de même de la substance verte si fréquente au milieu des quartzites de la province de Minas-Géraës, où je signale la présence du chrome en quantité très notable et qui est un véritable mica chromifère. D'après leur composition et les altérations qu'elles subissent, il me semble qu'elles doivent être considérées comme des micaschistes, et c'est l'opinion à laquelle je m'arrête pour le moment, sauf à la contrôler plus tard d'une façon définitive. Il n'est pas rare non plus de voir des sables quartzeux se mêler aux schistes et même former de petites couches au milieu de ces roches.

Quant au fer oligiste micacé, qui, se substituant à la matière verte des quartzites, constitue ces terrains si intéressants du Brésil connus sous le nom d'*itabirites*, il ne joue qu'un rôle peu important dans le bassin à gisement de topazes, tandis qu'il devient un élément prépondérant à l'est et au nord de la serra de Caraça.

Les itabirites n'y sont représentées que par quelques affleurements près de Capão, Boa-Vista et Seramenha. Autour de cette dernière localité, ces roches ont subi des actions érosives considérables, et en de nombreuses autres de la province de Minas-Géraës des dépôts énormes ont disparu, en laissant comme représentants les faibles lambeaux qui existent encore. Ces phénomènes de dénudation ont dû se produire à la fin de l'époque tertiaire; c'est à eux que je rattache les dépôts des cascalhos diamantifères. Ils nécessitent une étude spéciale, sur laquelle je reviendrai à propos des bassins tertiaires à lignites, avec *schistes à empreintes de plantes* du plateau supérieur de Minas-Géraës.

Les fragments de ces roches, cimentés ensuite par une argile ferrugineuse, forment des couches horizontales d'un conglomérat bréchiforme, connu dans le pays sous le nom de *canga*. A Boa-Vista, ces dépôts sont représentés par une mince couche d'un conglomérat grossier, dont les parties constituantes ont été empruntées aux schistes sous-jacents. La vallée très étroite qui sépare le plateau de la serra de Caxoeira est couverte sur des points nombreux d'un dépôt meuble de fragments non roulés de quartzites, de schistes, dont l'origine est la même que celle des conglomérats ferrugineux, mais où l'absence de ciment doit

Digitized by Google

être attribuée à sa situation au pied des montagnes quartzeuses. C'est aussi à cette formation que doivent être rapportés des amas considérables d'argiles rouges, avec petits fragments anguleux de quartz, disséminés irrégulièrement dans la masse, qui ont été particulièrement signalés à Morro-de-Caxambu, gisement le plus occidental des topazes. Ces argiles remplissent les anfractuosités du terrain et reposent sur des schistes, avec lesquels elles n'ont aucun rapport. Aussi Claussen avait-il admis autrefois que ce bol ferrugineux provenait d'éruptions boueuses qui s'étaient fait jour, par des canaux remplis encore de la même matière, au milieu des schistes et quartzites sous-jacents. Ces dépôts, qu'on observe encore près de Capão, sont précisément placés au débouché des ravins dans la plaine de Caxoeira, où les eaux, qui avaient laissé déposer bien plus haut les fragments volumineux des roches, apportaient les argiles et les graviers. Tels sont les principaux terrains qui constituent le bassin dont je m'occupe ; on peut les grouper dans l'ordre suivant, de haut en bas :

1° Conglomérats et argiles ;

2° *Schistes argileux avec sables*, fer oligiste et quartzite ;

3° Schistes micacés plus cristallins.

L'aspect de ces couches est très variable et, souvent, des accidents locaux de peu d'étendue viennent encore en modifier la nature. Ainsi, à Boa-Vista, l'on note au-dessous des conglomérats l'existence de sables jaunâtres, avec lits minces de schistes fibreux, où l'on rencontre en abondance d'énormes cristaux pyritoédriques d'hématite, puis à quelque distance une argile noire avec cristaux octaédriques non moins volumineux de fer oligiste. Ces dépôts disparaissent rapidement, et je n'ai retrouvé, au même horizon, des dépôts analogues que sur la route d'Ouro-Preto à Marianna.

Gisement de topazes. — Les points où ont été exploitées à ciel ouvert les topazes et où j'ai moi-même poursuivi quelques recherches jalonnent deux lignes dirigées O. 20° S. ou mieux O.-S.-O., direction d'une dislocation que l'on retrouve fréquemment dans la province.

La première de ces lignes occupe à peu près la médiane du triangle qui a servi à limiter le bassin ; elle est déterminée par les cinq exploitations de Seramenha, Boa-Vista, José-Carreia, Capão et Vira-Saia,

Digitized by Google

La deuxième, plus extérieure, suit à peu près la base de la serra de Caxoeira, et jusqu'à présent on n'y a trouvé de topazes que dans les carrières abandonnées de Fundão et Morro-de-Caxambu.

Tous ces gisements se présentent dans les mêmes conditions générales, et les quelques différences qu'on peut y rencontrer, dans l'aspect extérieur des roches, proviennent d'accidents locaux sans importance.

Je décrirai avec détails celui de Boa-Vista, où j'ai travaillé à ciel ouvert pendant quelques mois et dont le plan (*Pl. II, fig.* 1) a été dressé avec soin, avec l'aide de M. l'ingénieur João-Victor Magalhães, secrétaire de l'École des Mines d'Ouro-Preto.

Gisement de Boa-Vista. — Comme je l'ai déjà indiqué, le hameau de Boa-Vista est placé près du point culminant du bassin à topazes. Les petits ravins qui en partaient ont été, avec le temps, profondément creusés par les eaux agissant sur des schistes argileux. Dans leurs fonds, au milieu du gravier, on a rencontré en premier lieu les topazes; plus tard, il y a une quarantaine d'années, des travaux à ciel ouvert, joints à l'action des eaux, ont déterminé la formation d'une carrière à bords irréguliers où l'on peut repérer les couches suivantes :

1° *Couche mince, superficielle, horizontale d'un conglomérat grossier, jaunâtre* (*Pl. II, fig.* 2, coupe suivant AB), que l'on retrouve en d'autres points du bassin.

2° *Couche peu importante de sables quartzeux d'épaisseur variable, ne dépassant pas* $0^m,3$. Ce dépôt est aussi très irrégulier et n'a jamais grande extension; il disparaît à petite distance de la carrière, mais on le retrouve en d'autres points. Dans la partie inférieure, les sables sont mélangés de petits lits de roche fibreuse verdâtre dont l'importance augmente avec la profondeur. Les deux couches $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ de la coupe ont $2^m,50$ d'épaisseur; de α à β les sables dominent, de β à γ ils ont presque entièrement disparu.

3° A ces couches succèdent des roches fibreuses, dont la schistosité devient de plus en plus prononcée; elles correspondent aux schistes *lie de vin* qui peuvent servir de repère, pour reconnaître ce niveau dans les roches métamorphiques des environs d'Ouro-Preto. On peut vérifier, à propos de ces dernières couches, combien leur aspect extérieur est variable. Dans la même carrière, les roches qui les com-

Digitized by Google

posent sont ici friables, onctueuses au toucher et mélangées à de l'argile; là, elles sont plus compactes et franchement schisteuses; plus loin, fibreuses et bourrées de petits cristaux octaédriques de fer oligiste, ou couvertes de croûtes de pyrophyllite en cristaux aciculaires. Malgré cette différence d'aspect et probablement de constitution minéralogique, leur composition chimique élémentaire est peu variable, comme l'indiquent les analyses citées plus haut. Les agents métamorphiques semblent n'avoir apporté avec eux qu'un nombre très limité d'éléments fixes, ou peut-être même n'en avoir fourni aucun. C'est au groupement différent des éléments de la roche primitive que doit être attribué l'aspect variable des roches métamorphiques qui en ont dérivé.

La puissance de ces couches atteint 15^m à 20^m.

4° Au-dessous viennent les schistes bleuâtres plus durs et résistant mieux aux agents atmosphériques que les précédents; ils conservent leur faciès sur une plus grande étendue de terrain. Leur puissance est variable : là où la coupe suivant AB les rencontre, ils ont à peine une épaisseur de 2^m; en d'autres points de la carrière elle atteint 10^m.

5° A ces roches succède une série de couches argileuses, où abondent des écailles d'une substance chloriteuse ou micacée. La matière de ces couches est molle, grasse, onctueuse, et paraît provenir de l'altération des roches supérieures. On retrouve au milieu d'elles des nodules de schiste bleuâtre, de même nature que les schistes de la division précédente (4°). Ces nodules représentent l'état primitif de la roche non altérée. La matière chloriteuse ou micacée disparaît même complètement, et la roche passe à une argile brune, indice certain de la rencontre prochaine des topazes.

6° La partie inférieure du terrain de cette carrière est occupée par des roches fibreuses rougeâtres, analogues à celles de 3°. Toutes les couches sont relevées de 40° à 50° vers l'ouest 15° sud.

A première vue, les topazes paraissaient intercalées entre les schistes bleus et les roches fibreuses rougeâtres n° 6; mais, sur le plan, on voit facilement qu'il n'en est rien. En T_1, T_2 (*Pl. II, fig.* 1) l'argile brune et la lithomarge à topazes affleurent à des niveaux supérieurs à ceux de ces roches. Elles occupent donc, dans la carrière de Boa-Vista, une

Digitized by Google

fracture, dirigée O. 15° S., E. 15° N., perpendiculaire à la direction des couches.

Le filon est loin d'être régulier. Du tronc principal partent souvent des ramifications qui, pénétrant entre les couches, en suivent pendant quelque temps les strates; le gisement de Fundão fournit un bon exemple de ce fait. Le premier indice de l'existence des topazes est, comme je l'ai déjà dit, l'apparition de l'argile chloriteuse ou micacée, connue par les ouvriers de cette localité sous le nom de *piçarra*, nom d'ailleurs donné, par les mineurs de la province de Minas-Géraës, à toute roche stérile, et jouant dans leur vocabulaire le même rôle que celui de *killas* dans celui des mineurs du Cornwall.

C'est au milieu de cette roche qu'apparaît l'argile brune où l'on rencontre de minces filets blancs de lithomarge, accompagnés de topazes et quelquefois d'euclases. Ces petits filets se ramifient, s'atténuent, disparaissent même pour apparaître de nouveau plus loin; se renflent et forment des amas, où les cristaux de topazes atteignent des dimensions considérables. Il est rare de rencontrer ces cristaux isolés, sans lithomarge, au milieu de l'argile brune.

Quand la lithomarge est dure, compacte, les topazes sont en petits cristaux friables; si elle est molle, leurs dimensions augmentent, ainsi que leur netteté.

Sa composition est la suivante :

Silice	46,6
Alumine	38
Magnésie	1,2
Perte au feu	14,1
	99,9

Le quartz est, avec la lithomarge, la substance qui accompagne le plus fréquemment les topazes. S'il est aréneux, fragmenté en couches régulières au milieu de l'argile noire, il ne contient pas de topazes; si, au contraire, il forme des amas irréguliers de cristaux bien nets, bipyramidés, celles-ci deviennent abondantes. Il existe, comme mode de formation, une relation intime entre ces deux substances; très fréquemment j'ai rencontré des topazes pénétrant des cristaux de quartz ou implantées sur leur surface. Dans quelques échantillons même, les

Digitized by Google

deux substances sont séparées par une mince couche de lithomarge. Les euclases sont beaucoup plus rares; c'est à peine si j'en ai rencontré sept ou huit contre plusieurs kilogrammes de topazes que j'ai pu extraire.

Tel est l'aspect général du gisement de Boa-Vista. Celui de José-Correia, à une lieue ouest de Boa-Vista, se présente dans des conditions identiques.

La carrière de Capão, exploitée dès le commencement du siècle, est située à une lieue et demie de la précédente. Les topazes y sont accompagnées de quartz et de lithomarge au milieu des mêmes roches schisteuses.

A la partie supérieure, ou retrouve encore les schistes *lie de vin ;* au-dessous, les schistes bleus, et au milieu les roches argilo-chloriteuses ou micacées et les argiles brunes avec nids de lithomarge et topazes. La seule différence à noter est l'existence d'une couche d'*itabirite*, placée au-dessous des roches schisteuses. Cette couche va affleurer du côté ouest de la carrière et continue le long de la route de Caxoeira; là, elle a été en partie détruite par des érosions, et ses débris ont formé une mince couche de conglomérat grossier. A l'époque où d'Eschwege parcourut cette région, la carrière de Capão était exploitée, et ses observations concordent avec les miennes, sauf qu'il considère comme talc les roches schisteuses, qui ont, comme le montrent les analyses, une composition toute différente de cette substance.

A Seramenha, point extrême de la première bande topazifère, les travaux ont été simplement superficiels, et les topazes étaient rencontrées mêlées au gravier qui couvrait le sol.

Autour du gisement de Fundão, le sol est formé à la superficie par un dépôt torrentiel, représentant la petite couche de conglomérat de Boa-Vista. Les topazes se rencontrent encore au milieu de mêmes roches schisteuses avec lithomarge et quartz. On remarque seulement une plus grande abondance de filons de quartz et d'oligiste spéculaire, qui existe aussi à Boa-Vista, mais en petite quantité.

Au Morro-de-Caxambu, les roches schisteuses sont plus compactes et s'approchent souvent des phyllades; au milieu d'elles se montrent, à une petite distance, les quartzites qui forment la serra de Caxoeira. Les topazes se rencontrent encore dans les mêmes conditions; mais, à la

Digitized by Google

lithomarge et au quartz qui les accompagnent se joignent des cristaux de rutile, soit prismatiques, soit maclés en forme de cœur.

Aspect des topazes, des euclases et des cristaux de quartz qui les accompagnent. — Les topazes du Brésil sont bien connues de tous les minéralogistes; je n'ai donc pas à les décrire. En général, les cristaux présentent les faces (m) bien développées, mais profondément cannelées, avec des modifications sur les arêtes aiguës. Les faces (b^1) forment un pointement à une des extrémités, tandis que l'autre est terminée par la base (p). Parmi les milliers d'échantillons que j'ai examinés, trois ou quatre à peine présentaient ce pointement aux deux extrémités. La face (p) est rugueuse, et on ne doit pas l'attribuer à un clivage produit après l'extraction des topazes, car tous les cristaux que j'ai recueillis dans leur gangue présentaient cette hémimorphie. Il est à noter, de plus, que fréquemment les gros échantillons sont divisés en plusieurs prismes par des couches minces de lithomarge que le clivage facile, suivant la base, met en évidence (1). La couleur des topazes est ordinairement le jaune portant le nom de ce minéral. Il n'est pas rare non plus d'en rencontrer avec la couleur du rubis balai que, d'après certains auteurs, on peut donner par calcination aux topazes jaunes, mais qui existe aussi naturellement. J'en ai rencontré une de couleur vert clair et quelques-unes complètement incolores. Ce sont ces dernières qui, roulées, seraient connues sous le nom de *goutte d'eau, pingas d'agua;* mais jusqu'à présent les échantillons de *pingas d'agua* qui m'ont été remis de divers points de la province de Minas-Géraës étaient simplement du quartz brillant et très limpide. Le rares euclases que j'ai rencontrées en cristaux nets présentaient les formes connues $(m, h^1, h^3, d^1, b^{\frac{1}{3}})$; quelques fragments paraissent offrir quelques facettes non encore décrites.

Les cristaux de quartz, souvent nettement terminés aux deux extrémités, sont caractérisés par une série de modifications plagièdres, où l'on peut reconnaître facilement la face rhombe s. Des autres plagièdres, les unes sont brillantes, les autres ternes. Fréquemment, les échantil-

(1) Il semblerait que les cristaux ont été brisés naturellement, puis resoudés sur place; la lithomarge représenterait alors une espèce de cal.

Digitized by Google

lons sont traversés par des cristaux de topaze. Le fer oligiste, les oxydes de manganèse et le mica sont les trois substances qui, après la lithomarge et le quartz, sont les plus constantes dans ces gisements. Le fer oligiste se présente soit sous la forme spéculaire, soit en paillettes, soit en cristaux hexagonaux, mais jamais je n'ai rencontré avec les topazes les variétés octaédriques ou cubiques si fréquentes dans les roches voisines. Il n'y a donc, il me semble, aucune relation entre le mode de formation de ces deux espèces de cristaux.

En résumé, les gisements d'euclases et de topazes des environs d'Ouro-Preto occupent une fente au milieu des roches schisto-micacées de la région, fente en relation intime avec une des principales dislocations des terrains de la province de Minas-Géraës. La disposition de leurs gisements est analogue à celle des autres substances minérales en filon; leur origine, comme leur mode de formation, doit donc être attribuée à des phénomènes de même nature. Si la composition des terrains diffère de celle des gisements connus en Europe, les substances qui les composent sont les mêmes.

Minéraux communs aux gisements de topazes du Brésil et d'Europe. — En Saxe, elles sont associées au quartz, à l'oxyde d'étain, à la lithomarge, à la fluorine et au mica; en Bohême, à l'oxyde d'étain; en Sibérie, au quartz, à la fluorine, à la tourmaline et à la lithomarge.

Je note, en premier lieu, cette constance de la lithomarge, indiquée pour les gisements d'Europe comme matière accidentelle, mais qui, au Brésil, est le meilleur guide pour la recherche des topazes. De plus, elle se retrouve au même horizon géologique de la même région, dans des filons de quartz aurifère sans pyrites, mais à fer oligiste et à oxyde de manganèse. Je l'ai observée dans un prolongement de la serra d'Itacolumy, près de la ville de Marianna, et dans toutes les exploitations aurifères des itabirites friables, à Morro de Sant'Anna, Itabira, etc. Sa relation avec les topazes est si intime, que de nombreux cristaux sont formés d'une croûte brillante, ayant la dureté et la composition de la topaze et enveloppant un noyau de lithomarge. Un grand nombre d'échantillons en contiennent entre les plans du clivage basique. Souvent elle se présente en masse dure, analogue à la substance qu'on obtient

Digitized by Google

en chassant le fluorure de silicium des topazes. A ces cristaux, mi-partie topaze, mi-partie lithomarge s'en joignent d'autres, gris, opaques ou ternes, ou couverts d'un léger vernis jaunâtre. Leur densité est de 3,6. Un premier essai a donné pour leur composition, en employant la méthode de MM. Henri Sainte-Claire Deville et Fouqué, pour le dosage du fluorure de silicium :

Silice	23,2
Alumine et oxyde de fer	56,4
Fluorure de silicium	16,4
Matières volatiles non arrêtées par la chaux	2,2
	98,2

Ils ne présentent aucune trace de fusion au blanc éclatant. Dans le gisement de topazes, ils se lient à des masses dures, compactes, sans clivages nets, passant aux schistes bleus n° 6 du plan de la carrière de topazes de Boa-Vista et disséminés en blocs dans les argiles micacées, n° 7 du même plan.

Le quartz, le mica sont abondants comme en Saxe; l'oxyde d'étain n'a pas été découvert en cristaux; mais il entre dans la composition des euclases, et on le voit remplacé par l'oxyde de titane, son congénère, à Morro-de-Caxambu.

Je n'ai pas vu la fluorine en place, mais on m'en a remis des échantillons bien cristallisés provenant d'un ravin voisin de la même région.

Quant aux tourmalines, si elles n'existent pas à Boa-Vista même, elles sont très abondantes dans les localités voisines. A Antonio-Pereira, à 2 lieues Est d'Ouro-Preto, on trouve un filon de quartz aurifère où les tourmalines, en petits cristaux noirs ou roses, forment des amas considérables; encore plus près, à Passagem, et dans les faubourgs mêmes d'Ouro-Preto, elles constituent avec les pyrites arsénicales la gangue de l'or.

Je reviendrai plus loin sur ce fait, lorsque je comparerai les gisements de topazes à ceux des autres pierres précieuses de la province de Minas.

Les mêmes agents minéralisateurs, fluor, bore, vapeur d'eau qui, dans un grand nombre de cas, ont présidé à la formation des dépôts

Digitized by Google

métallifères, ont dû encore intervenir dans la production des topazes et des euclases. Les expériences synthétiques de M. Daubrée ont déjà montré que l'action du fluorure de silicium sur l'alumine pouvait donner naissance à une substance fluorurée analogue à la topaze, mais il y a eu, je crois, dans ces phénomènes, deux époques ou deux actions distinctes. Si les terrains subordonnés aux topazes portent les traces d'un métamorphisme considérable, l'argile au milieu de laquelle sont placés les filons de cette substance, la lithomarge qui l'accompagne ne sont-elles pas les indices d'actions différentes de celles qui l'ont produite?

Après l'ouverture des fentes où se sont formées les topazes, il y aurait eu altération des schistes, formation d'argile et de lithomarge. Le rôle de la vapeur d'eau aurait été prédominant pendant cette période, et c'est à elle que serait due la désulfuration des pyrites et leur transformation en hématite, ainsi que celle du fer oxydulé en oligiste; en bien d'autres points de la province, son action se serait aussi fait sentir. A la vapeur d'eau auraient succédé des dégagements de fluorures, fluorure de silicium, de titane, d'étain, qui, agissant sur les hydrosilicates d'alumine, auraient produit les topazes, les oxydes de titane avec dépôt de silice cristallisée. Dans les filons et leurs ramifications, l'action était complète; à une petite distance des parois, cette action, ayant moins d'énergie, formait ces cristaux impurs qui sont aux topazes ce que la chiastolithe est à l'andalousite.

Telles sont les conditions géologiques et minéralogiques des gisements de topazes, qui ont bien des points communs avec ceux connus en Europe.

Ont-ils des liaisons avec les autres dépôts de pierres précieuses de la province de Minas-Géraës?

C'est ce que je vais examiner.

Gisements de pierres précieuses de la province de Minas, autres que ceux de topazes. — Le diamant, les béryls, cymophanes, triphanes, grenats, andalousites dichroïques, etc., occupent deux niveaux géologiques différents et se rencontrent dans deux zones contiguës, mais distinctes. Dans l'un comme dans l'autre abondent les tourmalines et, tandis que dans les districts diamantifères et aurifères elles sont en général

Digitized by Google

noires et de petites dimensions, dans la région des béryls et des cymophanes, on les trouve en individus volumineux et en général de couleur verte, rose ou bicolore, avec noyau rose ou blanc et enveloppe verdâtre.

Gisements de diamants. — Les gisements de diamants appartiennent aux quartzites micacés, *itacolumites*, de certains auteurs (1), que j'ai signalés autour de Boa-Vista, et par suite au même horizon géologique que ceux de topazes. Les béryls et autres minéraux sont localisés dans les micaschistes, schistes cristallins, gneiss inférieurs aux quartzites, schistes micacés et phyllades, etc., qui constituent la plus grande partie du plateau supérieur de Minas. Les quartzites micacés de l'étage supérieur commencent dès Ouro-Preto, accompagnent la chaîne de séparation des eaux du São-Francisco, du rio Doce, du Jequitinhonha. Il y a certainement des sous-divisions à faire dans leur ensemble, et leurs caractères minéralogiques sont assez variables, mais ils conservent toujours un aspect caractéristique. Leur étude fera l'objet d'un travail spécial.

Ils présentent quelque développement dans la partie du bassin du Jequitinhonha, où les terrains diamantifères ont le plus d'importance.

A partir de la ville de Conceição-do-Serro, sur les versants oriental et occidental de la chaîne de séparation des eaux, mais surtout dans le premier, il n'est pas de ruisseau ou de rivière dont le lit n'ait été occupé par des graviers diamantifères. Près d'Ouro-Preto, l'existence de ces dépôts est plus que douteuse; mais à 60^{km} ou 70^{km} au nord un premier « placer » a été signalé, à quelque distance du bourg de Cocaes, et a fourni des diamants de très petites dimensions. N'ayant pas l'intention de faire ici l'étude des terrains diamantifères du Brésil, je ne parlerai

---

(1) Je donne le nom de *quartzite* aux roches formées de grains de quartz sans ciment mélangés en proportions notables de substances étrangères, telles que mica chlorité, fer oligiste, pyrites, etc., réservant celui de grès aux roches quartzeuses avec ciment calcaire, siliceux, ferrugineux, etc. Bien souvent les quartzites de la province de Minas sont formés presque entièrement de quartz (serra do Caraça, etc.), mais, où je n'ai pas rencontré de ciment, ils sont aréneux ou compactes et se rapprochent de véritables grès. Ceux-ci existent bien caractérisés dans le bassin du São-Francisco, et probablement en d'autres points non visités par moi.

Digitized by Google

que des régions étudiées par moi-même, laissant de côté les provinces de Bahia, Parana, Goyaz et la partie ouest de Minas-Géraës; je ne décrirai pas non plus l'aspect des alluvions qui les constituent. L'axe de cette zone est à peu près N.-S. La position de ces dépôts avait déjà fait naître chez la plupart des explorateurs l'idée que le gisement primitif du diamant se trouvait dans les *itacolumites;* mais ni cette substance précieuse ni les minéraux qui l'accompagnent n'avaient été vus en place par eux. Ces minéraux, qui constituent dans les alluvions le guide des mineurs, ont un aspect particulier sur lequel j'ai d'abord fixé mon attention. Lorsque le cascalho diamantifère est débarrassé de l'argile, du sable et des graviers accidentels, on est immédiatement frappé par l'abondance des minéraux suivants : rutile, anatase, rutile pseudomorphe de l'anatase, fer titané, cristaux roulés de tourmalines noires, purs ou traversés par des zones de quartz blanc, fer oligiste en lamelles ou en cristaux octaédriques; fer magnétique en grains, phosphates complexes, et, dans le Jequitinhonha et quelques-uns de ses affluents, fragments roulés de klaprothine, auxquels se joignent, près de la ville du Serro, des pépites de platine. Quelques-unes de ces pépites, du poids de plusieurs grammes, m'ont été rapportées par un de mes élèves. Ce sont là, pour moi, les satellites les plus importants du diamant, qui, à la vérité, sont accompagnés par d'autres minéraux, dont la liste complète a été donnée par M. Damour pour les gites diamantifères de la province de Bahia. Je les ai constamment rencontrés en proportions relativement variables dans les échantillons de provenances certaines que je possède. Comme le diamant, ils sont le plus souvent en fragments roulés et plus ou moins usés; quelquefois, pourtant, surtout quand on s'approche de la partie supérieure du bassin des affluents du Jequitinhonha, ils se présentent en cristaux bien conservés. A l'appui de cette liaison intime du diamant et des oxydes de titane, je citerai encore ce fait de la rencontre d'un cristal d'anatase où se trouve implanté un petit diamant. Ni l'un ni l'autre ne paraissent roulés, et je ne crois pas que le diamant ait pu pénétrer dans le cristal d'anatase après coup, ou se réunir à lui accidentellement.

Le gisement primitif de ces minéraux est facile à découvrir. Auprès de la ville de Diamantina, les filons de quartz sont abondants, et le rutile les pénètre fréquemment à quelques lieues à l'ouest; on le

Digitized by Google

retrouve dans la même roche, soit en grosses et longues aiguilles, soit affectant la forme de l'anatase.

Le fer oligiste, la martite, l'oxyde de fer magnétique, le fer titané se rencontrent dans les mêmes conditions.

La klaprothine non seulement est associée au quartz dans les roches sur lesquelles coule un petit ruisseau des environs de Diamantina, mais même imprègne les quartzites en se substituant au mica.

Je ne doute pas que des recherches plus complètes, que je poursuis maintenant, ne me fassent retrouver en place tous les minéraux si intéressants qui composent le cascalho diamantifère : fibrolite, phosphates complexes, jaspe, silex, grenats, etc.

Le diamant lui-même devait se rencontrer dans les mêmes conditions, et il me paraît très rationnel de le rechercher dans les roches ayant fourni les éléments minéralogiques des dépôts d'alluvions où il se trouve.

J'étudierai complètement cette question dans un travail consacré à l'histoire des gisements et de l'exploitation des diamants dans la province de Minas-Géraës.

Je me contenterai ici de signaler les conclusions que je crois pouvoir déjà tirer de mes observations.

Le diamant existe en place dans deux séries de roches dont, malheureusement, je ne peux pas fixer l'horizon géologique.

La première se montre aux environs de la ville de Grão-Mogol, à 300^{km} environ au nord de Diamantina.

Dès 1840, je crois, un échantillon contenant du diamant a été rapporté en France par M. Lamanoff, et doit exister encore dans les collections de l'École des Mines de Saint-Pétersbourg.

Un autre fragment, avec diamant très visible, a été retrouvé dans la collection du Musée de Rio-Janeiro par l'un des directeurs, M. Derby, qui le soumit à mon examen. Les recherches entreprises sur ma demande à Grão-Mogol m'ont permis d'obtenir de nombreux échantillons de la roche, dont deux contiennent des diamants faisant saillie sur la superficie et permettant certainement de penser qu'il en existe d'autres dans la masse de la roche.

Celle-ci est formée de grains de quartz et de mica vert appartenant à l'espèce chromifère (fuchsite). Cette roche est loin d'être homogène,

Digitized by Google

et, d'après les échantillons que je possède, il me semble que, à peu de distance du point où les diamants ont été rencontrés, sa nature varie.

Quelques-uns d'entre eux ont le même aspect que les quartzites à fuchsite des environs d'Ouro-Preto, qui appartiennent à l'étage inférieur des roches métamorphiques de la province, dont l'âge géologique, certainement paléozoïque, n'a pu encore être fixé. Il est impossible, minéralogiquement, de les en séparer : leur composition, leur cristallinité, leur métamorphisme sont égaux, aussi prononcés. Des veines de quartz en cristaux bien formés les traversent. Aussi n'avais-je pas hésité, au début, à placer au même niveau les quartzites à diamant de Grão-Mogol et les terrains aurifères de pyrites du centre de la province.

Des faits nouveaux sont venus d'un côté infirmer mon opinion, de l'autre l'appuyer. Dans un des fragments de ma collection contenant un diamant, on voit nettement un galet roulé de quartz empâté dans la masse. L'origine conglomératique de la roche semblerait donc être prouvée, et son horizon géologique devrait être rapporté à celui des poudingues à couches presque horizontales qui, tout autour de Diamantina, recouvrent comme d'un manteau les assises plus anciennes, beaucoup plus disloquées, des roches métamorphiques inférieures.

Cette conclusion n'est plus permise, avant de nouvelles études, par suite de la découverte près de Sabará, à Coral-del-Rey, de couches de conglomérats analogues subordonnés aux roches si curieuses formées de fer oligiste, les itabirites, qui appartiennent aux terrains les plus profondément métamorphisés de la province et que l'on ne peut séparer des quartzites de fuchsite inférieurs. Mais, quelle que soit l'opinion à laquelle on s'arrête sur la place à attribuer aux quartzites de Grão-Mogol, nous nous trouvons toujours en présence des deux hypothèses suivantes :

Ou le diamant, comme les autres éléments de la roche métamorphique, a été emprunté à des dépôts plus anciens au milieu desquels il s'était déposé, ou il a été formé de toutes pièces sous l'action des mêmes forces que celles qui ont produit, par des réactions analogues, le quartz, les oxydes de titane, de fer, etc., qui se rencontrent avec lui.

Personne, en voyant les cristaux de ces substances, brillants, à arêtes vives, sans altérations, ne pourra penser que ces cristaux ont été roulés,

Digitized by Google

arrachés à des roches plus anciennes entraînées par les eaux. Pourquoi admettre que le diamant qui se trouve dans les mêmes conditions de gisement avec le même aspect constitue une exception que rien ne confirme?

Mais le gisement de Grão-Mogol n'est pas le seul point où le diamant se trouverait en place, quelle que soit l'hypothèse admise. A 30^{km} à l'ouest de Diamantina, à São-João-da-Chapada, depuis plus de quarante ans il est exploité dans une couche ou plutôt une série de couches d'argiles provenant de la décomposition de schistes micacés intercalés dans les quartzites de fuchsite inférieurs. Heuzer et Claraz, qui ont visité le gisement alors que l'exploitation était en pleine activité, l'ont considéré comme représentant une couche de schiste amphibolifère décomposé.

J'en ai repris l'étude et j'ai moi-même extrait plusieurs mètres cubes d'argile qui ont donné au lavage dix petits diamants bien cristallisés en octaèdres et dodécaèdres rhomboïdaux, à surface rugueuse, à arêtes bien vives et sans indices d'usure.

Ils étaient accompagnés de cristaux bien nets de fer oligiste, de rutile, d'anatase, de martite, de quartz, de tourmaline, etc., mais n'ayant aucunement l'aspect roulé de ces minéraux tels qu'on les trouve avec le diamant dans les gisements d'alluvions. Les couches d'argiles, relevées vers l'ouest de 50° à 55°, courent N.-S., en suivant les allures des quartzites micacés, fortement altérés, qui les recouvrent.

La stratification des couches est encore visible et, comme dans les gisements de topazes, des fragments incomplètement décomposés peuvent servir de témoins de leur origine schisteuse.

Souvent leur aspect rappelle celui de la lithomarge avec quartz qui sert de gangue aux topazes.

Il y a donc entre les deux gisements une similitude telle, tant au point de vue de la matière des substances qui accompagnent les minéraux caractéristiques de ces gites que de leur situation géologique, qu'il me semble que dès à présent on peut faire logiquement un rapprochement entre leur mode de formation. C'est d'ailleurs cette considération que je me propose de discuter dans le travail auquel j'ai déjà fait allusion.

Certains des quartzites de Grão-Mogol ont, comme je l'ai dit plus haut,

Digitized by Google

le même *facies* que ceux des environs d'Ouro-Preto, et particulièrement que ceux de l'Itacolumy, qui sont relevés à peu près vers l'ouest, comme les terrains du bassin du Jequitinhonha. L'assimilation que je fais des terrains diamantifères de Grão-Mogol aux quartzites métamorphiques des environs d'Ouro-Preto serait donc basée sur le même aspect cristallin de ces roches, sur la présence des mêmes matières micacées ou chloriteuses disposées en couches minces comme dans celles-ci, et sur la continuité de semblables formations observées d'Ouro-Preto à Diamantina.

Je dois pourtant noter qu'il existe dans cette même région des dépôts plus modernes indiqués par M. Derby, qui les désigne sous le nom de *grès* et de *poudingues*. Je les ai observés, comme lui, autour de Diamantina, et il ne serait pas impossible qu'eux aussi continssent des diamants; mais ils seraient probablement alors dans des conditions analogues à celles où ils se trouvent dans les dépôts d'alluvions. L'horizon géologique de ces grès ou quartzites, ainsi que celui des roches culminantes des serras d'Itacolumy, de Caraça, a été rapporté quelquefois au tertiaire. Je ne traite pas ici cette question, réservant complètement mon opinion sur ce sujet et ne voulant l'exprimer qu'après l'étude complète des bassins fossilifères tertiaires de Gandarela et Fonseca, où j'espère trouver un point de repère.

En outre, l'âge des divers terrains de Minas est des plus difficiles à déterminer. Dans les schistes et les quartzites je n'ai jamais vu trace de fossiles.

Dans les calcaires du São-Francisco, que je leur crois supérieurs, quoiqu'ils se trouvent dans la même série, M. d'Orville Derby a rencontré des fragments de coraux des genres *Favosites* et *Chœtetes*, qui montrent qu'ils appartiennent à l'époque paléozoïque et non mésozoïque, comme on l'admettait généralement jusqu'à présent.

Restent pour guides les directions des soulèvements.

La dislocation à laquelle appartiendrait le gisement des topazes est dirigée O. 13° S.-E. 15° à 20° N ou E.-N.-E; c'est ce soulèvement auquel a été donné le nom de *système de la Mantiqueira;* il est placé entre les dépôts secondaires et tertiaires, et c'est à lui que se rattacheraient des filons et des dykes de diorites.

Les roches comprises sous le nom de *diorites* sont, d'ailleurs, d'une fréquence extrême dans les provinces de Minas, de São-Paulo, de

Digitized by Google

Rio-Grande-do-Sul, et, dans cette dernière, elles sont en relation avec des gisements de cuivre. Leur aspect est très variable et elles méritent des études spéciales. On les retrouve formant des dykes dans les quartzites de la région diamantifère, où leur texture est plus serrée, plus compacte, et sans ces cristaux volumineux de feldspath qui caractérisent certaines variétés des environs d'Ouro-Preto et du bassin de l'Abaeté. Je dois ajouter que, près de la ville du Serro, dans la zone même où le *cascalho* diamantifère contient des pépites de platine, j'ai retrouvé des roches magnésiennes cristallines avec fer magnétique et cristaux octaédriques d'oligiste. Une des variétés est de couleur vert foncé, formée de petites écailles mélangées à des aiguilles très fines d'une substance fondant en verre noir. Elle passe à une roche compacte contenant 10 à 11 pour 100 d'eau, fondant beaucoup plus difficilement et ayant l'aspect extérieur de la serpentine avec proportions notables d'oxyde de chrome.

J'ai déjà signalé l'existence de cette dernière substance dans les matières vertes, prises pour *talc*, qui accompagnent les quartzites des environs d'Ouro-Preto, et qui n'est autre chose que de la fuchsite.

Les travaux de M. Daubrée ont montré d'une manière certaine la relation qui existe entre les gisements de platine de l'Oural, les roches serpentineuses et le fer chromé. Il a signalé des associations analogues à l'île de Bornéo, où les itacolumites sont traversés par des roches éruptives : gabbro et serpentine. Au Cap, le diamant est associé à des roches péridotiques, avec bronzite. Au Brésil, ce minéral n'échappe pas à la règle commune.

Gisement de pierres colorées autres que la topaze. — C'est à tort que les pierres colorées ont été quelquefois indiquées comme provenant des mêmes dépôts que les diamants. L'erreur provient de ce que les deux exploitations se faisaient dans des alluvions de même nature et dans les bassins des mêmes cours d'eau, mais à des niveaux bien différents. La région la plus riche en pierres colorées forme un îlot dans la partie est de la province de Minas-Géraës, à peu de distance de ses limites avec celle de Bahia. Elle comprend les bassins d'une série de petits cours d'eau, affluents de l'Arassuahy et du Jequitinhonha, près du point de confluence de ces deux rivières. C'est sur la rive

Digitized by Google

droite de cette zone que l'abondance des minéraux est la plus grande, particulièrement dans les ravins où coulent les rios Gravata, Setubal, Lufa, Calhao, Piauhy, Urubu, prenant leurs sources dans les montagnes qui, à l'est de la ville de São-João-Baptista, séparent le bassin du rio Doce de celui du Jequitinhonha et font partie de la serra dite des *Esmeraldas*, par suite de l'erreur des premiers explorateurs qui avaient confondu les émeraudes avec les tourmalines vertes. Déjà près de la ville de São-João-Baptista la cristallinité des roches augmente, et les schistes micacés inférieurs se développent. Ces schistes sont souvent graphiteux, avec nodules de graphite écailleux; le disthène forme fréquemment une partie importante de la roche, et la staurotide lui est fréquemment associée en petits cristaux translucides, rougeâtres, rarement maclés en croix et présentant constamment, lorsqu'ils sont entiers, les faces a^1 et g^1. Des filons de quartz, avec cristaux volumineux de tourmalines, traversent ces schistes. Ce minéral est d'une abondance extrême autour d'Ouro-Preto; entre cette ville et celle de Sabará, on le trouve dans une espèce de greisen; un peu plus loin, près du village de Rio-das-Pedras, le mica disparaissant, la roche passe à l'*hyalotourmalite*.

Dans les cascalhos diamantifères, le quartz forme souvent, à l'état de fragments roulés, une partie notable des dépôts. A peu près à 60^{km} à l'est de São-João Baptista, on quitte le plateau schisteux, dont l'altitude est de 900^{m} à 1000^{m} au-dessus du niveau de la mer, et l'on descend dans les bassins du Setubal et Gravata. Aux schistes et phyllades succèdent des roches à éléments cristallins distincts : quartzites micacés compactes, micaschistes passant au gneiss, et une série de roches formées de paillettes de mica, chlorite, grains de quartz avec aiguilles de tourmalines, d'amphibole et cristaux de staurotide très nets, dont les angles $mm = 129°20'$, $mg^1 = 115°30'$ sont faciles à mesurer.

Les gneiss et micaschistes prennent de l'importance au-dessous de la ville d'Arassuahy. Les cymophanes, triphanes, grenats, béryls, etc., ont d'abord été trouvés dans les lits des petits cours d'eau déjà cités. On les a ensuite rencontrés en abondance à une certaine distance des bords, à un niveau que les eaux n'atteignent plus aujourd'hui, et dans des alluvions recouvertes par la terre végétale.

Digitized by Google

Ces dépôts riverains, connus sous le nom de *gopiaras*, sont analogues à ceux des diamants, où abondent surtout les fragments roulés de quartz blanc, *ovos de pomba* des chercheurs de diamants (*garimpeiros*).

Je n'hésite pas à attribuer à des phénomènes d'érosion de l'époque quaternaire la formation de ces divers dépôts.

Les pierres qu'on peut séparer facilement par des lavages à la *batea* sont les suivantes :

Cymophanes;
Triphanes;
Andalousites dichroïques;
Grenats;
Béryls;
Staurotides;
Quartz coloré en jaune, améthystes, etc.;
Tourmalines.

Dans les parties les plus lourdes qui restent au fond de la *batea*, on retrouve les divers oxydes de fer et le rutile des dépôts diamantifères; mais je n'ai jamais vu ni l'anatase, ni la klaprothine ni ces silex, jaspes et phosphates, *favas* des mineurs.

Les béryls sont, soit en fragments brisés, soit en cristaux bien conservés, jaunâtres ou bleuâtres.

Les cristaux hexagonaux de dimensions considérables, avec les modifications a^1, sont fréquents.

Les cymophanes jaunes, jaune verdâtre, transparentes ou opaques et impures, sont presque toujours brisées; la macle en cœur se rencontre quelquefois. Les petits cristaux sont parfaitement conservés et peuvent se prêter facilement aux études cristallographiques.

Les triphanes sont encore en moins bon état, et le clivage de 87° est seul net.

Les andalousites sont moins roulées, et sur quelques-unes la forme primitive se prête facilement aux mesures goniométriques. Leur dichroïsme est très prononcé : on en rencontre même d'une couleur rose, peu commune, je crois, ailleurs qu'au Brésil.

Les grenats appartiennent, en général, à l'espèce almandine; quelques-uns donnent la réaction du manganèse et doivent être rangés parmi les spessartines. Les quartz colorés, spécialement les améthystes,

Digitized by Google

très abondants en bien d'autres points de la province, ont été extraits en grande quantité dans cette zone.

L'aspect de la région gemmifère, la nature des roches en fragments qui accompagnent les minéraux, suffisaient pour pouvoir affirmer que leur gisement primitif existait autour des points où on les rencontre. Cette hypothèse a été pleinement vérifiée par la découverte de filons de quartz, pur ou accompagné de feldspath et de mica, avec béryls, cymophanes, triphanes, tourmalines et grenats.

Les gisements de topazes et de diamants de Minas-Géraës sont donc placés dans les quartzites et schistes métamorphiques; les béryls, cymophanes et autres pierres colorées, dans les micaschistes et gneiss inférieurs aux précédents. Dans les uns comme dans les autres, on retrouve les minéraux et les roches qui les accompagnent dans les diverses contrées du monde. Ainsi, au milieu de la complexité et de la variation de la nature des roches encaissantes, on rencontre, à des distances immenses, des indices certains de l'action de mêmes agents minéralisateurs ayant produit les mêmes minéraux, et une confirmation du principe de l'uniformité des lois qui ont présidé aux forces mises en jeu par la nature dans le règne minéral.

Ouro-Preto, 15 décembre 1880.

Digitized by Google

SUR LES

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS

DÉFINIES

PAR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES
A UNE OU PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. L. SAUVAGE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. Le Mémoire que M. Fuchs a publié en 1866 sur les équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre quelconque renferme les principes fondamentaux de la théorie de ces équations. Je me suis proposé d'étendre cette théorie à des systèmes d'équations différentielles à une ou plusieurs variables indépendantes.

Deux Chapitres sont consacrés aux propriétés fondamentales des solutions d'un système d'équations aux différentielles totales de la forme

$$(1)\quad dy_i=(a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\ldots+a_{in}y_n)dx_1+\ldots+(l_{i1}y_1+l_{i2}y_2+\ldots+l_{in}y_n)dx_p,$$

où $i=1, 2, \ldots, n$, dans les régions du plan où les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont des fonctions analytiques des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Dans la troisième Partie, on s'occupe des équations différentielles

Digitized by Google

linéaires et homogènes à une seule variable indépendante. Après l'application à ces systèmes des propriétés générales déjà connues par ce qui précède, on donne les formes que peuvent prendre les éléments d'un système fondamental de solutions dans le domaine d'un point singulier isolé (1).

2. Je ferai usage des définitions suivantes, tirées d'un Mémoire de M. Weierstrass (2).

Un *point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est l'ensemble des valeurs $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \ldots, x_p = \xi_p$.

La valeur d'une fonction au *point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est la valeur que prend cette fonction pour $x_1 = \xi_1, \ldots, x_p = \xi_p$.

Le *domaine* δ *d'un point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est l'ensemble de tous les *points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que les modules des différences $x_i - \xi_i$ soient moindres que le nombre positif δ.

Une fonction uniforme est dite *régulière au point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, si elle est développable en une série, convergente dans un domaine de ce point, de la forme

$$\Sigma A_{r_1 r_2 \ldots r_p} (x_1 - \xi_1)^{r_1} (x_2 - \xi_2)^{r_2} \ldots (x_p - \xi_p)^{r_p},$$

les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$ variant de zéro à l'infini par des valeurs entières, et $A_{r_1 r_2 \ldots r_p}$ représentant un coefficient constant.

Dans les définitions précédentes, on remplace, par convention, une différence $x_i - \xi_i$ par $\frac{1}{x_i}$ quand ξ_i devient infini.

Si une fonction uniforme n'est pas *régulière au point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, on dit que ce point est *singulier*.

M. Weierstrass a indiqué, dans le Mémoire précédemment cité, la classification des *points singuliers* des fonctions analytiques uniformes.

---

(1) *Voir* la Thèse de M. Tannery, et le Mémoire de M. Fuchs au *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121.

(2) *Journal de Crelle*, t. 89, p. 1.

Digitized by Google

CHAPITRE I.

3. La définition des fonctions qui satisfont à un système d'équations aux différentielles totales à p variables indépendantes repose sur le théorème suivant, donné par M. Bouquet (1).

Soit un système de n équations aux différentielles totales à p variables indépendantes

$$dy_i = X_{i1}\,dx_1 + \ldots + X_{ip}\,dx_p \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans lesquelles les coefficients différentiels X_{ik} sont des fonctions analytiques des $p+n$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n$, satisfaisant identiquement, en vertu des équations proposées, aux conditions d'intégralité

$$Dx_h X_{ik} + \sum_{g=1}^{n} X_{gh} Dy_g X_{ik} = Dx_k X_{ih} + \sum_{g=1}^{n} X_{gk} Dy_g X_{ih},$$

les indices h et k variant de 1 à p, et l'indice i de 1 à n; si les coefficients différentiels X_{ik} sont holomorphes pour toutes les valeurs des différences $x_i - \xi_i$ dont les modules sont inférieurs ou égaux à ρ_i, et pour toutes les valeurs des différences $y_i - \eta_i$ dont les modules sont inférieurs ou égaux à r_i, on peut tirer des équations proposées, par un calcul de proche en proche, des séries convergentes pour toutes les valeurs des quantités $x_i - \xi_i$ dont les modules sont plus petits qu'un nombre ρ' qu'on peut fixer; et les fonctions holomorphes représentées par ces séries satisferont aux équations proposées, et prendront les valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ lorsque les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prendront les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265.

Digitized by Google

4. Appliquons ce théorème aux systèmes d'équations de la forme

$$(1) \quad dy_i = (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_1 + \ldots + l_{in}y_n)dx_p,$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, où les coefficients $a, b, \ldots . l$ sont des fonctions analytiques des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ satisfaisant identiquement, en vertu des équations proposées, aux conditions d'intégrabilité.

Si les coefficients $a, b, \ldots, l$ restent holomorphes pour toutes les valeurs des différences $x_i - \xi_i$ dont les modules sont inférieurs à ρ, les coefficients différentiels X_{ik} seront holomorphes dans les mêmes conditions, et quels que soient les modules des différences $\gamma_i - \eta_i$, les valeurs η_i étant prises arbitrairement.

En employant les définitions de M. Weierstrass, nous énoncerons le théorème suivant :

Si les coefficients a_{ik} des équations (1) sont des fonctions *régulières au point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, il existe n fonctions $y_1, y_2, \ldots . y_n$ satisfaisant aux équations proposées, *régulières en ce point* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, et prenant en ce point des valeurs arbitrairement choisies $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

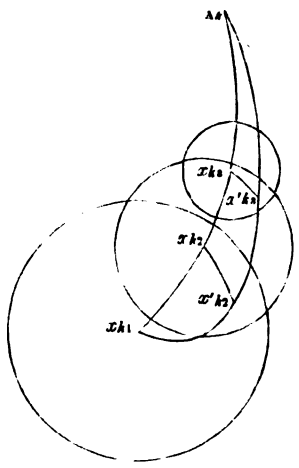
5. Définissons maintenant une solution du système (1). Imaginons que les variables indépendantes suivent, avec des marches déterminées, des chemins déterminés, de sorte que, en tous les *points* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ successivement, les fonctions $a, b, \ldots, l$ soient régulières. Il existe un domaine du *point de départ* $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{p1})$ où les fonctions $a, b, \ldots . l$ sont représentées par des séries convergentes, procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes des différences $x_1 - x_{11}, x_2 - x_{21}, \ldots, x_p - x_{p1}$. Faisons suivre aux variables indépendantes leurs chemins avec les marches assignées sans les faire sortir des cercles qui composent le domaine du point de départ. Soit $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$ le *point* auquel on s'arrête. Il existe, dans le domaine considéré, n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, satisfaisant aux équations proposées. Elles ont au *point* $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{p1})$ des valeurs arbitraires $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots, \eta'_{n1}$, et arrivent au *point* $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$ avec des valeurs bien déterminées $\eta_{12}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{n2}$. Le *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ n'est pas un *point singulier* des coefficients $a, b, \ldots, l$. Il existe, pour ce point, un domaine composé de cercles, à l'intérieur

Digitized by Google

desquels les variables indépendantes, partant du *point* $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$, peuvent suivre de nouveau une portion de leurs chemins d'après les marches assignées. Soit $(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{p3})$ le point auquel on s'arrête dans ce domaine. Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, partant du *point* $(x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{p2})$ avec les valeurs $\eta_{12}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{n2}$, arriveront au *point* $(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{p3})$ avec des valeurs bien déterminées $\eta_{13}, \eta_{23}, \ldots, \eta_{n3}$. On traitera le *point* $(x_{13}, x_{23}, \ldots, x_{p3})$ comme les deux points précédents, et, en avançant ainsi de proche en proche, on arrivera, avec des valeurs toujours déterminées, et variant d'une manière continue, à un *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$.

Cela posé, remarquons que les domaines successifs sont formés de cercles qui empiètent les uns sur les autres. Prenons arbitrairement un *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ dans la région commune aux domaines des deux *points* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$, $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$; puis prenons un *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p2})$ dans la région commune aux domaines des deux *points* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, $(x_{13}, \ldots, x_{p3})$, etc.

Fig. 1.



Joignons le *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ par un chemin arbitraire pris dans le domaine du *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$; joignons le *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ au *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p3})$ par un chemin arbitraire pris dans le domaine du *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, etc. Continuons ainsi jusqu'à un *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Je dis qu'on peut substituer

Digitized by Google

aux chemins primitifs les nouveaux chemins qui relient le *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$.

En effet, on peut évidemment substituer aux chemins nouveaux les chemins obtenus en allant du *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$, du *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ au *point* $(x_{12}, \ldots x_{p2})$, du *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ au *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$, du *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ au *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p3})$, de ce point au*point* $(x_{13}, \ldots, x_{p3})$, de celui-ci au *point* $(x'_{13}, \ldots, x'_{p3})$, ... Or le chemin primitif qui va du *point* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$ au *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ et le nouveau chemin qui relie ces deux mêmes points en passant par le *point* $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ conduisent aux mêmes valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, car les trois *points* $(x_{11}, \ldots, x_{p1})$, $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$, $(x'_{12}, \ldots, x'_{p2})$ sont dans le même domaine. Partant maintenant du *point* $(x_{12}, \ldots, x_{p2})$ commun à deux domaines, on arrivera au *point* $(x_{13}, \ldots, x_{p3})$ commun à deux autres domaines avec les mêmes valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$. On peut donc, en avançant de proche en proche, atteindre le *point* commun $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ aux deux chemins et, en ce point, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auront les mêmes valeurs pour ces deux chemins.

Il résulte de là que, connaissant les valeurs initiales des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ au *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, on peut obtenir des valeurs de ces fonctions qui soient les mêmes en un autre *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$, en faisant varier, d'une manière continue, les variables indépendantes d'une infinité de manières différentes entre le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et le *point* $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$.

Étant donnés des chemins et des marches déterminés, on pourra donc déformer les chemins d'une manière continue, et, sur des chemins donnés, altérer les marches d'une manière continue pour arriver aux mêmes valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en un *point* $(X_1, \ldots, X_p)$, pourvu que les déformations de chemins et les altérations de marches restent comprises entre certaines limites.

Il est évident d'abord qu'on ne peut déformer les chemins qu'entre certaines limites; nous allons montrer qu'il en est de même pour les marches sur des chemins donnés, en formant un exemple, tel que deux combinaisons différentes de marches sur les mêmes chemins conduisent à des valeurs différentes d'une fonction.

Digitized by Google

Considérons la fonction très simple $z = \sqrt{x - y + 1}$, où x et y sont deux variables indépendantes. Elle est une intégrale de l'équation à différentielle totale

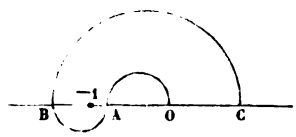
$$dz = \frac{1}{2(x-y+1)} z\,dx - \frac{1}{2(x-y+1)} z\,dy.$$

Posons $x - y = t$, de sorte qu'on aura $z = \sqrt{t+1}$. Prenons pour valeurs initiales $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, et faisons varier x et y sur des chemins définis de la manière suivante.

Pour le chemin de y, nous prenons, dans le plan des y, la partie de l'axe des valeurs réelles comprise entre 0 et 1.

Pour le chemin de x, nous prenons, dans le plan des x, trois demi-circonférences reliant le point $x = 0$ au point $x = 1$. La variable x, partant de l'origine, décrit la demi-circonférence OA (*fig.* 2), dont le

Fig. 2.



diamètre a une longueur $1 - \varepsilon$, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1. Puis x décrit la demi-circonférence AB dont le diamètre est plus grand que ε; enfin la troisième demi-circonférence sert à ramener x du point B au point C, où l'on a $x = 1$. La demi-circonférence AB n'est pas dans la même région du plan que les deux autres demi-circonférences, de sorte que le chemin OABC entoure le point $x = -1$.

Cela posé, choisissons les marches suivantes :

1° y reste nul, et x décrit tout le chemin OABC;

2° x reste égal à 1, et y décrit tout son chemin.

Cherchons, dans ces conditions, la variation de t. D'abord on a $t = x$, et t décrit, dans le plan des t, le même chemin que x dans le plan des x. On arrive à la valeur $t = 1$. Ensuite on a $t = 1 - y$, et, quand y varie de 0 à 1, t varie de 1 à 0. Il résulte de là que finalement t a décrit un chemin fermé allant de 0 à 0 et entourant le point $t = -1$. Le radical qui avait pour valeur primitive $z = 1$ aura donc pour valeur finale $z = -1$.

Digitized by Google

Choisissons, au contraire, les marches suivantes :

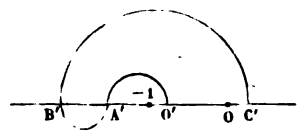
1° y varie de 0 à $1-\varepsilon$, et x reste nul;

2° y reste égal à $1-\varepsilon$, et x décrit tout le chemin OABC;

3° x reste égal à 1, et y varie de $1-\varepsilon$ à 1.

Dans le premier cas, on a $t=-y$, et t varie de 0 à $-(1-\varepsilon)$. Dans le second cas, on a $t=x-(1-\varepsilon)$, et t varie de $-(1-\varepsilon)$ à ε sur un chemin superposable à celui que décrit x. Soit O'A'B'C' le chemin

Fig. 3.



que décrit t; O étant l'origine dans le plan des t, on a en valeur absolue (*fig.* 3)

$$OO'=1-\varepsilon,\ OA'=2(1-\varepsilon),\ OC'=\varepsilon.$$

Le point $t=-1$ est entre O' et A', car on a

$$OO'<1<OA',$$

d'après le choix qu'on a fait de ε entre 0 et $\frac{1}{2}$.

Dans le troisième cas, on a $t=1-y$, et t varie de ε à 0. Il résulte de là que finalement t a décrit un chemin fermé, allant de 0 en 0, et n'entourant pas le point $t=-1$. Le radical, parti avec la valeur $z=1$, revient donc à cette valeur sans avoir changé de signe.

Ainsi, sans avoir changé autre chose que les marches des variables, on a changé la valeur de la fonction z au point $x=1, y=1$.

6. Nous appellerons *solution* du système d'équations (1) un groupe de n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, définies d'après les règles précédentes.

Si nous considérons ensemble plusieurs solutions, nous admettrons toujours que les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ont les mêmes marches sur les mêmes chemins pour toutes les solutions. Les solutions considérées ensemble ne différeront donc que par les valeurs initiales de leurs éléments.

Nous appellerons *système de solutions* l'ensemble de n solutions des équations proposées.

Digitized by Google

Soit D le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

d'un système de solutions représentées par les n groupes de fonctions $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$; nous dirons que le système est *fondamental* si le déterminant D n'est pas nul.

La considération des systèmes fondamentaux de solutions étant la base de la théorie, nous démontrerons d'abord qu'il existe des systèmes fondamentaux, en nous appuyant sur le théorème suivant :

7. *Le déterminant* D *d'un système quelconque de solutions satisfait à la relation*

$$d\log \mathrm{D} = \Sigma(g_{11} + g_{22} + \ldots + g_{nn})\, dx_k,$$

où la lettre g doit être remplacée successivement par les lettres a, b, ..., l, lorsque l'indice k prend les valeurs successives 1, 2, ..., p.

On a

$$d\log \mathrm{D} = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial \log \mathrm{D}}{\partial x_k}\, dx_k.$$

Or,

$$\frac{\partial \log \mathrm{P}}{\partial x_k} = \frac{1}{\mathrm{D}} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_k}.$$

Calculons $\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_k}$, nous aurons

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \frac{\partial y_{i1}}{\partial x_k} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \frac{\partial y_{in}}{\partial x_k} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mais on a, en général,

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = g_{i1} y_1 + \ldots + g_{in} y_n,$$

Digitized by Google

g représentant successivement les lettres $a, b, \ldots, l$, lorsque l'indice k varie de 1 à p. On a donc

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \dfrac{\partial y_{i1}}{\partial x_k} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \dfrac{\partial y_{in}}{\partial x_k} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & g_{i1}y_{11}+\ldots+g_{in}y_{n1} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & g_{i2}y_{1n}+\ldots+g_{in}y_{nn} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = g_{il}\,\mathrm{D}.$$

On a, par suite,

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x_k} = (g_{11}+g_{22}+\ldots+g_{nn})\,\mathrm{D},$$

d'où

$$\sum \frac{1}{\mathrm{D}}\,dx_k = \sum_{k=1}^{k=n} (g_{11}+\ldots+g_{nn})\,dx_k,$$

c'est-à-dire enfin

$$d\log \mathrm{D} = \Sigma(g_{11}+\ldots+g_{nn})\,dx_k.$$

Dans cette relation, le premier membre est une différentielle exacte; le second doit être de même une différentielle exacte. En intégrant, on pourra mettre le déterminant D sous la forme

$$\mathrm{D} = \mathrm{C}\,e^{\int \Sigma (g_{11}+\ldots+g_{nn})\,dx_k},$$

C étant une constante.

8. Il est maintenant aisé de démontrer qu'il existe une infinité de systèmes fondamentaux de solutions des équations (1). En effet, si l'on se donne des valeurs initiales des n^2 fonctions y, telles que le déterminant D ne soit pas nul, la constante C ne sera pas nulle, et le déterminant D restera différent de zéro, tant que les variables n'atteindront pas un système de valeurs constituant un *point singulier* des fonctions $a, b, \ldots, l$. Or, nous avons écarté les *points singuliers* dans la définition des fonctions y.

9. *Toute solution du système d'équations* (1) *peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental quelconque de solutions.*

Digitized by Google

En effet, soit un système quelconque de solutions

$$y_{1i}\ y_{2i},\ \ldots,\ y_{ni}\quad (i=1,2,\ldots,n);$$

posons

$$Y_i = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in}\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires; il est facile de vérifier que les fonctions Y constituent une solution du système d'équations (1).

Toute solution du système d'équations (1) peut réciproquement se mettre sous la forme précédente, pourvu que le système de solutions d'où l'on part soit fondamental.

En effet, soit

$$y_{1,n+1},\ y_{2,n+1},\ \ldots,\ y_{n,n+1}$$

une solution quelconque du système d'équations (1). Cherchons à déterminer des fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$, telles que l'on ait

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} + \lambda y_{i,n+1} = 0\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

On prendra λ arbitrairement, et on aura à résoudre un système d'équations à n inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ce système est du premier degré; le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro, puisque c'est le déterminant d'un système de solutions supposé fondamental. Les inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$ prendront donc des valeurs déterminées.

Je dis que les rapports $\frac{C_i}{\lambda}$ se réduiront tous à des constantes. En effet, en différentiant totalement, on a

$$y_{i1}\,dC_1 + \ldots + y_{in}\,dC_n + y_{i,n+1}\,d\lambda + C_1\,dy_{i1} + \ldots + C_n\,dy_{in} + \lambda\,dy_{i,n+1} = 0.$$

Or, le système proposé permettant d'éliminer dy_{ik}, on a

$$\begin{aligned}
&C_1\,dy_{i1} + \ldots + C_n\,dy_{in} + \lambda\,dy_{i,n+1}\\
&= C_1[(a_{i1}y_{11} + \ldots + a_{in}y_{n1})\,dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_{11} + \ldots + l_{in}y_{n1})\,dx_p] + \ldots\\
&+ C_n[(a_{i1}y_{1n} + \ldots + a_{in}y_{nn})\,dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_{1n} + \ldots + l_{in}y_{nn})\,dx_p]\\
&+ \lambda[(a_{i1}y_{1,n+1} + \ldots + a_{in},y_{n,n+1})\,dx_1 + \ldots + (l_{i1}y_{1,n+1} + \ldots + l_{in}y_{n,n+1})\,dx_p]\\
&= a_{i1}(C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n} + \lambda y_{1,n+1})\,dx_1 + \ldots = 0.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Nous avons donc simultanément

$$y_{i1}\,C_1+\ldots+y_{in}\,C_n+y_{i,n+1}\,\lambda=0\quad(i=1,2,\ldots,n),$$
$$y_{i1}\,dC_1+\ldots+y_{in}\,dC_n+y_{i,n+1}\,d\lambda=0\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Ces deux systèmes d'équations déterminent les mêmes valeurs proportionnelles des inconnues, en prenant pour inconnues d'une part C_1, C_2, ..., C_n et λ, et, d'autre part, dC_1, dC_2, ..., $d\lambda$; il faut donc que l'on ait

$$\frac{dC_1}{C_1}=\frac{dC_2}{C_2}=\ldots=\frac{dC_n}{C_n}=\frac{d\lambda}{\lambda},$$

ou encore

$$d\left(\frac{C_i}{\lambda}\right)=0,$$

ou enfin

$$\frac{C_i}{\lambda}=\text{const.}$$

Si donc on prend λ égal à -1, on aura les relations

$$y_{i,n+1}=C_1y_{i1}+\ldots+C_ny_{in}\quad(i=1,2,\ldots,n),$$

linéaires et homogènes à coefficients constants, qu'il s'agissait d'obtenir.

10. Supposons que l'on ait un système de solutions non fondamental, il existera entre ses éléments des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$C_1y_{i1}+\ldots+C_ny_{in}=0\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

On le démontrera par une méthode analogue à celle employée dans le paragraphe précédent.

11. Entre les éléments de $n+1$ solutions du système d'équations (1), il existe toujours un système de relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$C_1y_{i1}+\ldots+C_ny_{in}=0\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

C'est un autre énoncé du théorème du § 9.

Digitized by Google

12. Entre les éléments d'un système fondamental de solutions, il ne peut exister aucun système de relations de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou de la forme

$$C_1 y_{1i} + \ldots + C_n y_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En effet, le déterminant de ces équations homogènes du premier degré en $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne peut être nul, et on ne peut satisfaire à ces équations qu'en prenant $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

Mais il faut bien remarquer qu'une de ces relations peut avoir lieu isolément. Par exemple, le système d'équations

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x} y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{2}{1+x^2} y_1 + \frac{2x}{1+x^2} y_2$$

admet le système fondamental de solutions

$$y_{11} = x, \quad y_{21} = 1,$$
$$y_{12} = -x, \quad y_{22} = x^2.$$

Or, la relation $y_{11} + y_{12} = 0$ a lieu identiquement, quoique le système de solutions soit fondamental.

13. Si l'on substitue aux éléments d'un système fondamental de solutions d'autres éléments déterminés par les relations linéaires à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kn} y_{hn} \quad (h = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système fondamental, à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

En effet, soit P le déterminant des fonctions Y, soit Q celui des fonctions y, soit R celui des constantes, on a identiquement

$$P = Q.R.$$

Digitized by Google

Or, Q et R sont, par hypothèse, différents de zéro, et par suite P est différent de zéro, et les fonctions Y forment un système fondamental.

14. Substituons à des éléments d'un système fondamental d'autres éléments déterminés par les relations à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kg} y_{hg},$$

pour toutes les valeurs de k de 1 à g, et pour toutes les valeurs de h de 1 à n, nous aurons le tableau

$$\begin{array}{l} Y_{11}, \ldots, Y_{1g}, y_{1,g+1}, \ldots, y_{1n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{n1}, \ldots, Y_{gg}, y_{n,g+1}, \ldots, y_{nn}. \end{array}$$

Les éléments de ce tableau forment encore un système fondamental de solutions, si le déterminant des constantes de la substitution est différent de zéro. En effet, le déterminant des constantes peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1g} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ C_{g1} & \ldots & C_{gg} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

et la question est ramenée à la précédente.

15. Si l'on connaît une solution du système d'équations (1), on peut ramener l'intégration de ce système à celle d'un autre système de même forme ayant une inconnue de moins.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les éléments de la solution connue. Il peut en exister qui soient nuls. Admettons que les éléments $u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots, u_n$ soient identiquement nuls, sans qu'il en soit de même pour les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

Substituons aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ d'autres fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_s$ déterminées par les relations

$$y_h = u_h q_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Digitized by Google

Les s premières équations du système (1) deviendront

$$u_h\,dq_h + q_h\,du_h = (a_{h1}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{hs}\,u_s\,q_s + a_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + a_{hn}\,y_n)\,dx_1 + \ldots + (l_{h1}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{hs}\,u_s\,q_s + l_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + l_{hn}\,y_n)\,dx_p \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Remplaçons du_h par $\frac{\partial u_h}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial u_h}{\partial x_p}\,dx_p$. Ces équations prendront la forme

$$dq_h = (\alpha_{h1}\,q_1 + \ldots + \alpha_{hs}\,q_s + \alpha_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + \alpha_{hn}\,y_n)\,dx_1 + \ldots + (\lambda_{h1}\,q_1 + \ldots + \lambda_{hs}\,q_s + \lambda_{h,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + \lambda_{hn}\,y_n)\,dx_p.$$

Nous avons, en outre, les $n - s$ équations

$$dy_{s+k} = (a_{s+k,1}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{s+k,s}\,u_s\,q_s + a_{s+k,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + a_{s+k,n}\,y_n)\,dx_1 + \ldots + l_{s+k,1}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{s+k,s}\,u_s\,q_s + l_{s+k,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + l_{s+k,n}\,y_n)\,dx_p \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - s).$$

Si nous remplaçons y_{s+k} par q_{s+k}, nous aurons un système d'équations de même forme que le système (1). Nous l'écrirons

$$(2) \qquad dq_i = (\alpha_{i1}\,q_1 + \ldots + \alpha_{in}\,q_n)\,dx_1 + \ldots + (\lambda_{i1}\,q_1 + \ldots + \lambda_{in}\,q_n)\,dx_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les conditions d'intégrabilité doivent être satisfaites.

Vérifions-le, par exemple, pour l'équation qui donne dq_1. Les coefficients différentiels de dx_1 et dx_p sont deux coefficients quelconques. Prouvons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left[\frac{1}{u_1}\left(a_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{1s}\,u_s\,q_s + a_{1,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + a_{1n}\,y_n - q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{u_1}\left(l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1s}\,u_s\,q_s + l_{1,s+1}\,y_{s+1} + \ldots + l_{1n}\,y_n - q_n\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\right)\right].$$

En développant le calcul, nous aurons

$$u_1\,\frac{\partial}{\partial x_p}(a_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + a_{1n}\,y_n) - u_1\,\frac{\partial}{\partial x_p}\left(q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\right) - (l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1n}\,y_n)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p} = u_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}(l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1n}\,y_n) - u_1\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\right) - (l_{11}\,u_1\,q_1 + \ldots + l_{1n}\,y_n)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - q_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Digitized by Google

Or, on a

$$u_h q_h = y_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s),$$
$$q_{s+k} = y_{s+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

et, à cause de l'intégrabilité des équations du système (1), on a

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) = \frac{\partial}{\partial x_1}(l_{11}y_1 + \ldots + l_{1n}y_n).$$

Il vient donc

$$u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_p}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 q_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_p} + u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p}$$
$$= u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + u_1 q_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_p \partial x_1} + u_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_p}\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

c'est-à-dire une identité.

Remarquons maintenant que le système (2) admet la solution

$$q_h = 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, s),$$
$$q_{s+k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

Nous devrons donc avoir entre les coefficients l'ensemble des relations

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{is} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{is} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte de ces conditions, le système (2) devient

$$dq_i = [\alpha_{i2}(q_2 - q_1) + \ldots + \alpha_{is}(q_s - q_1) + \alpha_{i,s+1}q_{s+1} + \ldots + \alpha_{in}q_n]\,dx_1 + \ldots$$
$$+ [\lambda_{i2}(q_2 - q_1) + \ldots + \lambda_{is}(q_s - q_1) + \lambda_{i,s+1}q_{s+1} + \ldots + \lambda_{in}q_n]\,dx_p$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons maintenant

$$z_h = q_h - q_1 \quad (h = 2, 3, \ldots, s),$$
$$z_{s+k} = q_{s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

et retranchons la première équation des $s-1$ suivantes. Nous obtiendrons un système de la forme

$$(3) \quad dz_i = (A_{i2}z_2 + \ldots + A_{in}z_n)\,dx_1 + \ldots + (L_{i2}z_2 + \ldots + L_{in}z_n)\,dx_p$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n),$$

Digitized by Google

auquel il faudra joindre l'équation

$$(4)\qquad dq_1 = (\alpha_{12} z_2 + \ldots + \alpha_{1n} z_n)\, dx_1 + \ldots + (\lambda_{12} z_2 + \ldots + \lambda_{1n} z_n)\, dx_p.$$

Supposons que nous ayons obtenu une solution quelconque ζ_2, ζ_3, ..., ζ_n du système (3). Nous pourrons tirer q_1 de l'équation (4) en effectuant des quadratures, puisque les conditions d'intégrabilité sont satisfaites.

Soit Q une solution de cette équation, nous aurons

$$\begin{aligned} q_h &= \zeta_h + Q \quad (h = 2, 3, \ldots, s), \\ q_{s+k} &= \zeta_{s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - s). \end{aligned}$$

Nous en déduirons la solution du système (1)

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 Q, \\ y_h &= u_h(\zeta_h + Q) \quad (h = 2, 3, \ldots, s), \\ y_{s+k} &= \zeta_{s+k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n - s). \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à la résolution du système (3), de même forme que le système (1), mais où le nombre des fonctions inconnues est diminué d'une unité.

16. Étant donné un système fondamental de solutions du système (3), le système de solutions correspondant des équations (1) est aussi fondamental.

En effet, soit Δ le déterminant des solutions

$$\zeta_{2i}, \zeta_{3i}, \ldots, \zeta_{ni} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

du système d'équations (3). Supposons Δ différent de zéro, et par suite ce système de solutions fondamental.

L'équation (4) donne, pour chaque solution $\zeta_{2i}, \zeta_{3i}, \ldots, \zeta_{ni}$ des équations (3), une fonction Q_i, et l'on peut former un système de solutions des équations (1). Les éléments de ce système forment le tableau

$$\begin{array}{llll} u_1, & u_2, & \ldots, u_s, & 0, \ldots, 0, \\ u_1 Q_1, & u_2(\zeta_{22} + Q_1), & \ldots, u_s(\zeta_{s2} + Q_1), & \zeta_{s+1,2}, \ldots, \zeta_{n2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ u_1 Q_{n-1}, & u_2(\zeta_{2n} + Q_{n-1}), & \ldots, u_s(\zeta_{sn} + Q_{n-1}), & \zeta_{s+1,n}, \ldots, \zeta_{nn}. \end{array}$$

Digitized by Google

Je dis que ce système de solutions est fondamental. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait établir entre ses éléments des relations à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

On aurait d'abord

$$C_1 u_1 + C_2 u_1 Q_1 + \ldots + C_n u_1 Q_{n-1} = 0,$$

ou

$$C_1 + C_2 Q_1 + \ldots + C_n Q_{n-1} = 0.$$

On aurait ensuite

$$C_1 u_h + C_2 u_h (\zeta_{h2} + Q_1) + \ldots + C_n u_h (\zeta_{hn} + Q_{n-1}) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation précédente,

$$(a) \qquad C_2 \zeta_{h2} + \ldots + C_n \zeta_{hn} = 0 \quad (h = 2, 3, \ldots, s).$$

Enfin on aurait

$$(b) \qquad C_2 \zeta_{s+k,2} + \ldots + C_n \zeta_{s+k,n} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n - s).$$

L'ensemble des relations (a) et (b) exprimerait que le système de solutions des équations (3) n'est pas fondamental, ce qui est contraire à l'hypothèse.

17. Nous avons maintenant une marche à suivre pour former un système fondamental de solutions des équations (1). Soit une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du système (1). Formons un premier système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n - 1$ inconnues. Soit une solution $v_2, v_3, \ldots, v_n$ de ce système. Au moyen de cette solution, passons à un deuxième système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n - 2$ inconnues.

Au moyen d'une solution de ce nouveau système, passons de même à un système ne renfermant que $n - 3$ inconnues, et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un dernier système réduit à une seule équation renfermant une seule inconnue. Soit

$$dw = w(F_1 dx_1 + \ldots + F_p dx_p)$$

Digitized by Google

cette équation. Elle donne

$$w = Ce^{\int (F_1 dx_1 + \ldots + F_p dx_p)},$$

C étant une constante arbitraire, car la parenthèse doit être une différentielle exacte. Cette valeur de w, n'étant pas identiquement nulle, forme un système fondamental de solutions du dernier système auxiliaire. Elle fournira, après une intégration, une nouvelle solution de l'avant-dernier système auxiliaire. On aura alors deux solutions de ce système, et elles forment un système fondamental. Ce système fondamental permettra ensuite de former, après deux quadratures, deux solutions nouvelles du système auxiliaire précédent. Avec la solution déjà connue, on aura trois solutions de ce système d'équations, et ces trois solutions formeront un système fondamental. En remontant ainsi de proche en proche, on obtiendra finalement un système fondamental de solutions des équations (1).

Le nombre total des intégrations à effectuer dans la suite de ce calcul est

$$1 + 2 \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

18. Il existe une relation simple entre les expressions des déterminants des systèmes fondamentaux dans les systèmes d'équations (1) et (3). Soit D un déterminant relatif au système (1), soit Δ un déterminant relatif au système (3). En négligeant les facteurs constants, qui ne sont pas nuls, puisque D et Δ doivent être différents de zéro, on a

$$D = e^{\int \Sigma (g_{11} + \ldots + g_{nn}) dx_k},$$
$$\Delta = e^{\int \Sigma (G_{11} + \ldots + G_{nn}) dx_k}.$$

Or, on a, par définition,

$$G_{ii} = \gamma_{ii} - \gamma_{1i} = g_{ii} - \frac{1}{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \gamma_{1i},$$

pour les valeurs $1, 2, \ldots, s$ de l'indice i, et

$$G_{ii} = g_{ii}$$

pour les valeurs $s+1, s+2, \ldots, n$ de cet indice.

Digitized by Google

On a donc, par exemple,

$$A_{22}+\ldots+A_{nn}=(a_{22}+\ldots+a_{nn})-(z_{12}+\ldots+z_{1s})-\left(\frac{1}{u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{1}{u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\right).$$

Mais on a

$$z_{12}+\ldots+z_{1s}=-z_{11}=-a_{11}+\frac{1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

On a donc

$$A_{22}+\ldots+A_{nn}=(a_{11}+\ldots+a_{nn})-\left(\frac{1}{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{1}{u_s}\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\right).$$

On aura donc

$$\Sigma(G_{22}+\ldots+G_{nn})\,dx_k=\Sigma(g_{11}+\ldots+g_{nn})\,dx_k-\sum_{i=1}^{i=s}\frac{1}{u_i}du_i,$$

et, par suite,

$$\Delta=e^{\int\Sigma g_{11}+\ldots+g_{nn})\,dx_k}e^{-\int\sum_{i=1}^{i=s}\frac{1}{u_i}du_i}$$

ou

$$\Delta=De^{-\log u_1u_2\ldots u_s},$$

ou enfin

$$\Delta=\frac{D}{u_1u_2\ldots u_s}.$$

Comme première conséquence, imaginons qu'on donne d'abord le déterminant D, et qu'on dirige le calcul précédent de manière à obtenir le déterminant Δ. On voit que Δ ne pourra être nul que si D est nul, ou que si le produit $u_1u_2\ldots u_s$ devient infini. Or, aucune de ces deux hypothèses ne peut se réaliser en un *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui n'est pas *singulier*. On peut donc dire qu'à un déterminant D d'un système fondamental de solutions du système (1) correspond un déterminant Δ d'un système fondamental de solutions du système (3), et cette propriété peut évidemment s'étendre aux systèmes d'équations auxiliaires successifs.

Comme autre conséquence, on peut mettre le déterminant D sous la forme d'un produit de fonctions. En effet, soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-2}$ les déterminants des systèmes fondamentaux de solutions des équations

Digitized by Google

auxiliaires successives. On a

$$D = \Delta\, u_1 u_2 \dots u_n,$$
$$D = \Delta_1 v_2 v_3 \dots v_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\Delta_{n-2} = w.$$

En multipliant, membre à membre, on a

$$D = u_1 u_2 \dots u_n v_2 v_3 \dots v_n \dots w.$$

Ces dernières formules supposent que tous les éléments des solutions successives sont différents de zéro; on les modifierait facilement dans le cas contraire.

CHAPITRE II.

---

16. Conservons les hypothèses faites dans le Chapitre précédent; c'est-à-dire supposons que, dans les portions $T_1, T_2, \dots, T_p$ du plan limitées par des contours simples, les variables indépendantes $x_1 x_2, \dots, x_p$ aient des marches désignées sur des chemins désignés, de sorte qu'à aucun moment le *point* $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ne soit un point *singulier* des coefficients $a, b, \dots, l$ des équations (1). Admettons, en outre, que les coefficients $a, b, \dots, l$ soient uniformes dans les régions considérées, et par suite reprennent les mêmes valeurs, quand les variables indépendantes déterminent de nouveau le même *point* $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Nous avons vu qu'une solution du système d'équations (1) se compose de n fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$, *régulières* en tous les *points* $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ que l'on considère.

Si les variables reviennent en même temps à leurs valeurs primitives, les intégrales $y_1, y_2, \dots, y_n$ auront pris des valeurs nouvelles, diffé-

Digitized by Google

rentes ou non des anciennes. Nous nous proposons d'étudier les relations qui lient ces deux groupes de valeurs des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

17. Représentons par y_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$ un élément quelconque d'un système fondamental de solutions des équations (1), et considérons les éléments de ce système lorsque les variables, ayant d'abord des valeurs initiales $x_1, x_2, \ldots, x_p$, décrivent des chemins fermés et reviennent ensemble à leurs valeurs initiales. Ces éléments partiront des valeurs initiales y_{ik}, et prendront à la fin des valeurs nouvelles que nous représenterons par Y_{ik}. Si l'on considère les fonctions qui, dans le mouvement des variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, partent d'abord des valeurs Y_{ik}, on sait qu'on peut les exprimer linéairement au moyen des fonctions y_{ik}.

Donc, *si les variables indépendantes reviennent ensemble à leurs valeurs initiales, les nouvelles valeurs* Y_{ik} *des éléments d'un système fondamental de solutions sont liées aux anciennes* y_{ik} *par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$(5) \qquad Y_{ik} = C_{k1} y_{i1} + \ldots + C_{kn} y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le déterminant des constantes est différent de zéro; car les fonctions Y_{ik} forment un système fondamental, et il faut qu'on puisse exprimer les fonctions y_{ik} au moyen des fonctions Y_{ik}.

18. Nous allons maintenant déterminer les formes les plus simples que l'on puisse donner aux relations (5). Nous montrerons d'abord qu'on peut déterminer des constantes $g_1, g_2, \ldots, g_n$, telles que les fonctions

$$u_i = g_1 y_{i1} + \ldots + g_n y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

prennent, après un tour des variables, des valeurs nouvelles $U_1, U_2, \ldots, U_n$ liées aux premières valeurs par des relations de la forme

$$U_i = \omega u_i,$$

où ω représente une constante. Chaque élément de la solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des équations (1) se reproduira donc multiplié par une constante ω, la même pour tous les éléments de la solution.

Digitized by Google

Il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} U_i &= g_1 Y_{i1} + \ldots + g_n Y_{in} \\ &= (C_{11} g_1 + \ldots + C_{n1} g_n) y_{i1} + \ldots + (C_{1n} g_1 + \ldots + C_{nn} g_n) y_{in}. \end{aligned}$$

Identifions cette expression avec

$$U_i = \omega u_i = \omega g_1 y_{i1} + \ldots + \omega g_n y_{in},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} &(C_{11} - \omega) g_1 + \ldots + C_{n1} g_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &C_{1n} g_1 + \ldots + (C_{nn} - \omega) g_n = 0. \end{aligned}$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que ω vérifie l'équation

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} C_{11} - \omega & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} - \omega & \ldots & C_{n2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donnera n valeurs de ω, distinctes ou non. Chacune des racines distinctes permettra de déterminer des valeurs proportionnelles de $g_1, g_2, \ldots, g_n$, et par suite de former des solutions dont les éléments se reproduisent multipliés par un facteur constant.

19. Nous donnerons à l'équation en ω le nom d'*équation fondamentale*. Les racines de cette équation ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions. Pour le démontrer, nous suivrons la marche donnée par M. Hamburger (1).

Représentons par y_{ik} et η_{ik} les éléments de deux systèmes fondamentaux de solutions, et soient Y_{ik} et H_{ik} les nouvelles valeurs de ces éléments. Nous devrons avoir les deux systèmes de relations à coefficients constants

$$\begin{aligned} Y_{ik} &= l_{k1} y_{i1} + \ldots + l_{kn} y_{in}, \\ H_{ik} &= \lambda_{k1} \eta_{i1} + \ldots + \lambda_{kn} \eta_{in}, \\ &(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 76, p. 115.

Digitized by Google

et les équations fondamentales correspondantes seront

$$P(\omega)=\begin{vmatrix} l_{11}-\omega & \dots & l_{n1} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ l_{1n} & \dots & l_{nn}-\omega \end{vmatrix}=0,$$

$$\Pi(\omega)=\begin{vmatrix} \lambda_{11}-\omega & \dots & \lambda_{n1} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1n} & \dots & \lambda_{nn}-\omega \end{vmatrix}=0.$$

Les déterminants $P(o)$ et $\Pi(o)$ ne seront pas nuls, si l'on suppose que les systèmes de solutions sont fondamentaux.

Exprimons les éléments η_{ik} en fonction des éléments y_{ik}. Les relations sont à coefficients constants et de la forme

$$\eta_{ik}=C_{k1}y_{i2}+\dots+C_{kn}y_{in},$$

et nous en tirons

$$H_{ik}=C_{k1}Y_{i1}+\dots+C_{kn}y_{in}.$$

Il résulte de là, en développant les deux expressions de H_{ik},

$$H_{ik}=(C_{k1}l_{11}+\dots+C_{kn}l_{n1})y_{i1}+\dots+(C_{k1}l_{1n}+\dots+C_{kn}l_{nn})y_{in},$$
$$H_{ik}=(\lambda_{k1}C_{11}+\dots+\lambda_{kn}C_{n1})y_{i1}+\dots+(\lambda_{k1}C_{1n}+\dots+\lambda_{kn}C_{nn})y_{in}.$$

En identifiant les coefficients des mêmes éléments, on a

$$C_{k1}l_{1i}+\dots+C_{kn}l_{ni}=\lambda_{k1}C_{1i}+\dots+\lambda_{kn}C_{ni}=a_{k,i}.$$

Cela posé, appelons Q le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix},$$

et, puisque ce déterminant est différent de zéro, formons les produits $Q.P(\omega)$ et $\Pi(\omega).Q$, nous aurons identiquement

$$Q.P(\omega)=\Pi(\omega)Q=\begin{vmatrix} a_{11}-C_{11}\omega & \dots & a_{1n}-C_{1n}\omega \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{1n}-C_{n1}\omega & \dots & a_{nn}-C_{nn}\omega \end{vmatrix}=R(\omega),$$

c'est-à-dire que les équations $P(\omega)=0$, $\Pi(\omega)=0$ ont les mêmes coefficients et par suite les mêmes racines.

Digitized by Google

20. Nous venons de voir qu'on peut choisir un certain nombre de solutions telles que les relations entre les anciennes et les nouvelles valeurs prennent une forme simple. Supposons que l'équation en ω ait n racines distinctes, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Il existera n^2 fonctions u_{ik}, telles que l'on ait

$$U_{ik} = \omega_k u_{ik}.$$

Ces fonctions u_{ik} forment un système fondamental de solutions. On peut le démontrer directement, mais cela ressort de l'étude plus générale que nous allons faire.

21. Nous nous proposons de montrer qu'à toute racine ω, d'un ordre de multiplicité μ, de l'équation fondamentale, se rattache un groupe de μ solutions dont les éléments se comportent simplement dans le mouvement des variables indépendantes, et que, si l'équation en ω a s racines distinctes, on peut former, au moyen de s groupes, un système fondamental de solutions.

Nous démontrerons d'abord que si, pour une valeur de ω, tous les déterminants mineurs de $P(\omega)$ sont nuls jusqu'à ceux du degré $\nu - 1$ exclusivement, il en est de même dans $\Pi(\omega)$.

Représentons les mineurs du degré ν de P, Π, Q, R par $p_{\gamma\delta}$, $\pi_{\gamma\delta}$, $q_{\gamma\delta}$, $r_{\gamma\delta}$, γ et δ désignant deux combinaisons quelconques des nombres 1, 2, ..., n pris ν à ν. (BALTZER.)

Le nombre de ces combinaisons est $c = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2\ldots\nu}$.

Les relations $R = Q.P(\omega) = \Pi(\omega).Q$ entraînent les relations

$$r_{\gamma\delta} = q_{\gamma 1} p_{\delta 1} + \ldots + q_{\gamma c} p_{\delta c} = \pi_{\gamma 1} q_{\delta 1} + \ldots + \pi_{\gamma c} q_{\delta c}$$

(CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*, XVII^e Cahier).

Si tous les déterminants $p_{\gamma\delta}$ s'annulent, on aura $r_{\gamma\delta} = 0$ pour toutes les valeurs qu'on peut donner à γ et à δ, et, par suite, on obtiendra le système d'équations

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma 1} q_{11} + \ldots + \pi_{\gamma c} q_{1c} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ \pi_{\gamma 1} q_{c1} + \ldots + \pi_{\gamma c} q_{cc} &= 0. \end{aligned}$$

Mais le déterminant $\Sigma q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{cc}$ est une puissance de Q (FRANKE, *Journal de Crelle*, Bd. 61, p. 350), et n'est pas nul; tous les déterminants

Digitized by Google

nants $\pi_{\gamma 1}, \ldots, \pi_{\gamma c}$ doivent être nuls séparément et pour toutes les valeurs qu'on peut donner à γ.

Tous les déterminants du degré $\nu - 1$ dans $\Pi(\omega)$ ne sont pas nuls, sans quoi on pourrait démontrer que ceux du degré $\nu - 1$ dans $P(\omega)$ sont tous nuls, ce que nous ne supposons pas.

22. Considérons maintenant les deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned} l_{11} g_1 + \ldots + l_{n1} g_1 &= \omega g_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_{1n} g_1 + \ldots + l_{nn} g_n &= \omega g_n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_{11} g_1 + \ldots + \lambda_{n1} g_1 &= \omega g_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{1n} g_1 + \ldots + \lambda_{nn} g_n &= \omega g_n, \end{aligned}$$

et supposons que les conditions équivalentes $P(\omega) = 0$ et $\Pi(\omega) = 0$ soient satisfaites. Il y aura autant d'équations qui dépendront des autres dans le premier système que dans le second. Car la condition nécessaire et suffisante pour que $n - \nu + 1$ équations d'un système, et seulement ce nombre, dépendent des autres, est que tous les déterminants mineurs s'annulent jusqu'à ceux du degré ν inclusivement, condition satisfaite de la même manière dans les deux systèmes précédents.

Considérons alors le seul système en $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{nn}$, et supposons $P(\omega_1) = 0$. Le nombre des équations qui dépendent des autres est indépendant du système fondamental de solutions. Soit ν le nombre de ces équations.

On peut exprimer $g_1, g_2, \ldots, g_n$ en fonctions linéaires et homogènes de ν constantes arbitraires. Par suite, toutes les solutions

$$u_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui satisfont aux relations $U_{ik} = \omega_1 u_{ik}$ seront composées de fonctions linéaires et homogènes des éléments de ν d'entre elles, linéairement indépendantes. Soient $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i\nu}$ ces ν solutions; substituons-les aux solutions $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{i\nu}$ du système fondamental primitif. Nous aurons le système

$$\begin{aligned} u_{ih} \quad & (h = 1, 2, \ldots, \nu), \\ y_{ik} \quad & (k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

Digitized by Google

qu'on peut supposer fondamental. En effet, pour former les ν solutions $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ linéairement indépendantes, on prendra arbitrairement les valeurs de ν désignées des quantités $g_1, g_2, \ldots, g_n$. On peut supposer que ces quantités sont $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$, et, les ν systèmes de valeurs de ces quantités $g_{1j}, g_{2j}, \ldots, g_{\nu j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$ devant être tels que leur déterminant ne soit pas nul, on pourra substituer, quelles que soient les valeurs que l'on calcule pour $g_{\nu+1}, g_{\nu+2}, \ldots, g_n$, le système u_{ih}, y_{ik} au système primitif, sans que le nouveau système cesse d'être fondamental.

On a maintenant les relations

$$(a)\quad \begin{cases} U_{i1} = \omega_1 u_{i1}, \\ U_{i\nu} = \omega_1 u_{i\nu}, \\ Y_{i,\nu+1} = l'_{\nu+1,1} u_{i1} + \ldots + l'_{\nu+1,\nu} u_{i\nu} + l'_{\nu+1,\nu+1} y_{i,\nu+1} + \ldots + l'_{\nu+1,n} y_{in}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{in} = l'_{n1} u_{i1} + \ldots + l'_{n\nu} u_{i\nu} + l'_{n,\nu+1} y_{i,\nu+1} + \ldots + l'_{nn} y_{in}, \end{cases}$$

et l'équation fondamentale prend la forme

$$P(\omega) = (\omega - \omega_1)^\nu P'(\omega) = 0,$$

en posant

$$P'(\omega) = \begin{vmatrix} l'_{\nu+1,\nu+1} - \omega & \ldots & l'_{n,\nu+1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l'_{\nu+1,n} & \ldots & l'_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

L'équation $(\omega - \omega_1)^\nu P'(\omega) = 0$ a les mêmes coefficients que l'équation fondamentale primitive.

Soit μ le degré de multiplicité de la racine ω_1. Deux cas se présenteront. On pourra avoir $\mu = \nu$. Alors $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ seront toutes les solutions distinctes correspondant à la racine ω_1; nous dirons qu'elles forment ν solutions simples, en appelant *solution simple* toute solution dont les éléments se reproduisent multipliés par un facteur constant.

On pourra avoir $\mu > \nu$; alors ω_1 sera racine de $P'(\omega) = 0$. Représentons par $g'_{\nu+1}, g'_{\nu+2}, \ldots, g'_n$ les inconnues du système d'équations

$$\begin{aligned} g'_{\nu+1} l'_{\nu+1,\nu+1} + \ldots + g'_n l'_{n,\nu+1} &= g'_{\nu+1} \omega_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g'_{\nu+1} l'_{\nu+1,n} + \ldots + g'_n l'_{n,n} &= g'_n \omega_1. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Considérons la solution des équations (1)

$$v_i = g'_{\nu+1} y_{i,\nu+1} + \ldots + g'_n y_{in}.$$

Elle est linéairement indépendante des solutions $u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i\nu}$, puisque les solutions u_{ik}, y_{ik} forment un système fondamental. Multiplions les dernières équations (a) par $g'_{\nu+1}, \ldots, g'_n$, ajoutons les résultats, nous aurons les relations

$$V_i = \omega_1 v_i + \varphi_i(u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}),$$

où φ_i est la caractéristique d'une fonction linéaire et homogène des éléments $u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}$ des ν premières solutions; φ_i satisfait, comme ces éléments eux-mêmes, à la relation

$$\Phi_i = \omega_1 \varphi_i.$$

S'il y a, dans le système d'équations en $g'_{\nu+1}, \ldots, g'_n$, ν' équations qui dépendent des autres, il existera ν' solutions $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{i\nu'}$ linéairement indépendantes, et telles que l'on ait

$$V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + \varphi_{ik}(u_{i1}, \ldots, u_{in}) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu').$$

Toutes les solutions satisfaisant aux mêmes relations s'exprimeront de plus linéairement au moyen de fonctions homogènes de

$$u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}, v_{i2}, \ldots, v_{i\nu'}.$$

Il ne peut y avoir entre $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{i\nu'}$ aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, sans quoi l'on pourrait former une fonction linéaire et homogène avec $v_{i1}, \ldots, v_{i\nu'}$ satisfaisant à la relation $U_{ik} = \omega_1 u_{ik}$, et le nombre des solutions distinctes correspondant à cette relation serait plus grand que ν, ce qui est contraire à l'hypothèse. De là résulte que ν' est au plus égal à ν, puisque, entre $\nu + 1$ fonction φ_i, il existe nécessairement une relation linéaire et homogène.

Deux nouveaux cas peuvent maintenant se présenter. Soit $\nu + \nu' = \mu$. On peut former μ solutions correspondant à la racine ω_1 de la manière suivante.

Digitized by Google

Prenons d'abord les $2\nu'$ solutions

$$\begin{aligned} &v_{i1},\ \varphi_{i1},\\ &v_{i2},\ \varphi_{i2},\\ &\dots\dots,\\ &v_{i\nu'},\ \varphi_{i\nu'}, \end{aligned}$$

qui sont associées deux à deux de manière à satisfaire aux relations

$$V_{ik}=\omega_1 v_{ik}+\varphi_{ik},\quad \Phi_{ik}=\omega_1\varphi_{ik},$$

puis prenons $\nu-\nu'$ autres solutions *simples*, dont les éléments soient des fonctions linéaires et homogènes de $u_{i1},\dots,u_{i\nu}$ n'ayant aucune relation linéaire et homogène entre elles, ou avec $\varphi_{i1},\dots,\varphi_{i\nu'}$.

Sans nuire à la généralité, on peut représenter les solutions $\varphi_{i1}\dots,\varphi_{i\nu'}$ par $u_{i1},\dots,u_{i\nu'}$ et les $\nu-\nu'$ autres solutions simples par $u_{i,\nu'+1},\dots,u_{i\nu}$, et l'on obtient ainsi les $\nu+\nu'$ solutions

$$\begin{aligned} &u_{i1},\ \dots,\ u_{i\nu'},\ u_{i\nu'+1},\ \dots,\ u_{i\nu},\\ &v_{i1},\ \dots,\ v_{i\nu'}. \end{aligned}$$

Nous dirons que les deux solutions u_{ik}, v_{ik}, qui sont associées pour satisfaire aux relations

$$V_{ik}=\omega_1 v_{ik}+u_{ik},\quad U_{ik}=\omega_1 u_{ik}$$

forment un groupe binaire. Les $\nu+\nu'$ solutions se composent alors de ν' groupes binaires et de $\nu-\nu'$ solutions simples.

Soient $\nu+\nu'<\mu$. On peut substituer aux solutions $y_{i,\nu+1},\dots,y_{i,\nu+\nu}$ les solutions $v_{i1}, v_{i2},\dots,v_{i\nu}$, et on aura, entre les éléments du nouveau système de solutions, qu'on peut supposer fondamental, les relations

$$(b)\qquad \begin{cases} U_{if}=\omega_1 u_{if}\quad (f=1,2,\dots,\nu),\\ V_{ih}=\omega_1 v_{ih}+u_{ih}\quad (h=1,2,\dots,\nu'),\\ Y_{ik}=\Gamma_{k1}u_{i1}+\dots+\Gamma_{k\nu}u_{i\nu}+\Gamma_{k,\nu+1}v_{i1}+\dots+\Gamma_{k,\nu+\nu'}v_{i\nu'}\\ \qquad\quad +\Gamma_{k,\nu+\nu'+1}y_{\nu+\nu'+1}+\dots+\Gamma_{kn}y_n\quad (k=\nu+\nu'+1,\dots,n). \end{cases}$$

L'équation fondamentale prend la forme

$$P(\omega)=(\omega-\omega_1)^{\nu+\nu'}P''(\omega)=0,$$

Digitized by Google

en posant

$$P''_{(\omega)} = \begin{vmatrix} l''_{\nu+\nu'+1,\nu+\nu'+1} - \omega & \dots & l''_{n,\nu+\nu'+1} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ l''_{\nu+\nu'+1,n} & \dots & l''_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

Puisqu'on a $\nu + \nu' < \mu$, ω_1 est encore racine de $P''(\omega) = 0$, et on peut déterminer des quantités $g''_{\nu+\nu'+1}, \dots, g''_n$ par les relations

$$\begin{aligned} g''_{\nu+\nu'+1} l''_{\nu+\nu'+1,\nu+\nu'+1} + \dots + g''_n l''_{n,\nu+\nu'+1} &= g''_{\nu+\nu'+1}\omega_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g''_{\nu+\nu'+1} l''_{\nu+\nu'+1,n} + \dots + g''_n l''_{nn} &= g''_n \omega_1. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie les dernières équations (b) par $g''_{\nu+\nu'+1}, \dots, g''_n$, on voit que la solution

$$w_i = g''_{\nu+\nu'+1} y_{i,\nu+\nu'+1} + \dots + g''_n y_{in}$$

satisfait aux relations

$$W_i = \omega_1 w_i + \Psi_i(u_{i1}, \dots, u_{i\nu}, v_{i1}, \dots, v_{i\nu'}),$$

en représentant par Ψ_i une fonction linéaire et homogène à coefficients constants. La solution w_i est linéairement indépendante des solutions u_{if}, v_{ih}.

S'il y a dans le système d'équations en $g''_{\nu+\nu'+1}, \dots, g''_n$, ν'' équations qui dépendent des autres, il y aura ν'' solutions $w_{i1}, \dots, w_{i\nu''}$ linéairement indépendantes et satisfaisant aux relations

$$W_{ik} = \omega_1 v_{ik} + \psi_{ik}(u_{i1}, \dots, u_{i\nu}, v_{i1}, \dots, v_{i\nu'}) \quad (k = 1, 2, \dots, \nu'').$$

Toute solution satisfaisant à des relations analogues pourra s'exprimer en fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \dots, w_{i\nu''}, v_{i1}, \dots, v_{i\nu'}, u_{i1}, \dots, u_{i\nu}$. Entre les fonctions $\Psi_{i1}, \dots, \Psi_{i\nu''}$, il ne peut exister aucune relation de la forme

$$a\psi_{i1} + \dots + l\psi_{i\nu''} = f(u_{i1}, \dots, u_{i\nu}),$$

où f représente une fonction linéaire et homogène à coefficients constants, car il existerait une fonction linéaire et homogène de $w_{i1}, \dots, w_{i\nu''}$ qui, n'étant pas une expression linéaire des solutions u_{if} et v_{ih}, jouirait des propriétés des éléments v_{ih}, ce qui est impossible à cause des hypothèses. De là résulte que ν'' est au plus égal à ν', puisque, par

Digitized by Google

l'élimination de $v_{i1}, \ldots, v_{i\nu'}$ des expressions v_{ik}, on pourrait former une relation

$$a\psi_{i1} + \ldots + l\psi_{i\nu''} = f(u_{i1}, \ldots, u_{i\nu}).$$

Soit $\nu + \nu' + \nu'' = \mu$. Représentons les fonctions $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{i\nu''}$ par $v_{i1}, \ldots, v_{i\nu''}$, et prenons $\nu' - \nu''$ solutions $v_{ik}(k = \nu' + 1, \ldots, \nu'')$, n'ayant aucune relation linéaire et homogène entre elles, ou avec $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{i\nu''}$. Nous pourrons former μ solutions correspondant à la racine ω, de la manière suivante.

Prenons d'abord les $3\nu''$ solutions

$$\begin{array}{ccc} w_{i1}, & v_{i1}, & u_{i1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ w_{i\nu''}, & v_{i\nu''}, & u_{i\nu''}, \end{array}$$

qui sont associées trois par trois, de manière à satisfaire aux relations

$$W_{ik} = \omega_1 w_{ik} + v_{ik}, \quad V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik}.$$

Prenons ensuite les $2(\nu' - \nu'')$ solutions

$$\begin{array}{cc} v_{i,\nu''+1}, & u_{i,\nu''+1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ v_{i\nu'}, & u_{i\nu'}, \end{array}$$

qui sont associées deux par deux, de manière à satisfaire aux relations

$$V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik}.$$

Enfin prenons $\nu - \nu'$ solutions simples $u_{i\nu'+1} \ldots, u_{i\nu}$. Nous dirons que les trois solutions w_{ik}, v_{ik}, u_{ik}, associées de manière à satisfaire aux relations

$$W_{ik} = \omega_1 w_{ik} + v_{ik}, \quad V_{ik} = \omega_1 v_{ik} + u_{ik}, \quad U_{ik} = \omega_1 u_{ik},$$

forment un groupe ternaire. Les $\nu + \nu' + \nu'' = \mu$ solutions se composent de ν'' groupes ternaires, de $\nu' - \nu''$ groupes binaires, et de $\nu - \nu'$ solutions simples.

Le raisonnement s'appliquera tant que la somme des nombres ν n'atteindra pas μ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit ω_1 une racine de l'équation fondamentale $P(\omega) = 0$. Soit μ son degré de multiplicité. Déduisons successivement, de la manière qu'on vient

Digitized by Google

de voir, des systèmes d'équations linéaires et homogènes les uns des autres. Soit ν le nombre des équations qui dépendent des autres dans l'un de ce système. Quel que soit le système fondamental de solutions d'où l'on parte :

1° *Le calcul donnera une suite de nombres ν, ν', ..., $\nu^{(\lambda)}$, dont la somme atteindra μ, et chacun d'eux sera au plus égal au précédent ;*

2° *On pourra former μ solutions correspondant à la racine ω_1, ces solutions s'associant entre elles de manière à former :*

$$\begin{aligned}
&\nu^{(\lambda)} \text{ groupes de } \lambda+1 \text{ solutions},\\
&\nu^{(\lambda-1)}-\nu^{\lambda} \text{ groupes de } \lambda \text{ solutions},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\nu'-\nu'' \text{ groupes de } 2 \text{ solutions},
\end{aligned}$$

et enfin

$$\nu-\nu' \text{ solutions simples};$$

3° *Pour un groupe renfermant m solutions, on aura les relations*

$$Y_{i1}=\omega_1 y_{i1},\quad Y_{i2}=\omega_1 y_{i2}+y_{i1},\quad \dots,\quad Y_{im}=\omega_1 y_{im}+y_{i,m-1}.$$

On voit bien que le nombre des solutions est μ, car l'on a identiquement

$$(\lambda+1)\nu^{(\lambda)}+\lambda(\nu^{(\lambda-1)}-\nu^{(\lambda)})+\dots+3(\nu''-\nu''')+2(\nu'-\nu'')+\nu-\nu'=\mu.$$

23. En épuisant le degré μ de la racine ω_1, on pourra former un système fondamental de solutions

$$\begin{aligned}
&u_{ih}\quad (h=1,2,\dots,\mu),\\
&y_{ik}\quad (k=\mu+1,\mu+2,\dots,n),
\end{aligned}$$

satisfaisant à des relations de la forme

$$\begin{aligned}
U_{ih}&=\omega_{h1}u_{i2}+\omega_{h2}u_{i2}+\dots+\omega_{h,h-1}u_{i,h-1}+\omega_1 u_{ih},\\
Y_{ik}&=G_{k1}u_{i1}+\dots+G_{k\mu}u_{i\mu}+G_{k,\mu+1}y_{i,\mu+1}+\dots+G_{kn}y_{in},
\end{aligned}$$

les quantités ω étant des constantes, qui peuvent être nulles à l'exception de ω_1.

L'équation en ω prend la forme

$$P(\omega)=(\omega-\omega_1)^{\mu}P^{(\mu)}(\omega)=0,$$

Digitized by Google

en posant

$$P^{(\mu)}(\omega) = \begin{vmatrix} G_{\mu+1,\mu+1} - \omega & \dots & G_{n,\mu+1} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ G_{\mu+1,n} & \dots & G_{nn} - \omega \end{vmatrix}.$$

L'équation $P^{(\mu)}(\omega) = 0$ a pour racines les racines $\omega_2, \omega_3, \dots$ de l'équation $P(\omega) = 0$ distinctes de ω_1, et chacune au même degré de multiplicité que $P(\omega) = 0$. Posons alors

$$u_{i,\mu+1} = m_1 u_{i1} + \dots + m_n y_{in},$$

et déterminons $m_1, m_2, \dots, m_n$ par les conditions

$$\begin{aligned}
(\omega_1 - \omega_2) m_1 + \omega_{21} m_2 + \dots + G_{\mu+1,1} m_{\mu+1} \quad & + \dots + G_{n1} m_n = 0, \\
(\omega_1 - \omega_2) m_2 + \dots + G_{\mu+1,2} m_{\mu+1} \quad & + \dots + G_{n2} m_n = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots, \\
(G_{\mu+1,\mu+1} - \omega_2) m_{\mu+1} + \dots + G_{n,\mu+1} m_n & = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots, \\
G_{\mu+1,n} m_{\mu+1} \quad & + \dots + (G_{nn} - \omega_2) m_n = 0.
\end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, on déterminera d'abord les valeurs proportionnelles de $m_{\mu+1}, \dots, m_n$, et l'on calculera ensuite et successivement $m_\mu, m_{\mu-1}, \dots, m_1$.

Si ρ des équations en $m_{\mu+1}, \dots, m_n$ dépendent des autres, on pourra former ρ solutions $u_{i,\mu+1}, \dots, u_{i,\mu+\rho}$ linéairement indépendantes, satisfaisant aux relations

$$U_{i,\mu+k} = \omega_2 u_{i,\mu+k} \quad (k = 1, 2, \dots, \rho).$$

Au moyen de ces solutions, on pourra former un système fondamental de solutions

$$\begin{aligned}
& u_{ih} \quad (h = 1, 2, \dots, \mu + \rho), \\
& y_{ik} \quad (k = \mu + \rho + 1, \dots, n),
\end{aligned}$$

dans lequel les solutions u_{ih} seront particularisées.

En partant de ce système fondamental, et par des raisonnements analogues aux précédents, on pourra former des systèmes fondamentaux de plus en plus particuliers.

Digitized by Google

Donc, *soient* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ *toutes les racines distinctes de l'équation fondamentale, et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *leurs degrés respectifs de multiplicité, on pourra former un système fondamental de solutions des équations* (1) *au moyen de s groupes de solutions, renfermant respectivement* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *solutions, chacun de ces s groupes correspondant à une racine distincte de l'équation fondamentale, et se décomposant en sous-groupes satisfaisant au premier théorème.*

24. Revenons à la théorie générale. Nous savons que les éléments d'un système fondamental de solutions des équations (1) à coefficients uniformes prennent des valeurs nouvelles, liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, lorsque les variables décrivent des chemins fermés, et reviennent ensemble à leurs valeurs initiales. Cette propriété est caractéristique de ces éléments.

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro de n^2 fonctions $y_{ik}(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$, de p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *régulières en tous les points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, sauf en des *points singuliers*, lorsque les variables indépendantes restent dans des régions respectives du plan à contours simples. Supposons que les variables décrivent des chemins fermés tels qu'à aucun moment le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ne soit un point *singulier*, et reviennent ensemble à leurs valeurs initiales. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants, telles que les relations (5), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations de la forme (1), dont les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont uniformes, et n'ont pas d'autres points *singuliers* que les points *singuliers* des fonctions.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (1) auquel satisfassent les n solutions $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Nous aurons, en général, en représentant par $g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in}$ les coefficients de l'une quelconque des équations aux dérivées partielles, les relations

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_h} = g_{i1}y_{1k} + \ldots + g_{in}y_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Digitized by Google

Nous tirons de ces relations

$$\mathrm{D}.g_{ip}=\begin{vmatrix} y_{11} & \dots & \dfrac{\partial y_{i1}}{\partial x_h} & \dots & y_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & \dots & \dfrac{\partial y_{in}}{\partial x_h} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

ce qui permettra de calculer tous les coefficients $a, b, \dots, l$ des équations (1), puisque D est supposé différent de zéro.

Les conditions d'intégrabilité seront identiquement satisfaites. En effet, supposons calculées les fonctions $a, b, \dots, l$, nous aurons identiquement

$$\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_h}=g_{i1}y_{1k}+\dots+g_{in}y_{1n}.$$

Les fonctions y_{ik} satisfont donc identiquement aux relations

$$dy_{ik}=(a_{i1}y_{1k}+\dots+a_{in}y_{nk})dx_1+\dots+(l_{i1}y_{1k}+\dots+l_{in}y_{nk})dx_p$$
$$(i=1,2,\dots,n;\quad k=1,2,\dots,n),$$

et, dans les seconds membres, les conditions d'intégrabilité doivent être satisfaites. L'une de ces conditions est

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(a_{11}y_{1k}+\dots+a_{1n}y_{nk})=\frac{\partial}{\partial x_1}(b_{11}y_{1k}+\dots+b_{1n}y_{nk})$$

ou

$$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}-\frac{\partial b_{11}}{\partial x_1}\right)y_{1k}+\dots+\left(\frac{\partial a_{1n}}{\partial x_2}-\frac{\partial b_{1n}}{dx_1}\right)y_{nk}$$
$$=b_{11}\frac{\partial y_{1k}}{\partial x_1}-a_{11}\frac{\partial y_{1k}}{\partial x_2}+\dots+b_{1n}\frac{\partial y_{nk}}{\partial x_1}-a_{1n}\frac{\partial y_{nk}}{\partial x_2}.$$

Éliminons les dérivées partielles $\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial y_{ik}}{\partial x_2}$, nous aurons une relation de la forme

$$\mathrm{A}_1y_{1k}+\dots+\mathrm{A}_ny_{nk}=0,$$

où $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$ sont des fonctions exprimées au moyen des coeffi-

Digitized by Google

cients a, b, ..., l et de leurs dérivées partielles. La relation précédente est vraie pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On a donc

$$A_1 y_{11} + \ldots + A_n y_{n1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_1 y_{1n} + \ldots + A_n y_{nn} = 0.$$

Or le déterminant D est différent de zéro; on doit donc avoir $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$ identiquement, c'est-à-dire que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites identiquement dans le système d'équations (1), que l'on a construit.

Les coefficients a, b, ..., l sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées partielles des fonctions y_{ik}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (5), quand les variables indépendantes ont décrit leurs chemins fermés. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant de constantes. Donc le rapport ne change pas, et par suite les coefficients a, b, ..., l sont des fonctions uniformes.

Il résulte du calcul des coefficients a, b, ..., l qu'ils ne peuvent avoir d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ik} elles-mêmes.

Enfin, le déterminant D étant différent de zéro, les fonctions y_{ik} forment un système fondamental de solutions du système d'équations aux différentielles totales que l'on a obtenu.

25. Prenons pour exemple, comme le fait M. Tannery, dans le cas d'une seule variable indépendante, une équation algébrique $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$, rationnelle et entière, du degré n en y. Cette équation définit n fonctions $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ qui sont régulières en tous les *points* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ du plan, sauf en des *points* où deux des racines deviennent égales. Si les variables décrivent des chemins fermés, ces n fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes

Digitized by Google

par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants. En effet, en un *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, l'une de ces fonctions doit rester la même, ou être remplacée par l'une des autres, quand les variables sont revenues ensemble au *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, après avoir décrit des chemins fermés. Cela résulte de ce que l'équation algébrique ne peut fournir que n fonctions y différentes. Les fonctions $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$ sont donc liées par les relations de la forme (5) les plus simples.

Les dérivées de ces fonctions par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes seront des fonctions satisfaisant aux mêmes conditions que ces fonctions elles-mêmes. Représentons ces dérivées par $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$.

Les dérivées des fonctions $y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n}$ par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes sont encore des fonctions jouissant des mêmes propriétés que les fonctions $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}$.

On pourra répéter cette conclusion à chaque dérivation par rapport à l'une quelconque des variables indépendantes. Posons alors

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}, \\ y_3 &= \frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots \partial x_\omega}, \end{aligned}$$

en laissant indéterminés les indices des dérivations successives. Déterminons y par la relation algébrique rationnelle et entière

$$f(y, x_1, x_2 \ldots, x_p) = 0,$$

du degré n en y. Les n^2 fonctions que l'on obtient ainsi satisfont à un système d'équations tel que (1), lorsque leur déterminant n'est pas nul.

26. Formons ce système dans le cas où le coefficient de y^n dans $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ est l'unité.

Digitized by Google

On a, par définition,

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_p} dx_p \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Formons séparément chaque coefficient $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$.

Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$ le résultat de l'élimination de y_1 entre les deux équations

$$f(y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0.$$

On aura identiquement

$$\varphi = \mathrm{A} f + \mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

A et B étant deux polynômes entiers et rationnels en $y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p$, de degrés respectifs au plus $n-2$ et $n-1$ par rapport à y_1. Nous avons donc identiquement

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} = - \frac{\mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}}{\mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial y_1}} = - \frac{\mathrm{B} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}}{\varphi}.$$

Au moyen de l'équation

$$f(y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0,$$

on peut réduire les puissances supérieures de y_1 au plus à l'exposant $n-1$, et l'on aura

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} = \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi},$$

P_1 étant un polynôme entier et rationnel en $y_1, x_1, x_2, \ldots, x_p$ contenant y_1 au plus au degré $n-1$.

On aura ensuite

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\mathrm{P}_1}{\varphi} = \frac{\mathrm{P}_2}{\varphi^2},$$

P_2 étant un polynôme de même nature que P_1.

Digitized by Google

On aura des résultats analogues pour les dérivées partielles successives de y_1, et l'on pourra poser

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{P_{ik}}{\varphi^i},$$

P_{ik} étant un polynôme de même nature que P_1 et P_2.

Mais les définitions donnent les relations

$$y_2 = \frac{P_1}{\varphi}, \quad y_3 = \frac{P_2}{\varphi^2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{P_{n-1}}{\varphi^{n-1}};$$

on a donc n équations, entre lesquelles on peut éliminer $y_1^0, y_1^2, \ldots, y_1^{n-1}$, c'est-à-dire $n-1$ quantités.

Le résultat de l'élimination est de la forme

$$Q_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} + Q_1 y_1 + \ldots + Q_n y_n = 0,$$

ce qui montre que $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ est de la forme $g_1 y_1 + \ldots + g_n y_n$ des coefficients différentiels des équations (1).

On voit ici immédiatement que g_i est une fonction uniforme, comme fonction rationnelle de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

CHAPITRE III.

---

27. Appliquons les résultats obtenus dans les deux Chapitres précédents aux systèmes d'équations à une seule variable indépendante.

Dans le cas général, nous avons fait varier les variables indépendantes de sorte que, pour aucun groupe de valeurs de ces variables, on n'obtienne un point singulier des coefficients $a, b, \ldots, l$. Cela nous a amené à désigner non seulement les chemins tracés par les variables,

Digitized by Google

mais encore les marches suivies par les variables. Nous n'aurons plus maintenant qu'une seule variable indépendante; il suffira, quelle que soit la marche choisie pour elle, que cette variable suive un chemin ne contenant aucun point singulier.

Les systèmes d'équations qui nous occuperont maintenant peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Nous supposerons que les coefficients a_{ik} sont des fonctions uniformes dans une portion du plan limitée par un contour simple, ou même dans tout le plan, et continues en tous les points de cette région, sauf en des points singuliers isolés. La variation continue de x, d'un point x_1 à un point X, sur un chemin qui ne passe par aucun point singulier, détermine n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, uniformes dans toute région du plan qui ne contient aucun point singulier et continues en tous les points du chemin. Ces fonctions satisfont au système d'équations (6), et peuvent prendre au point x des valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ arbitrairement choisies.

Les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, qui sont égales à $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ pour $x = x_1$, forment une *solution*.

Le déterminant d'un *système fondamental de solutions* a pour expression

$$D = C e^{\int (a_{11} + \ldots + a_{nn})\, dx},$$

C étant une constante différente de zéro.

Si l'on fait tourner la variable autour d'un point singulier, les éléments d'un système fondamental de solutions prendront des valeurs nouvelles liées aux anciennes par les relations (5), linéaires et homogènes à coefficients constants, et le déterminant de ces coefficients sera différent de zéro.

Il existera, parmi les systèmes fondamentaux, un système dont les éléments auront une variation simple, lorsque la variable fera le tour d'un point singulier.

Soient n^2 fonctions y_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ de x continues, sauf en des points singuliers isolés, et uniformes dans toute

Digitized by Google

région du plan à contour simple ne renfermant aucun point singulier; si, lorsque la variable fait le tour d'un point singulier, les nouvelles valeurs Y_{ik} sont liées aux anciennes valeurs y_{ik} par les relations (5), et si le déterminant de ces fonctions ne s'annule qu'aux points singuliers, ces n^2 fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations différentielles tel que (6), à coefficients uniformes dans tout le plan.

23. On sait qu'on peut ramener à l'intégration d'un système d'équations de la forme (6) l'intégration de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + Q_n y.$$

Il suffit de poser

$$\frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$y = y_n;$$

on obtient le système d'équations

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = Q_1 y_1 + \ldots + Q_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

Réciproquement, le système (7) se ramène à l'équation différentielle par la substitution inverse.

Le déterminant d'un système de solutions du système d'équations (7) a la forme

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \dfrac{dy_1}{dx} & \ldots & \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_n & \dfrac{dy_n}{dx} & \ldots & \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

S'il est différent de zéro, les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement

Digitized by Google

indépendantes. On les appelle *intégrales de l'équation différentielle d'ordre n*, et l'ensemble de ces n intégrales forme un *système fondamental d'intégrales* de cette équation différentielle.

On a

$$D = Ce^{\int Q_1 dx},$$

C étant une constante.

Soient n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linéairement indépendantes. Si les nouvelles valeurs de ces fonctions, quand la variable a fait le tour d'un point singulier, sont liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$Y_i = C_{i1} y_1 + \ldots + C_{in} y_n,$$

ces fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle d'ordre n, linéaire et homogène, à coefficients uniformes.

29. Soit donné un système fondamental de solutions du système d'équations (6). Dans le voisinage d'un point singulier, les nouvelles valeurs Y_{ik} sont liées aux anciennes y_{ik} par les relations (5). Si les fonctions $y_{i1}, \ldots, y_{in}$ qui ont le premier indice commun ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, ces n fonctions forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle d'ordre n. S'il en est autrement, on peut ramener ces fonctions à être en moindre nombre, et celles qui resteront satisferont à une équation différentielle d'ordre moindre que n.

On voit ainsi que l'on peut obtenir séparément, par des équations différentielles linéaires et homogènes d'un ordre au plus égal à n, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui sont définies simultanément par le système (6). Ce résultat est bien connu.

30. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ m fonctions de x satisfaisant, pour un point situé à l'origine, aux conditions

$$\begin{aligned} Y_1 &= \omega y_1, \\ Y_2 &= \omega y_2 + y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m &= \omega y_m + y_{m-1}. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Posons $\frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}} = u$, de sorte que u augmente de 1 quand la variable x fait le tour de l'origine. Soit $f(u)$ une fonction entière du degré $m-1$ formée arbitrairement avec u et des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ uniformes dans le domaine de l'origine. On pourra donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes

$$\begin{aligned} y_m &= x^r f(u), \\ y_{m-1} &= x^r \omega \Delta f(u), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_{m-k} &= x^r \omega^k \Delta_k f(u), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_1 &= x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u), \end{aligned}$$

avec

$$f(u) = A_0 + A_1 u + \ldots + A_{m-1} u^{m-1},$$

en définissant dans ces expressions r par la relation $e^{2\pi r\sqrt{-1}} = \omega$, et en représentant par $\Delta_k f(u)$ la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u. On voit que $\Delta_{m-1} f(u) = 1.2\ldots(m-1)A_{m-1}$ ne contient pas u, et que y_1 est la seule des fonctions y qui ne contienne pas de logarithmes.

D'abord, les expressions précédentes satisfont aux relations imposées. En effet, on a

$$Y_{m-k} = x^r \omega^{k+1} \Delta_k f(u+1) = x^r \omega^{k+1} [\Delta_k f(u) + \Delta_{k+1} f(u)] = \omega y_{m-k} + y_{m-k-1}.$$

Ensuite, on peut toujours donner aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les formes précédentes. En effet, $y_1 x^{-r}$ est une fonction uniforme dans le domaine de l'origine, et on peut la représenter par $\omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u)$; on tire de là

$$y_1 = x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f(u).$$

On peut poser ensuite

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r z,$$

d'où

$$Y_2 = \omega^{m-1} x^r Z.$$

Si l'on veut satisfaire à la relation $Y_2 = \omega y_2 + y_1$, on posera

$$Z = z + \Delta_{m-1} f(u).$$

Digitized by Google

En représentant par $[\varphi]'$ ce que devient une expression φ, et remarquant que l'on a

$$\Delta_{m-1} f(u) = \Delta_{m-2} f(u+1) - \Delta_{m-2} f(u) = [\Delta_{m-2} f(u)]' - \Delta_{m-2} f(u),$$

on voit qu'on a

$$[z - \Delta_{m-2} f(u)]' = z - \Delta_{m-2} f(u);$$

$z - \Delta_{m-2} f(u)$ est donc une fonction uniforme de x.

Dans le domaine de l'origine, on peut poser simplement

$$z = \Delta_{m-2} f(u),$$

en réunissant cette fonction uniforme au terme indépendant de u dans $\Delta_{m-2} f(u)$.

On a ainsi

$$y_2 = \omega^{m-2} x^r \Delta_{m-2} f(u).$$

On remontera ainsi de proche en proche.

La suite des expressions précédentes montre que l'élément y_m, qui contient la plus haute puissance de $\log x$, renferme les m fonctions uniformes de x dans le domaine de l'origine, qui entrent dans le groupe des expressions $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Les relations entre les coefficients des puissances de u dans les différents éléments du groupe sont mises en évidence par la forme des expressions précédentes. Leur nombre est

$$\frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}.$$

31. Considérons les solutions du système d'équations (6), quand la variable fait le tour d'un point singulier situé à l'origine. L'équation fondamentale relative à ce point singulier peut avoir toutes ses racines distinctes. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ces racines. Il existera un système fondamental de solutions dont les éléments pourront se mettre sous la forme

$$y_{ik} = x^{r_k} \varphi_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, n),$$

en posant $\omega_k = e^{2\pi r_k \sqrt{-1}}$, et en représentant par φ_{ik} une fonction uniforme dans le domaine de l'origine.

Digitized by Google

32. L'équation fondamentale peut avoir des racines multiples. On peut alors former un système fondamental, composé de groupes de solutions correspondant aux racines distinctes.

Considérons l'un de ces groupes correspondant à une racine ω. On pourra décomposer ce groupe en sous-groupes dans chacun desquels on aura

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \omega y_{i1}, \\ Y_{i2} &= \omega y_{i2} + y_{i1}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ Y_{im} &= \omega y_{im} + y_{i,m-1}. \end{aligned}$$

D'après un paragraphe précédent, on pourra donner aux solutions les formes

$$\begin{aligned} y_{im} &= x^r f_i(u), \\ y_{i,m-1} &= x^r \omega \Delta f_i(u), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ y_{i,m-k} &= x^r \omega^k \Delta_k f_i(u), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ y_{i1} &= x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u). \end{aligned}$$

33. Si le point singulier est au point ∞ sur la sphère, soit ω une racine de l'équation fondamentale, posons

$$r = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}\log\omega},$$

une solution prendra la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-r}\varphi_1, \\ y_2 &= x^{-r}\varphi_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ y_n &= x^{-r}\varphi_n, \end{aligned}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ étant dans le domaine du point ∞ des fonctions uniformes et continues qui ne sont pas toutes nulles à la fois.

Si l'équation fondamentale admet des racines multiples, on modifiera facilement de même les formes données précédemment pour un point singulier à l'origine.

Digitized by Google

34. On remarquera que, si l'on connait une solution du système (6) de la forme

$$y_1 = x^r(\varphi_{\lambda 1} + \varphi_{\lambda 2}\log x + \ldots + \varphi_{\lambda\lambda}\log^{\lambda-1} x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n = x^r(\theta_{\lambda 1} + \theta_{\lambda 2}\log x + \ldots + \theta_{\lambda\lambda}\log^{\lambda-1} x),$$

les n éléments $x^r\varphi_{\lambda\lambda}, \ldots, x^r\theta_{\lambda\lambda}$ forment aussi une solution du système (6). En effet, on le vérifie en remplaçant dans les équations (6) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leurs expressions connues et en égalant à zéro le coefficient de $\log^{\lambda-1} x$.

On remarquera encore que les propriétés que nous venons d'étudier s'appliquent aux solutions des systèmes d'équations aux différentielles totales, lorsqu'une seule des variables indépendantes varie. Les fonctions φ sont alors des doubles séries en x, dont les coefficients dépendent des valeurs fixes des autres variables indépendantes.

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS

ET

APPLICATIONS DE CERTAINES FONCTIONS

ANALOGUES A LA FONCTION θ,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

MM. Clebsch et Gordan ont résolu les premiers un système d'équations aux dérivées partielles analogue à celui qui définit les fonctions abéliennes, mais où entrent q intégrales normales de troisième espèce, au moyen d'une fonction qu'ils tirent de développements en série et qu'ils désignent par $\Theta^{(q)}$ (1). Ils indiquent seulement en quelques mots une méthode, qui n'est pas exempte de difficultés, pour passer par continuité du point double et de l'intégrale de troisième espèce infinie aux deux branches de ce point double au point de rebroussement et à l'intégrale de seconde espèce correspondante.

Je me suis proposé de résoudre la même question par une autre voie, en étudiant directement les fonctions $\Theta^{(q)}$ et en faisant entrer dans leur composition des constantes telles, qu'on puisse leur appliquer les deux théorèmes fondamentaux découverts par Riemann pour la fonction $\Theta[u^{(i)}(x) - G_i]$. Les intégrales normales de troisième espèce que je considère sont supposées avoir pour points logarithmiques deux points quelconques de la courbe fondamentale $F(x, y) = 0$ dont les lacets entrent d'une façon quelconque dans les différents circuits. J'admets

(1) *Theorie der Abelschen Functionen*, p. 287.

Digitized by Google

seulement que ces points sont différents des points critiques et que la droite qui les unit ne contient aucun de ces derniers.

Quand, dans le système des équations aux dérivées partielles, un certain nombre r d'entre elles sont relatives à des intégrales normales de seconde espèce, la forme analytique des fonctions que j'appelle $\Theta^{(q)}_{(r)}$ change considérablement. Leur développement explicite est compliqué; mais les fonctions successives qui se rapportent aux valeurs 1, 2, 3, ... de r se déduisent les unes des autres par une loi fort simple, analogue à celle qui donne la formation des polaires de différents ordres d'une courbe.

M. Briot a résolu d'une façon générale, et quelle que soit la nature des points critiques, le problème de l'inversion. Je suis exactement la même marche et renvoie, pour les notations et les calculs que je lui emprunte, à sa *Théorie des Fonctions abéliennes*.

Lemmes préliminaires.

1. Soient $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$ les p intégrales normales de première espèce relatives à une équation algébrique irréductible $F(x, y) = 0$ du degré m, $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(q)}$ q intégrales normales de troisième espèce et $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(r)}$ r intégrales normales de seconde espèce. On sait que l'intégrale $v^{(k)}$ devient infinie en deux points analytiques $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$ et peut être représentée, aux environs de ces points, par les développements suivants :

$$-\log(x-\xi^{(k)}) + b_k + b'_k(x-\xi^{(k)}) + \ldots,$$
$$+\log(x-\eta^{(k)}) + c_k + c'_k(x-\eta^{(k)}) + \ldots,$$

$b_k, b'_k, \ldots, c_k, c'_k, \ldots$ désignant des constantes.

Une intégrale de seconde espèce $w^{(h)}$ ne devient infinie qu'en un seul point analytique, qui est un pôle $(\zeta^{(h)}, \zeta_1^{(h)})$, et se développe aux environs de ce point en une série de la forme

$$-\frac{1}{x-\zeta^{(h)}} + e_h + e'_h(x-\zeta^{(h)}) + \ldots,$$

$e_h, e'_h, \ldots$ étant des constantes.

Digitized by Google

2. Les périodes normales d'indice impair d'une intégrale $u^{(i)}$ sont nulles, à l'exception d'une seule qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$. Nous représenterons les périodes normales d'indice pair par $2\alpha_{ij}$.

Une intégrale normale $v^{(k)}$ a toutes ses périodes normales d'indice impair nulles. Les périodes normales d'indice pair sont données par l'équation

$$2A_{ki} = u^{(i)}(\tau_1^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}). \tag{1}$$

L'intégrale $u^{(i)}(\xi^{(k)})$ est prise le long du chemin formé des lacets fondamentaux de seconde espèce conduisant de la racine initiale y_0 à la racine y_{α_k} avec laquelle commence le circuit unique qui contient le lacet du point $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, chemin suivi des lacets relatifs aux points critiques algébriques qui entrent dans ce circuit jusqu'à la droite $O\xi^{(k)}$, décrite une seule fois de O vers $\xi^{(k)}$. Le lacet du point $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$ entre dans un circuit qui est ou non le même que le précédent, et l'intégrale $u^i(\eta^{(k)})$ a une signification analogue. L'intégrale $v^{(k)}$ admet en outre la période polaire $2\pi\sqrt{-1}$.

Une intégrale $w^{(k)}$ a toutes ses périodes normales d'indice impair nulles, et les périodes normales d'indice pair a_{ki} sont données par l'équation

$$a_{ki} = \left(\frac{du^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(k)}}. \tag{2}$$

Ces périodes sont algébriques; on les obtient en remplaçant x et y par les coordonnées $\zeta^{(k)}$, $\zeta_1^{(k)}$ du pôle dans les coefficients différentiels des p intégrales normales de première espèce.

3. Nous regarderons comme connus les théorèmes traduits par les équations suivantes :

$$v^{(k)}(\tau_1^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) = v^{(k')}(\tau_1^{(k)}) - v^{(k')}(\xi^{(k)}), \tag{3}$$

$$\left(\frac{dw^{(h)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h')}} = \left(\frac{dw^{(h')}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}}, \tag{4}$$

$$w^{(h)}(\tau_1^{(k)}) - w^{(h)}(\xi^{(k)}) = \left(\frac{dv^{(k)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}}. \tag{5}$$

La démonstration des formules (1), (2), (4), (5) résulte, par une marche

Digitized by Google

uniforme, de la considération de l'intégrale

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \int P_l dQ_l$$

le long du contour simple formé d'une droite Ol de longueur très grande, d'une circonférence de rayon Ol, de la suite des lacets relatifs tant aux points critiques algébriques qu'aux infinis des intégrales de troisième espèce et aux pôles des intégrales de seconde espèce, tous ces lacets étant parcourus dans le sens négatif, et enfin du rayon Ol. Les lettres P et Q désignent, la première une intégrale de première ou de seconde espèce, la seconde une intégrale d'une quelconque des trois espèces. L'indice l signifie que les intégrales ont été prises le long de la suite des lacets fondamentaux qui conduisent de la racine initiale y_0 à une racine quelconque y_l, puis le long d'un chemin qui ne sort plus de la partie du plan enveloppée par le contour précédent. Quant à la relation (3), le genre de démonstration indiqué ne s'y applique pas sans difficulté, à cause des lacets logarithmiques. Mais on peut la vérifier en exprimant, comme l'a fait M. Emmanuel (1), l'intégrale de troisième espèce au moyen des fonctions Θ par la formule

$$(6) \qquad v^{(k)}(x) = \log K + \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta^{(k)}) + t_i]}{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]}.$$

Dans cette formule, K est une constante et t_i désigne, pour abréger, l'expression

$$C_i - \sum_{j=1}^{j=p-1} u^{(i)}(x_j),$$

où entrent les constantes fondamentales C_i du problème de l'inversion, et $p-1$ points arbitraires (x_j, y_j), ainsi que les chemins d'intégration de $u^{(i)}(x_j)$. Le chemin qui mène de l'origine au point variable (x, y) est aussi arbitraire. Au contraire, les chemins d'intégration de $u^{(i)}(\eta^{(k)})$, $u^{(i)}(\xi^{(k)})$ sont ceux qui ont été indiqués dans le numéro précédent. De plus, on peut prendre à l'origine une détermination quel-

(1) Thèse pour le doctorat.

Digitized by Google

conque du logarithme; cela revient à choisir convenablement la constante K. Cette détermination ne peut changer que quand on décrit l'un des lacets $(O\,\xi^{(k)})$, $(O\,\eta^{(k)})$. Remplaçons dans la formule précédente x et y par $\eta^{(k')}$, $\eta_1^{(k')}$, puis par $\xi^{(k')}$, $\xi_1^{(k')}$, et retranchons les deux résultats obtenus; nous aurons

$$(7)\quad \begin{cases} v^{(k)}(\tau_i^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) \\ \quad = \log \dfrac{\theta[u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) + t_i]\,\theta[u^{(i)}(\xi^{(k')}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]}{\theta[u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]\,\theta[u^{(i)}(\xi^{(k')}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) + t_i]}, \end{cases}$$

et de la même façon

$$(8)'\quad \begin{cases} v^{(k')}(\tau_i^{(k)}) - v^{(k')}(\xi^{(k)}) \\ \quad = \log \dfrac{\theta[u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) + t_i]\,\theta[u^{(i)}(\xi^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k)}) + t_i]}{\theta[u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) - u^{(i)}(\xi^{(k')}) + t_i]\,\theta[u^{(i)}(\xi^{(k)}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) + t_i]}. \end{cases}$$

Supposons que les intégrales $v^{(k)}$ et $v^{(k')}$ soient prises le long du chemin du n° 2, mais en ne décrivant pas les lacets logarithmiques qui se présentent tant dans les circuits que dans les lacets de seconde espèce, quand on les ramène de la sphère sur le plan; les logarithmes qui figurent dans les seconds membres des formules (7) et (8) auront alors une même détermination, savoir le logarithme du module augmenté du produit de l'argument par $2\pi\sqrt{-1}$. Car, pour obtenir la formule (7), par exemple, on a à retrancher deux résultats donnés par la formule (6), et le multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ disparaît dans la différence. Il suffit donc, pour prouver l'égalité des premiers membres des équations (7) et (8), de démontrer l'égalité des quantités soumises au logarithme dans les seconds membres. Or, les quotients qui entrent dans ces seconds membres sont indépendants, comme les premiers, des $p-1$ points arbitraires (x_j, y_j). Désignons par (x_j', y_j') les $p-1$ points qui forment le résidu d'une courbe du degré $m-3$ satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques et passant par les $p-1$ points (x_j, y_j). Le facteur

$$\theta[u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) + t_i] = \theta[u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) - t_i]$$

est égal, d'après le théorème d'Abel, à

$$\theta\left[u^{(i)}(\tau_i^{(k')}) - u^{(i)}(\tau_i^{(k)}) - \sum_{j=1}^{j=p-1} u^{(i)}(x_j') + C_i\right].$$

Digitized by Google

En répétant le même raisonnement pour les deux autres facteurs, le second quotient ne diffère du premier que par la substitution des x'_j aux x_j, ce qui ne change pas sa valeur. Posons, avec la restriction faite au sujet des lacets logarithmiques,

$$v^{(k)}(\eta^{(k')}) - v^{(k)}(\xi^{(k')}) = L_{kk'};$$

on aura

$$L_{kk'} = L_{k'k}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

Fonction $\Theta^{(q)}$.

4. Représentons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$, q quantités égales à ± 1. Soit un système de constantes définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
4H_1 &= \varepsilon_2 L_{12} + \varepsilon_3 L_{13} + \ldots + \varepsilon_q L_{1q},\\
4H_2 &= \varepsilon_1 L_{21} + \varepsilon_3 L_{23} + \ldots + \varepsilon_q L_{2q},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
4H_q &= \varepsilon_1 L_{q1} + \varepsilon_2 L_{q2} + \ldots + \varepsilon_{q-1} L_{qq-1}.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction de la seule variable x,

$$\Theta'^{q}(u^{(i)}, v^{(k)}) = \sum_{\varepsilon} \Theta\left(u^{(i)} + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k (v^{(k)} + H_k)}.$$

Chaque terme est le produit d'une fonction Θ ordinaire par une exponentielle. Il y a autant de termes que de groupes distincts de q quantités égales à ± 1, c'est-à-dire 2^q. Chaque terme est caractérisé par le système de valeurs que l'on donne aux ε, et à ce terme répond un système déterminé de q constantes H. Par exemple, si $q = 1$, il y a deux termes seulement; toutes les constantes H sont nulles et l'on a

$$\Theta^{(1)}(u^{(i)}, v^{(1)}) = \Theta(u^{(i)} + A_{1i})\, e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \Theta(u^{(i)} - A_{1i})\, e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}.$$

Digitized by Google

Si l'on remplace dans la fonction $\Theta^{(q)}$ les intégrales $u^{(i)}$, $v^{(k)}$ par des variables indépendantes u_i, v_k, elle devient une fonction holomorphe de ces $p+q$ variables indépendantes.

Fonction $\Theta_{(r)}$.

5. Nous définirons d'abord la fonction $\Theta_{(1)}$ par l'égalité

$$\Theta_{(1)} = w^{(1)}\Theta + D_{\zeta^{(1)}}\Theta,$$

le symbole $D_{\zeta^{(1)}}\Theta$ désignant la dérivée de la fonction Θ par rapport à x, où l'on convient de remplacer les variables x et y par $\zeta^{(1)}$, $\zeta_1^{(1)}$ *dans les dérivées des intégrales* $u^{(i)}$ *seulement*. La dérivée par rapport à x de la fonction Θ est

$$\frac{d\Theta}{dx} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial\Theta[u^{(i)}(x)]}{\partial u^{(i)}(x)} \frac{du^{(i)}(x)}{dx}.$$

On aura donc, par définition,

$$D_{\zeta^{(1)}}\Theta = \sum_{i=1}^{i=p} a_{1i} \frac{\partial\Theta[u^{(i)}(x)]}{\partial u^{(i)}(x)}.$$

Nous définirons de même la fonction $\Theta_{(2)}$ qui renferme deux intégrales de seconde espèce $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$, par la relation

$$\Theta_{(2)} = w^{(2)}\Theta_{(1)} + D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)}, \tag{9}$$

en entendant par $D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)}$ la dérivée par rapport à x de la fonction $\Theta_{(1)}$, avec la convention que l'on remplace x et y par $\zeta^{(2)}$, $\zeta_1^{(2)}$ *dans les dérivées des intégrales* $u^{(i)}$ *et de l'intégrale* $w^{(1)}$. On aura, d'après cela,

$$D_{\zeta^{(2)}}\Theta_{(1)} = w^{(1)}D_{\zeta^{(2)}}\Theta + D^2_{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}}\Theta + \left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\Theta,$$

et, par suite,

$$\Theta_{(2)} = w^{(1)}w^{(2)}\Theta + w^{(1)}D_{\zeta^{(2)}}\Theta + w^{(2)}D_{\zeta^{(1)}}\Theta + D^2_{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}}\Theta + \left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\Theta,$$

ou bien, en remplaçant les notations D par les termes qu'elles four-

Digitized by Google

nissent,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}\theta_{(2)} &= w^{(1)}w^{(2)}\theta + w^{(1)}\sum_{j=1}^{j=p} a_{2j}\frac{\partial\theta}{\partial u^{(j)}} + w^{(2)}\sum_{i=1}^{i=p} a_{1i}\frac{\partial\theta}{\partial u^{(i)}}\\ &\quad + \sum_{j=1}^{j=p}\sum_{i=1}^{i=p} a_{2j}\,a_{1i}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^{(j)}\,\partial u^{(i)}} + \left(\frac{dw^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}\theta.\end{aligned}\right.$$

Ce développement nous apprend que la fonction $\theta_{(2)}$ ne change pas si l'on permute les intégrales $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, ainsi que les périodes a_{2j}, a_{1i} qui s'y rapportent. Le dernier terme seul ne se présente pas sous une forme symétrique; mais, d'après la formule (4) du n° 3, il ne change pas par la permutation indiquée.

Posons de même

$$(11)\quad \theta_{(3)} = w^{(3)}\theta_{(2)} + D_{\zeta^{(3)}}\theta_{(2)},$$

en ayant soin de remplacer x et y par $\zeta^{(3)}$, $\zeta_1^{(3)}$ dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$, qui deviendront ainsi des périodes de $w^{(3)}$, et dans celles des intégrales $w^{(1)}$, $w^{(2)}$. Observons d'abord que la fonction $\theta_{(3)}$ est symétrique par rapport aux trois intégrales $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, $w^{(3)}$ et aux périodes qui s'y rapportent. Il résulte, en effet, de ce qui précède que l'on peut changer les intégrales $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ sans changer $\theta_{(2)}$ et par suite $\theta_{(3)}$. Pour montrer que l'on peut permuter l'intégrale $w^{(3)}$ avec l'une des deux autres, $w^{(2)}$ par exemple, il suffit de remarquer que si, dans la formule (11), on remplace $\theta_{(2)}$ par sa valeur tirée de la formule (9), on arrivera à une expression qui aura en $\theta_{(1)}$ la même composition que la fonction (10) en θ, et qui, par suite, sera symétrique par rapport aux intégrales $w^{(2)}$, $w^{(3)}$. En se servant de la relation (10), on forme d'ailleurs sans difficulté l'expression de $\theta_{(3)}$ par rapport à θ et aux trois intégrales de seconde espèce. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\theta_{(3)} &= w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}\theta\\ &\quad + w^{(1)}w^{(2)}D_{\zeta^{(3)}}\theta + w^{(2)}w^{(3)}D_{\zeta^{(1)}}\theta + w^{(3)}w^{(1)}D_{\zeta^{(2)}}\theta\\ &\quad + w^{(1)}D^2_{\zeta^{(2)}\zeta^{(3)}}\theta + w^{(2)}D^2_{\zeta^{(3)}\zeta^{(1)}}\theta + w^{(3)}D^2_{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}}\theta\\ &\quad + \left(\frac{dw^{(2)}}{dx}\right)_{\zeta^{(3)}}(w^{(1)}\theta + D_{\zeta^{(1)}}\theta) + \left(\frac{dw^{(3)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}(w^{(2)}\theta + D_{\zeta^{(2)}}\theta)\\ &\quad + \left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(2)}}(w^{(3)}\theta + D_{\zeta^{(3)}}\theta).\end{aligned}$$

Digitized by Google

La symétrie de la fonction $\theta_{(3)}$ est évidente en se rappelant la propriété exprimée par la formule (4) du n° 3. En continuant de la même façon, on formera une suite de fonctions; et l'une quelconque d'entre elles aura pour expression

$$\theta_{(r)} = w^{(r)}\theta_{(r-1)} + D_{\zeta^{(r)}}\theta_{(r-1)}.$$

On fera voir que $\theta_{(r)}$ est symétrique par rapport aux différentes intégrales w en remarquant que la propriété est vraie pour $\theta_{(r)}$ si on l'admet pour $\theta_{(r-1)}$. Car, d'une part, on pourra permuter entre eux les indices $1, 2, \ldots, r-1$; ensuite on reconnaîtra que l'on peut permuter l'indice r avec l'un des précédents, $r-1$ par exemple, en exprimant $\theta_{(r)}$ au moyen de la fonction $\theta_{(r-2)}$. Remarquons que la variable x n'entre dans la fonction $\theta_{(r)}$ que par les intégrales $u^{(i)}$ servant d'arguments à la fonction θ et à ses dérivées partielles par rapport aux $u^{(i)}$ et par les intégrales w. Si l'on remplace ces intégrales par des variables indépendantes u_i, w_h, la fonction $\theta_{(r)}$ devient une fonction holomorphe de ces $p + r$ variables.

Fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$.

6. Nous définirons d'abord la fonction $\theta^{(q)}_{(1)}$ par la relation

$$\theta^{(q)}_{(1)} = w^{(1)}\theta^{(q)} + D_{\zeta^{(1)}}\theta^{(q)}.$$

$D_{\zeta^{(1)}}\theta^{(q)}$ indique encore la dérivée de $\theta^{(q)}$ par rapport à x, où l'on remplace x et y par $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(1)}_1$, mais seulement dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ et dans celles des intégrales $v^{(k)}$. Ainsi, en particulier, l'expression de $\theta^{(1)}_{(1)}$ est

$$\left[\theta(u^{(i)} + A_{1i})e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \theta(u^{(i)} - A_{1i})e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}\right]\left[w^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=p} a_{1i}\left[\frac{\partial\theta(u^{(i)} + A_{1i})}{\partial u^{(i)}}e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \frac{\partial\theta(u^{(i)} - A_{1i})}{\partial u^{(i)}}e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}\right].$$

On définira de même la fonction $\theta^{(q)}_{(2)}$ en posant

$$\theta^{(q)}_{(2)} = w^{(2)}\theta^{(q)}_{(1)} + D_{\zeta^{(2)}}\theta^{(q)}_{(1)},$$

Digitized by Google

et d'une façon générale

$$\theta^{(q)}_{(r)} = w^{(r)}\theta^{(q)}_{(r-1)} + D_{\zeta^{(r)}}\theta^{(q)}_{(r-1)},$$

$D_{\zeta^{(r)}}\theta^{(q)}_{(r-1)}$ désigne toujours la dérivée par rapport à x de la fonction $\theta^{(q)}_{(r-1)}$ avec la convention que l'on fait $x = \zeta^{(r)}$, $y = \zeta_1^{(r)}$ dans les dérivées $\frac{du^{(i)}}{dx}, \frac{dv^{(k)}}{dx}, \frac{dw^{(h)}}{dx}$.

Si l'on exprime la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ par rapport à la fonction $\theta^{(q)}$ et aux différentes intégrales $w^{(h)}$, on obtient évidemment la même formule qu'en exprimant la fonction $\theta_{(r)}$ par rapport à la fonction θ et aux intégrales $w^{(h)}$. Il en résulte que la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ est symétrique comme $\theta_{(r)}$ par rapport aux intégrales $w^{(h)}$ et aux constantes qui s'y rapportent. En regardant $u^{(i)}, v^{(k)}, w^{(h)}$ comme des variables indépendantes, u_i, v_k, w_h, la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ devient une fonction holomorphe de ces $p + q + r$ variables.

Etude de la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h]$.

7. La fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ ne dépend de la variable x que par les intégrales des trois espèces. Supposons que l'on suive les différents chemins qui mènent de l'origine (x_0, y_0) à un point analytique (x, y); ces intégrales prennent les valeurs

$$u^{(i)} + 2m_i\pi\sqrt{-1} + 2\sum_{j=1}^{j=p} n_j \alpha_{ij},$$

$$v^{(k)} + 2\lambda_k\pi\sqrt{-1} + 2\sum_{j=1}^{j=p} n_j A_{hj},$$

$$w^{(h)} + \sum_{j=1}^{j=p} n_j a_{hj}.$$

Le nombre entier λ_k dépend des lacets logarithmiques $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$ qu'embrasse le chemin considéré. Nous allons montrer que la fonction

$$\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i,\ v^{(k)} - g_k,\ w^{(h)} - \gamma_h]$$

où G_i, g_k, γ_h désignent des constantes quelconques à une infinité de va-

Digitized by Google

leurs que l'on obtient en multipliant l'une d'entre elles par l'exponentielle $\pm e^{-J}$ en posant

$$J = \sum_{i=1}^{i=p} n_i (u^{(i)} - G_i) + \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}.$$

L'exponentielle est la même que dans le cas de la fonction $\Theta(u^{(i)} - G_i)$ et, sauf le signe qui dépend, comme nous allons le voir, des lacets logarithmiques, ne contient aucune trace des intégrales de seconde et de troisième espèce entrant dans la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$.

Considérons en premier lieu la fonction

$$\Theta^{(q)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k].$$

Un terme quelconque de cette fonction est le produit de

$$\Theta\left[u^{(i)} - G_i + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right] \quad ..$$

par l'exponentielle

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k (v^{(k)} - g_k + H_k)},$$

les ε ayant des valeurs déterminées. Par le changement de chemin, la fonction Θ se reproduit multipliée par l'exponentielle

$$e^{-J - \sum_{i=1}^{i=p} n_i \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}}.$$

L'exponentielle du terme considéré se reproduit multipliée par

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k \left(2\lambda_k \pi \sqrt{-1} + 2\sum_{j=1}^{j=p} n_j A_{kj}\right)}.$$

Le terme tout entier se reproduit donc multiplié par

$$e^{-J + \pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k \lambda_k}.$$

Remarquons que le nombre entier $\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k \lambda_k$ a la même parité pour tous

Digitized by Google

les termes de la fonction $\Theta^{(q)}$; car si l'une des quantités ε, ε_k, par exemple, prend la valeur $+1$ au lieu de -1, en passant d'un terme à un autre, la somme en question varie de $2\lambda_k$. Il en résulte que tous les termes de la fonction $\Theta^{(q)}$ se trouvent multipliés par une même exponentielle $\pm e^{-J}$.

Considérons maintenant la fonction

$$\Theta^{(q)}_{(1)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(1)} - \gamma_1]$$
$$= [w^{(1)} - \gamma_1]\,\Theta^{(q)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k] + D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k].$$

Puisque la fonction $\Theta^{(q)}$ se reproduit multipliée par e^{-J} quand on change le chemin d'intégration, sa dérivée prend en un même point analytique une infinité de valeurs représentées par

$$\pm e^{-J}\left(\frac{d\Theta^{(q)}}{dx} - \Theta^{(q)}\sum_{i=1}^{i=p} n_i \frac{du^{(i)}}{dx}\right).$$

Faisant la substitution $x = \zeta^{(1)}$, $y = \zeta_1^{(1)}$ dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$, $v^{(k)}$, on en conclut que la fonction $D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$ prend, par le changement du chemin d'intégration, les valeurs

$$\pm e^{-J}\left(D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)} - \Theta^{(q)}\sum_{i=1}^{i=p} n_i a_{1i}\right).$$

D'un autre côté, l'intégrale $w^{(1)} - \gamma_1$ prend les valeurs

$$w^{(1)} - \gamma_1 + \sum_{i=1}^{i=p} n_i a_{1i}.$$

En ajoutant les deux résultats et remarquant que les signes $+$ et $-$ se correspondent, on voit que les termes contenant les périodes a_{1i} disparaissent, et que l'on retrouve le produit de la fonction $\Theta^{(q)}_{(1)}$ par l'exponentielle $\pm e^{-J}$.

Le mode de démonstration montre immédiatement que la même propriété s'applique à la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$, car ayant

$$\Theta^{(q)}_{(r)} = (w^{(r)} - \gamma_r)\,\Theta^{(q)}_{(r-1)} + D_{\zeta^{(r)}}\Theta^{(q)}_{(r-1)}, \tag{12}$$

si l'on admet que la propriété est vraie pour $\Theta^{(q)}_{(r-1)}$, il en sera de même

Digitized by Google

pour $\theta^{(q)}_{(r)}$, puisque, d'après le calcul précédent, les périodes de l'intégrale $w^{(r)}$ disparaissent du résultat.

Infinis de la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h]$.

8. Les fonctions θ et leurs dérivées partielles qui entrent dans la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$, ayant pour arguments des intégrales de première espèce qui ne peuvent devenir infinies pour aucune valeur de la variable, la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ ne devient infinie qu'avec une des intégrales de seconde ou de troisième espèce. Considérons d'abord un pôle $(\zeta^{(r)}, \zeta_1^{(r)})$. L'intégrale $w^{(r)} - \gamma_r$ se développe aux environs de ce pôle suivant la série

$$(13) \qquad -\frac{1}{x-\zeta^{(r)}} + e_r - \gamma_r + e'_r(x-\zeta^{(r)}) + \dots.$$

La fonction $\theta^{(q)}_{(r-1)}$, qui ne contient que les intégrales $w^{(r)}, \dots, w^{(r-1)}$, étant finie aux environs de ce pôle, se développe par la formule de Taylor suivant la série

$$(14) \quad \theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \dots] + (x-\zeta^{(r)})\left(\frac{d}{dx}\right)_{\zeta^{(r)}}\theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \dots] + \dots.$$

On en conclut immédiatement que la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ devient infinie et se développe en une série dont le premier terme est

$$-\frac{1}{x-\zeta^{(r)}}\theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \dots].$$

Mais nous aurons besoin pour la suite de calculer en outre le second terme du développement qui est la valeur à laquelle se réduit le reste de la série pour $x = \zeta^{(r)}$. D'après la formule (12), il faut d'abord chercher le terme indépendant de $x - \zeta^{(r)}$ dans le produit des deux expressions (13) et (14), puis y ajouter le premier terme du développement de la fonction $D_{\zeta^{(r)}}\theta^{(q)}_{(r-1)}$. Ce premier terme s'obtient simplement en faisant $x = \zeta^{(r)}, y = \zeta_1^{(r)}$ dans la fonction représentée par le symbole $D_{\zeta^{(r)}}$; par la définition de ce symbole, la fonction obtenue diffère de la dérivée de la fonction $\theta^{(q)}_{(r-1)}$ en ce qu'on doit y faire partiellement la substitution indiquée; en achevant d'opérer cette substitution partout où x et y restent encore, on tombe évidemment sur l'expression $\left(\frac{d}{dx}\right)_{\zeta^{(r)}}\theta^{(q)}_{(r-1)}$. Ce

Digitized by Google

terme disparait par réduction dans le terme indépendant de $x - \zeta^{(r)}$, qui est ainsi

$$(e_r - \gamma_r)\,\Theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(r)}) - G_i, \ldots].$$

A cause de la symétrie, ce que nous venons de dire du développement de $\Theta^{(q)}_{(r)}$ aux environs du pôle $(\zeta^{(r)}, \zeta^{(r)}_1)$ s'applique à tous les autres pôles. Le développement met alors en évidence une fonction $\Theta^{(q)}_{(r-1)}$ qui contient toutes les intégrales $w^{(h)} - \gamma_h$, à l'exception de celle dont on considère le pôle.

9. La fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ devient encore infinie avec une intégrale de troisième espèce $v^{(k)}$, c'est-à-dire aux $2q$ points $(\xi^{(k)}, \xi^{(k)}_1)$, $(\eta^{(k)}, \eta^{(k)}_1)$. Au point $(\xi^{(k)}, \xi^{(k)}_1)$, l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}v^{(k)}}$ devient infinie, comme cela résulte (n° 1) du développement de l'intégrale $v^{(k)}$; on peut la regarder aux environs de ce point comme le produit de $(x - \xi^{(k)})^{-\frac{1}{2}}$ par une fonction finie et développable, suivant les puissances entières positives de $x - \xi^{(k)}$. L'exponentielle $e^{-\frac{1}{2}v^{(k)}}$ peut être regardée, aux environs du même point, comme le produit d'une telle fonction par le facteur $(x - \xi^{(k)})^{\frac{1}{2}}$, et par suite s'annule avec le facteur $x - \xi^{(k)}$. En se reportant à la définition de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$, on voit que la moitié des termes de cette fonction s'annulent, savoir tous ceux pour lesquels $\varepsilon_k = -1$. Les autres termes, pour lesquels $\varepsilon_k = +1$, deviennent infinis avec l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}v^{(k)}}$, et la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ pourra être représentée elle-même par le produit

$$M(x - \xi^{(k)})^{-\frac{1}{2}},$$

M étant une fonction finie et développable suivant les puissances entières positives de $x - \xi^{(k)}$.

On verra de la même façon que la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ devient infinie au point $(\eta^{(k)}, \eta^{(k)}_1)$ et peut se représenter, aux environs de ce point, par l'expression

$$N(x - \eta^{(k)}_1)^{-\frac{1}{2}},$$

la fonction N étant finie et développable suivant les puissances entières positives de $x - \eta^{(k)}$. Mais les termes qui deviennent infinis sont ceux pour lesquels $\varepsilon_k = -1$; les autres s'annulent pour $x = \eta^{(k)}$, $y = \eta^{(k)}_1$.

Digitized by Google

Zéros de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h]$.

10. THÉORÈME I. — *La fonction* $\Theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h]$ *admet* $p + q + r$ *zéros*.

La fonction se reproduit, multipliée par une exponentielle, quand on change le chemin qui va du point initial (x_0, y_0) au point (x, y). On peut donc, sans modifier le nombre des zéros, astreindre la variable à rester à l'intérieur du contour simple dont il a été question dans le n° 3, et le nombre cherché sera le quotient par $2\pi\sqrt{-1}$ de la somme des intégrales

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \int d \log \Theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)}_l - G_i, v^{(k)}_l - g_k, w^{(h)}_l - \gamma_h]$$

prises le long de ce contour.

Les m fonctions étant holomorphes à l'intérieur du contour, on voit d'abord que le rayon Ol, parcouru successivement dans deux sens différents, donne des intégrales qui se détruisent. Les mêmes fonctions étant finies pour une valeur infinie de x, on voit aussi que le grand cercle du contour donne une intégrale nulle. Il reste donc à chercher ce que donnent les différents lacets, qui sont parcourus ici dans le sens négatif.

Pour un lacet tel que $O\xi^{(k)}$, il suffit de tenir compte de la partie donnée par le petit cercle; car, en appelant m' et m deux points opposés sur le bord de gauche et sur le bord de droite de la coupure $O\xi^{(k)}$, la partie de l'intégrale relative à la droite $O\xi^{(k)}$ parcourue dans les deux sens est

$$(15) \qquad \int d \log (\Theta^{(q)}_{(r)})_{m'} - \int d \log (\Theta^{(q)}_{(r)})_{m} = \int d \log \frac{(\Theta^{(q)}_{(r)})_{m'}}{(\Theta^{(q)}_{(r)})_{m}}.$$

Or, quand on passe du point m' au point m en suivant le lacet, la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ ne fait que changer de signe. Car les intégrales des trois espèces reprennent leur valeur, sauf $v^{(k)}$ qui augmente de $2\pi\sqrt{-1}$; tous les termes de la fonction contiennent en facteur soit $e^{\frac{1}{2}v^{(k)}}$, soit $e^{-\frac{1}{2}v^{(k)}}$,

Digitized by Google

et par suite se trouvent multipliés par -1. Il est clair que, s'il s'agissait de la fonction $\Theta_{(r)}$, où n'entrent pas d'intégrales de troisième espèce, cette fonction aurait la même valeur sur les deux bords de la coupure. Dans tous les cas, l'intégrale (15) est nulle pour les deux parties de la droite $O\xi^{(k)}$. L'intégrale relative au petit cercle du même lacet est (n° 9)

$$\int d\log M - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-\xi^{(k)}}.$$

La première partie est nulle, puisque M est finie pour $x=\xi^{(k)}$; la seconde est égale à $\pi\sqrt{-1}$.

On verra de la même façon que les deux bords d'une coupure $O\eta^{(k)}$ donnent une intégrale nulle, et que le petit cercle du lacet donne $\pi\sqrt{-1}$. On trouve ainsi pour l'intégrale relative à l'ensemble des $2q$ lacets $O\xi^{(k)}$, $O\eta^{(k)}$

$$2\pi q\sqrt{-1}.$$

Considérons un lacet $O\zeta^{(k)}$ relatif à un pôle. La droite $O\zeta^{(k)}$ donne à l'aller et au retour des intégrales qui se détruisent, puisque toutes les intégrales des trois espèces, sans excepter $w^{(k)}$, et par suite aussi la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$, reprennent leurs valeurs quand on passe du point m' au point m en suivant le lacet. L'intégrale relative au petit cercle, décrit dans le sens négatif, est égale à $2\pi\sqrt{-1}$; cela résulte immédiatement du développement de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ et de l'intégrale $w^{(k)}$ aux environs du pôle. Les r lacets polaires donnent ainsi pour l'intégrale

$$2\pi r\sqrt{-1}.$$

Considérons enfin un lacet (a) relatif à un point critique. Le petit cercle du lacet donne une intégrale nulle, puisque la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ reste finie aux environs du point correspondant. Cherchons les valeurs de la fonction sur les deux bords opposés de la coupure en m' et m. Appelons $u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}}$, $v^{(k)}_{\alpha_{\rho+1}}$, $w^{(k)}_{\alpha_{\rho+1}}$ les valeurs en m des intégrales des trois espèces quand on suit le chemin composé des lacets fondamentaux de seconde espèce conduisant de la racine initiale y_0 à la racine $y_{\alpha_{\rho+1}}$, avec laquelle commence le circuit contenant le lacet binaire $(a)^{\varepsilon_{\rho+2}}_{\varepsilon_{\rho+1}}$, chemin suivi des lacets composant la première partie de ce circuit jusqu'en m.

Digitized by Google

Soient maintenant $u'^{(i)}_{\alpha_\rho}$, $v'^{(k)}_{\alpha_\rho}$, $w'^{(h)}_{\alpha_\rho}$ les valeurs de ces mêmes intégrales en m' quand on suit le chemin composé des lacets fondamentaux de seconde espèce conduisant de la racine y_0 à la racine y_{α_ρ}, avec laquelle commence le circuit qui contient le lacet binaire $(a)^{\beta_{\rho+1}}_{\beta_\rho}$, suivi des lacets qui composent la première partie de ce circuit jusqu'en m'. Ces valeurs, considérées deux à deux, étant celles des intégrales en un même point analytique, leur différence est une période de l'intégrale correspondante. Mais nous avons vu (n° 7) que, quand on va du point m' au même point analytique m, en suivant un chemin quelconque, le rapport des valeurs que prend la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ en m' et en m est une exponentielle qui ne contient plus de traces des intégrales de seconde et de troisième espèce. Supposons qu'on ait exprimé en fonction des périodes normales la période de seconde espèce de l'intégrale $u^{(i)}$, relative au cycle simple de seconde espèce qui contient le lacet binaire $(a')^{\alpha_{\rho+1}}_{\alpha_\rho}$ (1), on trouvera ainsi, pour le rapport des valeurs de la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ en m' et en m, l'exponentielle

$$\pm e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left(u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}} - G_i\right) - \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j x_{ij}}.$$

La différentielle du logarithme de ce rapport est

$$-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\, du'^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}}.$$

C'est le même résultat que dans la recherche du nombre des zéros de la fonction $\theta[u^{(i)} - G_i]$; les nombres entiers n_i ont les mêmes valeurs, et l'on est ramené à un calcul connu (2). Ajoutons seulement que les lacets $O\xi^{(k)}$, $O\eta^{(k)}$, $O\zeta^{(k)}$ n'ont aucune influence sur la partie relative aux points critiques, puisque le coefficient différentiel reprend à la fin d'un de ces lacets la valeur qu'il avait à l'entrée. L'ensemble des lacets des points critiques donne donc l'intégrale

$$2p\pi\sqrt{-1}.$$

Le nombre des zéros est donc $p + q + r$.

(1) BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 126.

(2) *Ibid.*, p. 127.

Digitized by Google

11. Théorème II. — *Les $p+q+r$ zéros de la fonction*

$$\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k, w^{(h)}-\gamma_h]$$

satisfont aux équations

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j)-G_i \equiv C_i \quad (i=1,2,\ldots,p),$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j)-g_k \equiv D_k \quad (k=1,2,\ldots,q),$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j)-\gamma_h \equiv E_h \quad (h=1,2,\ldots,r).$$

Les quantités C_i, D_k, E_h sont des constantes, et le signe $\equiv$ indique que l'on doit ajouter aux seconds membres des multiples quelconques des périodes relatives aux intégrales qui figurent dans les premiers membres.

Considérons la fonction de x

$$R = \log \frac{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)}-G'_i, v^{(k)}-g'_k, w^{(h)}-\gamma'_h]}{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)}-G_i, v^{(k)}-g_k, w^{(h)}-\gamma_h]},$$

où le numérateur du rapport qui est soumis au logarithme ne diffère du dénominateur que par le changement des constantes G_i, g_k, γ_h en d'autres constantes quelconques G'_i, g'_k, γ'_h. Nous désignerons par (x'_j, y'_j) les $p+q+r$ zéros de la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ du numérateur. Les deux fonctions $\theta^{(q)}_{(r)}$ deviennent infinies pour les mêmes valeurs de la variable; leur rapport est fini pour ces valeurs. Il en résulte que la fonction R ne devient infinie qu'aux points (x'_j, y'_j), (x_j, y_j), qui sont des points critiques logarithmiques. Nous supposerons ces points réunis deux à deux par des lacets doubles (1), et nous chercherons d'abord la valeur de la somme des intégrales.

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \int R_l \, du_l^{(l)},$$

(1) Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 133.

Digitized by Google

où $u^{(t)}$ désigne l'une quelconque des intégrales de première espèce, le long du contour simple déjà considéré précédemment.

La fonction R étant finie, ainsi que l'intégrale $u^{(t)}$ pour x infini, la grande circonférence du contour donne une intégrale nulle. Chacune des fonctions R_i et u_i étant monotrope dans l'intérieur du contour, la droite Ol, parcourue successivement dans les deux sens, donne des intégrales qui se détruisent.

Les lacets $(O\xi^{(h)})$, $(O\eta^{(h)})$, $(O\zeta^{(h)})$ donnent tous une intégrale nulle; car, pour les deux premiers, les deux fonctions $\Theta^{(q)}_{(r)}$ reprennent sur le bord de droite de la coupure correspondante une valeur égale et le signe contraire à celle qu'ils avaient sur le bord de gauche (n° 10). S'il s'agit d'un lacet $(O\zeta^{(h)})$, les deux fonctions reprennent la même valeur sur les deux bords. Il en est de même relativement à tous les lacets pour la fonction $\Theta_{(r)}$. Dans tous les cas, la fonction R reprend la même valeur quand on passe d'un bord à l'autre de la coupure en suivant le lacet. Quant au petit cercle du lacet, il donne une intégrale nulle, puisque la fonction R et l'intégrale $u^{(t)}$ restent finies au point correspondant.

Un des lacets doubles (x_j, x'_j) donne pour l'intégrale (1)

$$2\pi\sqrt{-1}\,[u^{(t)}(x'_j) - u^{(t)}(x_j)],$$

et l'intégrale fournie par les $p+q+r$ lacets analogues est

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{j=p+q+r}[u^{(t)}(x'_j) - u^{(t)}(x_j)].$$

Il faut maintenant évaluer la partie de l'intégrale relative aux lacets des points critiques algébriques. Soit (a) un lacet sur lequel se permutent p racines : ce lacet donne

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=p}\int_0^a R'_{\alpha_\rho}\,du'^{(t)}_{\alpha_\rho} - \sum_{\rho=1}^{\rho=p}\int_0^a R_{\alpha_{\rho+1}}\,du^{(t)}_{\alpha_{\rho+1}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=p}(R'_{\alpha_\rho} - R_{\alpha_{\rho+1}})\,du^{(t)}_{\alpha_{\rho+1}},$$

les indices α_ρ, $\alpha_{\rho+1}$ ayant la même signification que dans le numéro

(1) BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 136.

Digitized by Google

précédent. La différence $R'_{\alpha_\rho} - R_{\alpha_{\rho+1}}$ est le logarithme du quotient de deux rapports que j'appelle pour un moment T' et T. Le premier T' est le quotient des valeurs que prend la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$, dont les constantes sont accentuées en deux points opposés m' et m de la coupure Oa; nous avons vu (n° 10) que ce rapport est

$$T' = \pm e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left(u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}} - G'_i\right) - \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}}.$$

Le rapport T est de même

$$T = \pm e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i\left(u^{(i)}_{\alpha_{\rho+1}} - G_i\right) - \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=p} n_i n_j \alpha_{ij}}.$$

Les deux signes de T' et T se correspondent; car ce signe dépend seulement de la façon dont les lacets logarithmiques entrent dans les circuits. Le rapport $\frac{T'}{T}$ est égal à

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i (G'_i - G_i)}.$$

On aura donc, en profitant de la remarque faite par M. Briot (¹),

$$R'_{\alpha_\rho} - R_{\alpha_{\rho+1}} = \sum_{i=1}^{i=p} n_i (G'_i - G_i).$$

Ce résultat est identique à celui que l'on trouve dans le cas des fonctions θ; les nombres entiers n_i ont les mêmes valeurs que dans ce cas particulier. Nous en concluons que la partie relative à l'ensemble des lacets (a) est

$$-2\pi\sqrt{-1}(G'_i - G_i).$$

En divisant par $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient les p premières équations qu'il s'agissait d'établir. Par la suppression des coupures, on rétablit les périodes que comporte le signe $\equiv$ dans ces équations.

(¹) *Loc. cit.*, p. 135.

Digitized by Google

12. Passons à la démonstration des r dernières relations. Elle résulte de l'évaluation de la somme

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} \mathrm{R}_l \, dw_l^{(k)}$$

le long du même contour que ci-dessus. Les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$ donnent encore une intégrale nulle. Il en est de même des lacets $(O\zeta^{(k)})$, à l'exception du lacet $(O\zeta^{(t)})$, dont le petit cercle donne une intégrale différente de zéro. Or on a

$$\frac{dw^{(t)}}{dx} = \frac{1}{(x-\zeta^{(t)})^2} + e'_t + \dots$$

L'intégrale relative au petit cercle parcouru dans le sens négatif est le produit de $-2\pi\sqrt{-1}$ par le résidu, lequel s'obtient en faisant $x=\zeta^{(t)}$, $y=\zeta_1^{(t)}$ dans la dérivée de R. Mais, d'après la définition de la fonction R, on a

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = \frac{d}{dx}\log\theta_{(r)}^{(q)}[u^{(t)} - \mathrm{G}'_i, \dots] - \frac{d}{dx}\log\theta_{(r)}^{(q)}[u^{(t)} - \mathrm{G}_i, \dots]. \tag{16}$$

Les deux fonctions $\theta_{(r)}^{(q)}$ deviennent infinies pour $x=\zeta^{(t)}$. Appelons pour un instant $\Phi(x)$ une fonction qui devient infinie pour $x=\zeta^{(t)}$ et se développe suivant la série

$$\Phi(x) = \frac{\mathfrak{A}}{x-\zeta^{(t)}} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}(x-\zeta^{(t)}) + \dots;$$

on aura

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = -\frac{\mathfrak{A}}{(x-\zeta^{(t)})^2} + \mathfrak{C} + \dots$$

et, par suite, en faisant le quotient des deux développements,

$$\frac{d}{dx}\log\Phi(x) = -\frac{1}{x-\zeta^{(t)}} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} + \dots$$

Il résulte de là que le terme $-\frac{1}{x-\zeta^{(t)}}$ disparaît dans le second membre de l'équation (16). Ce second membre se réduit, pour $x=\zeta^{(t)}$, à la différence des termes $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$, qu'il s'agit maintenant d'obtenir. Or il résulte du n° 8 que la fonction $\theta_{(r-1)}^{(q)}[u^{(t)}(\zeta^{(t)}) - \mathrm{G}'_i, \dots]$, où entrent toutes les

Digitized by Google

intégrales de seconde espèce différentes de $w^{(t)}$, disparaît dans le rapport $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{L}}$ qui se réduit à $\gamma'_t - e_t$, et que la fonction $\Theta^{(q)}_{(r-1)}[u^{(i)}(\zeta^{(t)}) - G_i, \ldots]$ disparaît dans le second rapport $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{L}}$ qui se réduit à $\gamma_t - e_t$. Le résidu de $\left(\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)_{\zeta^{(t)}}$ est donc égal à $\gamma'_t - \gamma_t$, et l'intégrale relative au lacet $(O\zeta^{(t)})$ est égale à $-2\pi\sqrt{-1}(\gamma'_t - \gamma_t)$.

Les $p+q+r$ doubles lacets donnent, comme précédemment,

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{j=p+q+r}[w^{(t)}(x'_j) - w^{(t)}(x_j)].$$

L'ensemble des lacets relatifs aux points critiques (a) donne une intégrale nulle; car le calcul est identiquement le même que pour la fonction $\Theta(u^{(i)} - G_i)$, et l'on aura à évaluer une somme donnée par la formule (25), page 137 de l'Ouvrage de M. Briot, avec la seule différence que l'intégrale de première espèce $u^{(t)}$ est remplacée par l'intégrale de seconde espèce $w^{(t)}$. Cette somme se compose de deux parties dont la seconde est nulle identiquement, les entiers n_i ayant les mêmes valeurs que dans le cas de la fonction Θ; la première est aussi nulle, parce que *toutes* les périodes normales d'indice impair de l'intégrale $w^{(t)}$ sont nulles. En divisant le résultat de l'intégration par $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient les r équations qu'il s'agissait d'établir.

13. Il nous reste à démontrer les q équations intermédiaires qui résultent de l'évaluation suivant le même contour que précédemment de la somme

$$\sum_{t=0}^{t=m-1}\mathrm{R}_t dv_t^{(t)}.$$

Il est clair que les lacets $(O\zeta^{(k)})$ donnent une intégrale nulle, ainsi que les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$, à l'exception des deux lacets pour lesquels $k = t$.

Les $p+q+r$ doubles lacets donnent, sans difficulté, l'intégrale

$$2\pi\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{j=p+q+r}[v^{(t)}(x'_j) - v^{(t)}(x_j)].$$

Digitized by Google

Le résultat relatif aux lacets (a) des points critiques algébriques n'est encore nullement affecté par la présence des lacets précédents. L'ensemble de tous ces lacets donne une intégrale nulle pour la même raison que dans le cas de l'intégrale de seconde espèce.

Le lacet $(O\xi^{(t)})$, parcouru dans le sens négatif comme il l'est dans le contour, donne $2\pi\sqrt{-1}\,R(\xi^{(t)})$; le lacet $(O\eta^{(t)})$ donne de même $-2\pi\sqrt{-1}\,R(\eta^{(t)})$. Nous avons donc à chercher la valeur de $2\pi\sqrt{-1}\,[R(\xi^{(t)})-R(\eta^{(t)})]$, c'est-à-dire de

$$(17)\qquad 2\pi\sqrt{-1}\log\frac{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\xi^{(t)})-G'_t,\ldots]\,\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\eta^{(t)})-G_t,\ldots]}{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\xi^{(t)})-G_t,\ldots]\,\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\eta^{(t)})-G'_t,\ldots]}.$$

D'après la loi de formation des fonctions $\theta^{(q)}_{(r)}$, chacun des termes de cette fonction contient une exponentielle où entrent comme exposants les q intégrales de troisième espèce soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$. Quand on fait $x=\xi^{(t)}$, $y=\xi_1^{(t)}$, tous les termes pour lesquels $\varepsilon_t=-1$ s'annulent; tous ceux pour lesquels $\varepsilon_t=+1$ deviennent infinis avec l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}\nu^{(t)}}$. De même, quand on fait $x=\eta^{(t)}$, $y=\eta_1^{(t)}$, les termes pour lesquels $\varepsilon_t=+1$ s'annulent; ceux pour lesquels $\varepsilon_t=-1$ deviennent infinis avec $e^{-\frac{1}{2}\nu^{(t)}}$. Le double rapport qui figure sous le logarithme dans l'expression (17) a une limite finie que l'on obtient en supprimant l'exponentielle $e^{\frac{1}{2}\nu^{(t)}}$ dans tous les termes différents de zéro du rapport

$$(18)\qquad \frac{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\xi^{(t)})-G'_t,\ldots]}{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\xi^{(t)})-G_t,\ldots]},$$

et l'exponentielle $e^{-\frac{1}{2}\nu^{(t)}}$ dans les termes différents de zéro du rapport

$$(19)\qquad \frac{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\eta^{(t)})-G_t,\ldots]}{\theta^{(q)}_{(r)}[u^{(t)}(\eta^{(t)})-G'_t,\ldots]},$$

puis faisant le produit des résultats. L'intégrale $\nu^{(t)}$ entrant partout accompagnée de la constante $-g_t$ ou bien $-g'_t$, on voit que l'on pourra mettre en facteur $e^{-\frac{1}{2}g'_t}$ dans tous les termes du numérateur du rapport (18) et $e^{-\frac{1}{2}g_t}$ dans ceux du dénominateur. De la même façon, on peut mettre $e^{\frac{1}{2}g_t}$ en facteur au numérateur du rapport (19) et $e^{\frac{1}{2}g'_t}$ au

Digitized by Google

dénominateur. En faisant le produit, on aura à multiplier le facteur $e^{-(g'_t - g_t)}$ par un rapport analogue à celui de l'expression (17), mais où les exponentielles des différents termes ne contiennent plus ni l'intégrale $\varphi^{(t)}$ ni les constantes g_t, g'_t. Nous conviendrons d'indiquer la suppression de ces facteurs par la lettre t, placée au-dessous de la caractéristique Θ^{γ}_{r}. Réunissons maintenant les fonctions qui renferment les mêmes constantes, et nous aurons à chercher la valeur du produit des deux expressions suivantes

$$\frac{\underset{t}{\Theta}^{q}_{(r)}[u^{(i)}(\tau_i^{(t)}) - G_i, \ldots]}{\underset{t}{\Theta}^{(q)}_{(r)}[u^{(i)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots]},$$

$$\frac{\underset{t}{\Theta}^{q}_{(r)}[u^{(i)}(\xi^{(t)}) - G'_i, \ldots]}{\underset{t}{\Theta}^{q}_{(r)}[u^{(i)}(\tau_i^{(t)}) - G'_i, \ldots]}.$$

Nous allons voir que ces rapports sont égaux tous les deux à $+1$ ou bien à -1, en faisant intervenir les constantes H_k qui, jusqu'à présent, n'ont joué aucun rôle. Nous ferons d'abord la démonstration pour la fonction $\Theta^{(q)}$, puis nous verrons que la loi de formation des fonctions $\Theta^{(q)}_{(r)}$ laisse entièrement subsister la même conséquence.

14. Considérons donc l'expression

$$\frac{\underset{t}{\Theta}^{(q)}[u^{(i)}(\tau_i^{(t)}) - G_i, \ldots]}{\underset{t}{\Theta}^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots]}. \tag{20}$$

Un terme quelconque du numérateur répond à des valeurs données arbitrairement aux ε, sauf ε_t, qui est égal à -1; ce terme est le produit de la fonction

$$\theta[u^{(i)}(\tau_i^{(t)}) - G_i + \varepsilon_1 A_{1i} + \ldots + \varepsilon_{t-1} A_{t-1i} - A_{ti} + \varepsilon_{t+1} A_{t+1i} + \ldots + \varepsilon_q A_{qi}] \tag{21}$$

par une exponentielle dont l'exposant est

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{2}[\varphi^{(1)}(\tau_i^{(t)}) - g_1 + H_1] + \ldots + \frac{\varepsilon_{t-1}}{2}[\varphi^{(t-1)}(\tau_i^{(t)}) - g_{t-1} + H_{t-1}] - \frac{1}{2} H_t \\ \quad + \frac{\varepsilon_{t+1}}{2}[\varphi^{(t+1)}(\tau_i^{(t)}) - g_{t+1} + H_{t+1}] + \ldots + \varepsilon_q[\varphi^{(q)}(\tau_i^{(t)}) - g_q + H_q]. \end{cases} \tag{22}$$

Digitized by Google

Faisons correspondre à ce terme celui du dénominateur pour lequel les ε ont la même valeur, sauf ε_t qui a nécessairement la valeur $+1$. Ce terme sera le produit de la fonction

$$(23)\quad \Theta[u^{(i)}(\xi^{(i)}) - G_i + \varepsilon_1 A_{1i} + \ldots + \varepsilon_{t-1} A_{t-1,i} + A_{ti} + \varepsilon_{t+1} A_{t+1,i} + \ldots + \varepsilon_q A_{qi}]$$

par l'exponentielle dont l'exposant est

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon_1}{2}[\varphi^{(1)}(\xi^{(i)}) - g_1 + H_1] + \ldots + \frac{\varepsilon_{t-1}}{2}[\varphi^{(t-1)}(\xi^{(i)}) - g_{t-1} + H_{t-1}] + \frac{1}{2} H_t \\ \quad + \frac{\varepsilon_{t+1}}{2}[\varphi^{(t+1)}(\xi^{(i)}) - g_{t+1} + H_{t+1}] + \ldots + \frac{\varepsilon_q}{2}[\varphi^{(q)}(\xi^{(i)}) - g_q + H_q]. \end{cases}$$

Les fonctions Θ de ces deux termes sont les mêmes, en vertu de la formule (1) du n° 2. Cherchons maintenant la différence des exposants (22) et (24). Les constantes $g_1, \ldots, g_{t+1}, \ldots, g_q$ disparaissent. La quantité H_t, qui ne dépend pas de ε_t, est la même pour les deux termes et donne $-H_t$ dans la différence. La quantité H_t a dans les deux exposants des valeurs qui diffèrent par le terme contenant ε_t; la différence est $-\frac{1}{2} L_{tt}$, en sorte que l'on trouvera dans la différence des deux exposants $-\frac{1}{4}\varepsilon_t L_{tt}$. On en conclut que les termes H donnent dans la différence des exposants

$$-\tfrac{1}{4}[\varepsilon_1 L_{1t} + \ldots + \varepsilon_{t-1} L_{t-1,t} + \varepsilon_{t+1} L_{t+1,t} + \ldots + \varepsilon_q L_{qt}] - H_t.$$

On sait (n° 4) que l'on peut permuter les indices des L, ce qui permet de réduire l'expression précédente à $-2H_t$. Pour évaluer la partie qui provient des intégrales $\varphi^{(k)}$, il faut remarquer que l'expression $\varphi^{(k)}(\eta^{(i)}) - \varphi^{(k)}(\xi^{(i)})$ n'est pas nécessairement égale à L_{kt}, à cause des lacets logarithmiques qu'on a eu à décrire dans le contour d'intégration. Nous poserons donc

$$\varphi^{(k)}(\eta^{(i)}) - \varphi^{(k)}(\xi^{(i)}) = L_{kt} + 2 f_{kt}\pi\sqrt{-1},$$

f_{kt} étant un nombre entier. Nous trouverons ainsi, pour compléter la différence des deux exposants,

$$\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 L_{1t} + \ldots + \varepsilon_{t-1} L_{t-1,t} + \varepsilon_{t+1} L_{t+1,t} + \ldots + \varepsilon_q L_{qt}) + \pi\sqrt{-1}(\varepsilon_1 f_{1t} + \ldots + \varepsilon_{t-1} f_{t-1,t} + \varepsilon_{t+1} f_{t+1,t} + \ldots + \varepsilon_q f_{qt}).$$

Digitized by Google

La première parenthèse donne $4H_t$; la seconde est un nombre entier qui conserve évidemment la même parité pour tous les termes. Ainsi, à un terme quelconque du numérateur, dans le rapport (20), correspond un terme égal dans le dénominateur, ou bien on retrouve au dénominateur tous les termes du numérateur changés de signe.

Le même raisonnement s'applique au rapport, qui se déduit du rapport (20) en changeant G_i, g_k en G'_i, g'_k. Les nombres entiers f ne dépendent pas de ces constantes; les deux rapports seront donc égaux tous les deux à $+1$ ou à -1.

Remarquons aussi qu'on aurait pu se dispenser de tenir compte des lacets logarithmiques, puisqu'en définitive il s'agit de trouver ce que devient la fonction R aux points $(\xi^{(t)}, \xi_1^{(t)})$, $(\eta^{(t)}, \eta_1^{(t)})$, et qu'elle n'est pas altérée évidemment par les lacets $(O\xi^{(k)})$, $(O\eta^{(k)})$. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

15. Considérons maintenant la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$. Dans l'opération $D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$, il nous faut distinguer ici les termes que l'on obtient en prenant la dérivée de chaque terme de la fonction $\Theta^{(q)}$ par rapport à l'intégrale $v^{(t)}$. D'après la signification du symbole $D_{\zeta^{(1)}}$, on trouve ainsi le produit du terme primitif par $\pm\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}$, selon que ce terme répond à $\varepsilon_t = \pm 1$. Nous pourrons représenter l'ensemble de ces termes par l'expression

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\left(\Theta^{(q)}_{\varepsilon_t=+1} - \Theta^{(q)}_{\varepsilon_t=-1}\right).$$

Quant aux autres termes fournis par l'opération $D_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$, nous les désignerons maintenant par le symbole $\Delta_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$, en sorte que la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$ sera

$$\Theta_{(1)}^{(q)} = (w^{(1)} - \gamma_1)\Theta^{(q)} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\left(\Theta^{(q)}_{\varepsilon_t=+1} - \Theta^{(q)}_{\varepsilon_t=-1}\right) + \Delta_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}.$$

Il faut démontrer que le numérateur et le dénominateur du rapport

$$\frac{\prod_t \Theta_{(1)}^{(q)}[u^{(t)}(\eta^{(t)}) - G_i, \ldots]}{\prod_t \Theta_{(1)}^{(q)}[u^{(t)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots]} \tag{25}$$

sont égaux terme à terme.

Digitized by Google

Occupons-nous d'abord de l'opération $\Delta_{\zeta^{(1)}}\Theta^{(q)}$. Prenons un terme de la fonction $\Theta^{(q)}$ pour lequel $\varepsilon_t = -1$; c'est le produit d'une exponentielle par une fonction Θ; on peut y différentier soit la fonction Θ, soit une intégrale $v^{(k)}$, k étant différent de t. Dans le premier cas, on trouve le produit de l'exponentielle primitive par la somme des p dérivées partielles de cette fonction Θ multipliées respectivement par les dérivées $\left(\frac{du^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}$, c'est-à-dire par les périodes a_{1t}. Ayant supprimé le facteur $e^{-\frac{1}{2}(v^{(t)}-g_t)}$ et remplacé x et y par $\eta^{(t)}$, $\eta_1^{(t)}$, nous obtiendrons ainsi p termes déterminés appartenant au numérateur du rapport (25). L'exponentielle commune à ces termes est de la forme (22) et les arguments des dérivées partielles de la fonction Θ sont ceux de la fonction (21). Or, il existe dans la fonction $\Theta^{(q)}$ un autre terme qui ne diffère du premier que par le changement de $\varepsilon_t = -1$ en $\varepsilon_t = +1$; une opération analogue à la précédente fournira p termes appartenant au dénominateur du rapport (25). L'exposant de l'exponentielle commune à ces termes est de la forme (24), et les dérivées partielles de la fonction Θ ont pour arguments ceux de la fonction (23). Ces deux séries de p termes sont les mêmes d'après le numéro précédent.

Dans le second cas, on différentie une intégrale $v^{(k)}$; on reproduit ainsi le terme primitif de la fonction $\Theta^{(q)}$ multipliée par $\frac{\varepsilon_k}{2}\left(\frac{dv^{(k)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}$. Les deux termes de la fonction $\Theta^{(q)}$, qui ne diffèrent entre eux que par le signe de ε_t, fourniront encore deux termes égaux.

Passons maintenant aux termes différents de ceux que l'on obtient par l'opération $\Delta_{\zeta^{(1)}}$. En remarquant que pour $x = \eta^{(t)}$ tous les termes de $\Theta^{(q)}$ pour lesquels $\varepsilon_t = +1$ s'annulent, on voit qu'il faudra écrire au numérateur du rapport (25) l'expression

$$\left[v^{(1)}(\eta^{(t)}) - \gamma_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]\Theta_t^{(q)}[u^{(i)}(\eta_1^{(t)}) - G_i, \ldots]$$

et au dénominateur

$$\left[v^{(1)}(\xi^{(t)}) - \gamma_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right]\Theta_t^{(q)}[u^{(i)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots].$$

Les fonctions $\Theta_t^{(q)}$ de ces deux expressions sont égales; quant à leurs

Digitized by Google

coefficients, ils sont égaux en vertu de la formule (5) du n° 3. Ainsi le rapport (25) est égal à + 1.

Supposons que, ayant formé les termes fournis par l'opération $\Delta_{\zeta^{(1)}}$, on les soumette à l'opération indiquée par le symbole $\Delta_{\zeta^{(2)}}$, puis qu'on fasse sur ces nouveaux termes l'opération $\Delta_{\zeta^{(3)}}$, et ainsi de suite. Le raisonnement qui précède montre que l'on arrivera dans tous les cas à une fonction jouissant de cette propriété, qu'en faisant d'une part $x = \eta^{(t)}$, $y = \eta_1^{(t)}$, et divisant tous les termes par $e^{-\frac{1}{2}(v^{(t)} - g_t)}$, et en faisant d'autre part $x = \xi^{(t)}$, $y = \xi_1^{(t)}$, puis divisant tous les termes par $e^{\frac{1}{2}(v^{(t)} - g_t)}$, les deux résultats obtenus sont égaux. La même propriété subsiste pour les termes que l'on obtient en effectuant cette série d'opérations sur les autres termes de $\Theta_{(1)}^{(q)}$, savoir

$$(w^{(1)} - \gamma_1)\,\Theta^{(q)} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\left(\Theta^{(q)}_{\varepsilon_t = +1} - \Theta^{(q)}_{\varepsilon_t = -1}\right).$$

Car on obtiendra d'abord, par la différentiation de $w^{(1)}$, les deux termes

$$\left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}} \Theta^{(q)}_t\,[u^{(t)}(\eta_1^{(t)}) - G_i, \ldots],$$

$$\left(\frac{dw^{(1)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}} \Theta^{(q)}_t\,[u^{(t)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots],$$

puis deux expressions que l'on peut écrire

$$\left[w^{(1)}(\eta_1^{(t)}) - \gamma_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right] \Delta_{t\,\zeta^{(1)}}\,\Theta^{(q)}\,[u^{(t)}(\eta_1^{(t)}) - G_i, \ldots],$$

$$\left[w^{(1)}(\xi^{(t)}) - \gamma_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{(t)}}{dx}\right)_{\zeta^{(1)}}\right] \Delta_{t\,\zeta^{(1)}}\,\Theta^{(q)}\,[u^{(t)}(\xi^{(t)}) - G_i, \ldots],$$

la lettre t placée sous le signe Δ indiquant toujours la suppression du facteur $e^{\pm\frac{1}{2}(v^{(t)} - g_t)}$. Ces expressions sont égales, d'après ce qui a été dit plus haut. On en conclut immédiatement que les résultats trouvés pour la fonction $\Theta_{(1)}^{(q)}$ s'étendent à la fonction $\Theta_{(2)}^{(q)}$, et successivement à toutes les fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$. En résumé, la valeur de l'intégrale (17) est $-2\pi\sqrt{-1}(g'_t - g_t)$, ce qui démontre les q équations intermédiaires.

16. Théorème III. — *La fonction* $\Theta_{(r)}^{(q)}(u_i, v_k, w_h)$ *de* $p + q + r$ *va-*

Digitized by Google

riables indépendantes est paire ou impaire suivant que le nombre r est pair ou impair.

On sait que la fonction θ de p variables indépendantes est paire. Il résulte de la série qui définit cette fonction θ que sa dérivée partielle par rapport à l'une des variables est impaire, qu'une nouvelle différentielle partielle donne une fonction paire et ainsi de suite. Cette remarque rend la proposition évidente pour la fonction $\theta_{(r)}$. Considérons maintenant la fonction $\theta^{(q)}$ définie par la somme

$$\sum_{\varepsilon} \theta\left(u_i + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k (v_k + H_k)}.$$

Un terme quelconque s'obtient quand on donne aux ε des valeurs déterminées. En changeant dans ce terme le signe des u_i et des v_k, il est aisé de voir que l'on obtient un autre terme de la fonction répondant à un changement de signe de tous les ε dans le terme donné. On a, en effet, la fonction θ étant paire,

$$\theta\left(-u_i + \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right) = \theta\left(u^{(i)} - \sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k A_{ki}\right).$$

Quant à l'exponentielle, elle devient, par le changement de signe des v_k,

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k v_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=q} \varepsilon_k H_k},$$

ce qui revient bien au changement de signes de tous les ε, puisque tous les termes de H_k contiennent un ε en facteur. Ainsi la fonction $\theta^{(q)}$ est paire. On voit immédiatement que l'opération $D_{\zeta^{(i)}}$ faite sur $\theta^{(q)}$ donne une fonction impaire.... On en conclut le théorème énoncé pour la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ qui a, par rapport à $\theta^{(q)}$ et aux variables w_k, la même composition que $\theta_{(r)}$ par rapport à θ et à ces mêmes variables w_k.

17. Théorème IV. — *On peut déterminer les constantes* G_i, g_k, γ_k *de façon que la fonction* $\theta^{(q)}_{(r)}(u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(k)} - \gamma_k)$ *admette* $p + q + r$ *zéros donnés arbitrairement.*

Digitized by Google

Soient (x_j, y_j) $p+q+r$ points arbitraires. Si l'on veut que ce soient des zéros de la fonction, on devra avoir, d'après les équations du théorème II,

$$G_i \equiv \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - C_i,$$

$$g_k \equiv \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) - D_k,$$

$$\gamma_h \equiv \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) - E_h.$$

Supposons que l'on ait remplacé les constantes par ces valeurs; les multiples des périodes ne font que multiplier la fonction par une exponentielle sans changer par conséquent ses zéros. Or, nous verrons dans la seconde Partie que le système des $p+q+r$ équations du théorème II, où l'on regarde les x_j comme inconnues, n'admet qu'une solution, d'où l'on conclut que les $p+q+r$ zéros de la fonction coïncident avec les $p+q+r$ zéros donnés. La fonction pourra s'écrire, à une exponentielle près,

$$(26) \qquad \theta^{(\eta)}_{(r)} \begin{cases} u^{(i)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) + C_i, \\ v^{(k)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) + D_k, \\ w^{(h)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) + E_h. \end{cases}$$

18. Théorème V. — *La fonction de $p+q+r$ variables indépendantes*

$$\theta^{(\eta)}_{(r)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - C_i, \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - D_k, \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - E_h\right]$$

est identiquement nulle.

Digitized by Google

Il suffit de remplacer dans la fonction (26), qui admet $p+q+r$ zéros donnés, le point variable (x, y) par l'un des $p+q+r$ points donnés, et de remarquer que la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ est paire ou impaire.

19. Théorème VI. — *Pour que la fonction de $p+q+r-1$ variables indépendantes (x_j, y_j)*

$$\theta^{(q)}_{(r)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - C'_i, \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - D'_k, \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - E'_h\right]$$

s'annule identiquement, il faut que l'on ait

$$C'_i \equiv C_i, \quad D'_k \equiv D_k, \quad E'_h = E_h.$$

Car, dans l'hypothèse admise, en considérant un nouveau point (x_{p+q+r}, y_{p+q+r}), la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$, dont les arguments sont

$$u^{(i)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) + C'_i,$$

$$v^{(k)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) + D'_k,$$

$$w^{(h)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) + E'_h,$$

admet les $p+q+r$ zéros (x_j, y_j). En comparant ce résultat avec les équations qui déterminent les zéros, on en conclut immédiatement les relations cherchées.

Des courbes adjointes.

20. Soient $\varphi_i(x, y)$, l'indice i variant de 1 à p, des polynômes du degré $m-3$ satisfaisant aux conditions relatives aux points critiques de la courbe fondamentale $F(x, y) = 0$, $\psi_k(x, y)$ et $\chi_h(x, y)$, l'indice k variant de 1 à q et l'indice h de 1 à r, des polynômes du degré $m-2$, satisfaisant également aux conditions des points critiques. Appelons

Digitized by Google

$(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ le premier membre de l'équation de la droite joignant les deux points $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$, c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \xi^{(k)} & \xi_1^{(k)} & 1 \\ \eta^{(k)} & \eta_1^{(k)} & 1 \end{vmatrix},$$

et $(\zeta^{(k)})$ le premier membre de l'équation de la tangente à la courbe $F(x,y)=0$ au point $(\zeta^{(k)}, \zeta_1^{(k)})$. Nous supposons que la courbe $\psi_k(x,y)=0$ passe par les $m-2$ points où la droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ coupe la courbe $F(x,y)=0$, outre les deux points qui la déterminent, et que la courbe $\chi_k(x,y)=0$ passe par les $m-2$ points où la tangente $(\zeta^{(k)})$ rencontre la courbe outre le point de contact. Soient enfin λ_i, μ_k et ν_k des constantes arbitraires. Considérons l'équation

$$(27) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i \varphi_i(x,y) + \sum_{k=1}^{k=q} \mu_k \frac{\psi_k(x,y)}{(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})} + \sum_{k=1}^{k=r} \nu_k \frac{\chi_k(x,y)}{(\zeta^{(k)})} = 0;$$

cette équation représente des courbes du degré $m+q+r-3$, qui satisfont aux conditions suivantes quelles que soient les constantes λ_i, μ_k, ν_k : 1° elles remplissent toutes les conditions relatives aux points critiques; 2° elles passent par les $m-2$ points où chaque droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ rencontre $F(x,y)=0$ en faisant abstraction des deux points qui la déterminent, et par les $m-2$ points différents du point de contact où chaque droite $(\zeta^{(k)})$ rencontre la même courbe ; 3° elles passent par les $\frac{1}{2}(q+r)(q+r-1)$ points d'intersection des $q+r$ droites prises deux à deux. Nous dirons, pour abréger, qu'une courbe est *adjointe* quand elle satisfait à ces trois séries de conditions, et nous allons démontrer que l'équation (27) est l'équation générale des courbes adjointes du degré $m+q+r-3$. Une courbe de ce degré est, en effet, déterminée par $\frac{1}{2}(m+q+r-3)(m+q+r)$ conditions. Le nombre A des conditions relatives aux points critiques est $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-p$. Les nombre des conditions nécessaires pour achever de déterminer une courbe adjointe est donc

$$\tfrac{1}{2}(m+q+r-3)(m+q+r) - A - (m-2)(q+r) - \tfrac{1}{2}(q+r)(q+r-1) = p+q+r-1;$$

Digitized by Google

c'est bien le nombre des paramètres arbitraires qui entrent dans l'équation (27).

Supposons maintenant que l'on prenne sur la courbe $F(x,y)=0$ les $p+q+r-1$ points qui achèvent de déterminer une courbe adjointe; nous allons voir que cette courbe rencontre encore $F(x,y)=0$ en $p+q+r-1$ autres points qui se trouvent ainsi déterminés par les autres. En effet, le nombre des points communs aux deux courbes équivaut à $m(m+q+r-3)$. Les points critiques donnent un nombre de points communs qui équivaut à $2A$. Le nombre des points qui sont déterminés par les autres est donc

$$m(m+q+r-3)-(m-1)(m-2)$$
$$+2p-(m-2)(q+r)-(p+q+r-1)=p+q+r-1.$$

21. Désignons par (a'_j, b'_j) les $p+q+r-1$ points qui servent à déterminer une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ et par (a_j, b_j) les $p+q+r-1$ points qui résultent des autres. Le théorème d'Abel appliqué à une des intégrales de première espèce donne

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [u^{(i)}(a'_j)+u^{(i)}(a_j)]=\Gamma_i,$$

Γ_i étant une constante indépendante des points (a'_j, b'_j) quand on fait varier d'une façon continue la courbe adjointe $\Phi(x,y)=0$.

Appliquons maintenant le théorème d'Abel à une intégrale de troisième espèce $v^{(k)}$ et appelons $\Psi(x,y)=0$ l'équation d'une autre courbe adjointe déterminée par les $p+q+r-1$ points (α'_j, β'_j) et rencontrant encore $F(x,y)=0$ aux points (α_j, β_j), on aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [v^{(k)}(a'_j)+v^{(k)}(a_j)-v^{(k)}(\alpha'_j)-v^{(k)}(\alpha_j)]+\log\frac{\Phi(\xi^{(k)},\xi_1^{(k)})\,\Psi(\eta^{(k)},\eta_1^{(k)})}{\Phi(\eta^{(k)},\eta_1^{(k)})\,\Psi(\xi^{(k)},\xi_1^{(k)})}=0.$$

Or nous allons voir que la quantité soumise au logarithme dans cette expression est égale à l'unité. Supposons d'abord que $p+q+r-2$ des points (α'_j, β'_j) coïncident respectivement avec les points (a'_j, b'_j) de même indice. L'équation des courbes adjointes du degré $m+q+r-3$, passant par ces $p+q+r-2$ points, renferme li-

Digitized by Google

néairement un paramètre arbitraire et peut s'écrire $\Phi + k\Psi = 0$. On achève de déterminer une courbe de ce faisceau, en la faisant passer par un point de $F(x, y) = 0$. Remarquons maintenant que la courbe ne peut passer par le point $(\xi^{(k)}, \xi_1^{(k)})$, sans passer en même temps par le point $(\eta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$; car elle rencontre déjà la droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ aux $m - 2$ points qui appartiennent à $F(x, y) = 0$ et, en outre, aux $q + r - 1$ points où la droite $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$ est rencontrée par les autres droites. Elle ne peut donc passer par l'un des deux points en question, sans contenir la droite qui les joint. De là nous concluons que les valeurs de k obtenues en écrivant que la courbe passe par l'un ou l'autre des deux points sont égales. La quantité soumise au logarithme est alors égale à l'unité, et le théorème d'Abel se traduit par l'équation

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [\varphi^{(k)}(a'_j) + \varphi^{(k)}(a_j)] = \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [\varphi^{(k)}(\alpha'_j) + \varphi^{(k)}(\alpha_j)].$$

Dans cette équation $p + q + r - 2$ intégrales disparaissent comme communes aux deux membres; mais la même équation a encore lieu, lorsque tous les points (a'_j, b'_j), (α'_j, β'_j) sont distincts. On peut, en effet, passer de l'un des systèmes de points à l'autre système, par l'intermédiaire de courbes adjointes ayant toujours $p + q + r - 2$ points communs. Appelant Δ_k la somme des intégrales pour les $p + q + r - 1$ points (a'_j, b'_j), et considérant le faisceau de courbes adjointes qui passent par $p + q + r - 2$ de ces points, nous appliquerons le théorème précédent et remplacerons ainsi le point (a_j, b'_j) que l'on avait laissé de côté par un des points (α'_j, β'_j) sans changer la constante Δ_k. On considère ensuite un faisceau de courbes passant par le point (α'_j, β'_j) déjà introduit et par $p + q + r - 3$ des points (a'_j, b_j); on remplacera ainsi un point (a'_j, b'_j) par un nouveau point (α'_j, β'_j). En faisant varier la courbe adjointe d'une façon continue, on aura donc

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [\varphi^{(k)}(a'_j) + \varphi^{(k)}(a_j)] = \Delta_k,$$

Δ_k étant une constante indépendante des points (a'_j, b'_j) qui servent à déterminer la courbe.

Digitized by Google

En appliquant le théorème d'Abel à une intégrale normale de seconde espèce, on a

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} [w^{(h)}(a'_j) + w^{(h)}(a_j) - w^{(h)}(x'_j) - w^{(h)}(x_j)] = \left(\frac{d}{dx}\log\frac{\Psi}{\Phi}\right)_{\zeta^{(h)}}.$$

Le second membre de cette équation est nul, parce que la courbe adjointe ne peut passer par le point $(\zeta^{(h)}, \zeta_1^{(h)})$ sans contenir la droite $(\zeta^{(h)})$ tout entière, et par suite sans être tangente à $F(x,y) = 0$. On verra, comme précédemment, que si l'on fait varier la courbe adjointe d'une façon continue, on aura

$$\sum_{j=1}^{=p+q+r-1} [w^{(h)}(a'_j) + w^{(h)}(a_j)] = \varepsilon_h,$$

ε_h étant une constante indépendante des points qui servent à déterminer la courbe adjointe.

22. Théorème VII. — *Les constantes* $\Gamma_i, \Delta_k, \varepsilon_h$ *introduites par la considération des courbes adjointes ne diffèrent que par des multiples des périodes du double des constantes fondamentales* C_i, D_k, E_h.

La fonction de $p+q+r-1$ variables indépendantes (a'_j, b'_j)

$$\theta\left[\sum_{i=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(a'_j) - C_i, \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(a'_j) - D_k, \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(a_j) - E_h\right]$$

est identiquement nulle, d'après le théorème V. En tenant compte des relations données par le théorème d'Abel, il en est donc de même de la suivante :

$$\theta\left[-\sum_{j=1}^{i=p+q+r-1} u^{(i)}(a_j) + \Gamma_i - C_i, -\sum_{i=1}^{=p+q+r-1} v^{(k)}(a_j) + \Delta_k - D_k, -\sum_{i=1}^{=p+q+r-1} w^{(h)}(a_j) + \varepsilon_h - E_h\right].$$

On a donc, en vertu du théorème VI,

$$\Gamma_i \equiv 2C_i, \quad \Delta_k \equiv 2D_k, \quad \varepsilon_h \equiv 2E_h.$$

Digitized by Google

Corollaire. — Le théorème précédent donne pour la détermination des constantes fondamentales les équations

$$C_i = \tfrac{1}{2}\Gamma_i + m_i\pi\sqrt{-1} + \sum_{s=1}^{s=p} n_s a_{is},$$

$$D_k = \tfrac{1}{2}\Delta_k + \lambda_k\pi\sqrt{-1} + \sum_{s=1}^{s=p} n_s A_{ks},$$

$$E_h = \tfrac{1}{2}\varepsilon_h + \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=p} n_s a_{hs},$$

m_i, λ_k, n_s étant des nombres entiers. Les constantes cherchées ne peuvent être déterminées qu'à des multiples près des périodes; mais on ne peut pas choisir arbitrairement les entiers m_i, λ_k, n_s. Considérons une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ dont les $2(p+q+r-1)$ points d'intersection avec $F(x,y)=0$ soient confondus deux à deux. On aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(a_j) = \tfrac{1}{2}\Gamma_i,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(a_j) = \tfrac{1}{2}\Delta_k,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(a_j) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_h.$$

La fonction

$$\theta_{(r)}^{(q)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - C_i,\ \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - D_k,\ \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - E_h\right]$$

s'annule identiquement. On peut l'écrire

$$\theta_{(r)}^{(q)}\left(\tfrac{1}{2}\Gamma_i - C_i,\ \tfrac{1}{2}\Delta_k - D_k,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon_h - E_h\right),$$

ou bien

$$(28)\quad \theta_{(r)}^{(q)}\left(-m_i\pi\sqrt{-1} - \sum_{s=1}^{s=p} n_s a_{is},\ -\lambda_k\pi\sqrt{-1} - \sum_{s=1}^{s=p} n_s A_{ks},\ -\tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=p} n_s a_{hs}\right),$$

Digitized by Google

et si cette fonction s'annule, on aura, d'après le théorème VI, les véritables valeurs des constantes fondamentales. Si dans la fonction (28) on change le signe de tous les arguments, la fonction sera multipliée par $(-1)^r$. D'un autre côté, les arguments nouveaux ne diffèrent des anciens que par des multiples des périodes, le rapport de la nouvelle fonction à la fonction (28) sera, d'après le n° 7, et réduction faite de l'exposant,

$$e^{\pi\sqrt{-1}\left(\sum_{k=1}^{k=q}\varepsilon_k\lambda_k+\sum_{i=1}^{i=p}m_in_i\right)},$$

et l'on sera certain que la fonction (28) s'annule si l'on fait en sorte que le coefficient de $\pi\sqrt{-1}$ dans cette dernière exponentielle soit d'une parité différente de celle de r. Remarquons que l'on peut écrire simplement $\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k$ au lieu de $\sum_{q=1}^{k=q}\varepsilon_k\lambda_k$; car la parité de ce dernier nombre reste la même pour tous les systèmes de valeurs de ε_k, en sorte qu'on pourra les supposer tous égaux à $+1$. On en conclut finalement qu'il suffit de prendre des nombres entiers rendant impaire ou paire la somme $\sum_{k=1}^{k=q}\lambda_k+\sum_{i=1}^{i=p}m_in_i$ suivant que r est pair ou impair.

23. Théorème VIII. — *La fonction* $\Theta_{(r)}^{(q)}$, *dont les arguments sont*

$$u^{(i)}(x)+\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1}u^{(i)}(x_j)-u^{(i)}(\alpha)-C_i,$$

$$v^{(k)}(x)+\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1}v^{(k)}(x_j)-v^{(k)}(\alpha)-D_k,$$

$$w^{(h)}(x)+\sum_{j=1}^{j=p+q+r-1}w^{(h)}(x_j)-w^{(h)}(\alpha)-E_h,$$

admet le zéro (α,β) *et* $p+q+r-1$ *autres zéros qui sont indépendants du premier.*

Faisons passer une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ par les

Digitized by Google

$p+q+r-1$ points (x_j, y_j), et appelons (x'_j, y'_j) les $p+q+r-1$ autres points d'intersection de cette courbe avec $F(x,y)=0$. On peut, d'après le théorème d'Abel, remplacer les arguments de la fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ par ceux-ci :

$$u^{(i)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x'_j) - u^{(i)}(\alpha) + C_i,$$

$$v^{(k)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x'_j) - v^{(k)}(\alpha) + D_k,$$

$$w^{(h)}(x) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x'_j) - w^{(h)}(\alpha) + E_h,$$

ce qui montre qu'elle admet pour zéro le point (α, β), et les $p+q+r-1$ points (x'_j, y'_j) qui sont indépendants de (α, β).

24. Théorème IX. — *Soient* $\Phi(x,y)=0$, $\Psi(x,y)=0$ *les équations de deux courbes données du degré* n, (a_l, b_l) *les* mn *points d'intersection de la première,* (α_l, β_l) *les* mn *points d'intersection de la seconde avec* $F(x,y)=0$, *les deux produits*

$$V = \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\theta^{(q)}_{(r)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha_l) - C_i, \dots\right]}{\theta^{(q)}_{(r)}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha_l) - C_i, \dots\right]},$$

$$P = \prod_{j=1}^{=p+q+r} \frac{\Psi(x_j, y_j)}{\Phi(x_j, y_j)}$$

ne diffèrent que par une constante.

Considérons une des fonctions $\theta^{(q)}_{(r)}$ du numérateur qui répond à une valeur déterminée de l. Regardons, pour un moment, le point (x_1, y_1) comme seul variable; la fonction admet le zéro (α_l, β_l) et $p+q+r-1$ autres qui dépendent des points (x_2, y_2), ... La fonction $\theta^{(q)}_{(r)}$ du numé-

Digitized by Google

rateur qui répond à la même valeur de l admet le zéro (a_l, b_l) et $p+q+r-1$ autres qui sont les mêmes que pour la fonction précédente. Le quotient de ces deux fonctions admet donc le seul zéro (α_l, β_l) et le seul infini (a_l, b_l). Supposons que l'on fasse varier le chemin qui conduit de l'origine (x_0, y_0) au point (x_1, y_1); les intégrales des trois espèces augmentent de multiples de leurs périodes et prennent les valeurs indiquées au n° 7; le quotient des deux fonctions Θ_r^q se reproduit multiplié par l'exponentielle

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i [u^{(i)}(\alpha_l) - u^{(i)}(a_l)]}.$$

On en conclut que V considéré comme fonction de (x_1, y_1) seulement admet les mn zéros (α_l, β_l), les mn infinis (a_l, b_l) et que par l'addition des périodes elle se reproduit multipliée par l'exponentielle

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i \sum_{l=1}^{l=mn} [u^{(i)}(\alpha_l) - (u^{(i)} a_l)]}.$$

Or, si l'on passe de la courbe $\Phi = 0$ à la courbe $\Psi = 0$ par une variation continue, on a, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{l=1}^{l=mn} [u^{(i)}(\alpha_l) - u^{(i)}(a_l)] = 0,$$

et la fonction $V(x_1, y_1)$ ne diffère de $\frac{\Psi(x_1, y_1)}{\Phi(x_1, y_1)}$, qui a les mêmes zéros et les mêmes infinis, que par un facteur indépendant de (x_1, y_1) (1).

En regardant maintenant les points (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... successivement comme seuls variables, on en conclut que la fonction V ne diffère du produit P que par une constante. On aura donc

$$V = CP. \tag{29}$$

La constante C s'obtient en supposant que les $p+q+r$ points (x_j, y_j)

(1) BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 154.

Digitized by Google

coïncident avec l'origine (x_0, y_0) des intégrales abéliennes, ce qui donne

$$C = \left[\frac{\Phi(x_0, y_0)}{\Psi(x_0, y_0)}\right]^{p+q+r} \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\alpha_l) + C_i, \ldots]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u^{(i)}(\alpha_l) + C_i, \ldots]}.$$

La seconde Partie, qui paraîtra dans un prochain numéro, aura pour objet l'application de ce qui précède à l'intégration d'un système d'équations différentielles analogue au système abélien.

Digitized by Google

DE LA

RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES

QUATERNAIRES POSITIVES,

PAR M. LÉON CHARVE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

Je me propose d'appliquer aux formes quadratiques quaternaires positives la méthode de réduction donnée par M. Selling (*Journal de Borchardt*, t. LXXVII, et *Journal de M. Resal*, 3e série, t. III), pour les formes quadratiques ternaires positives. Dans un travail inséré au supplément du tome VIII des *Annales de l'École Normale*, année 1880, j'ai reproduit la méthode très remarquable de M. Selling et j'ai fait ensuite l'étude des substitutions qui conduisent à la réduite équivalente à une forme donnée.

Je vais reprendre pour les formes quaternaires la même méthode et la même étude.

Je montrerai d'abord qu'*il y a toujours une et une seule forme réduite équivalente à une forme donnée;* je montrerai ensuite que *la réduction peut toujours être obtenue par l'emploi répété de deux substitutions seulement*.

1. Soit

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fxz + 2Gxt + 2Hyz + 2Kyt + 2Lzt$$

une forme quadratique quaternaire que je suppose positive et dans laquelle les coefficients A, B, ..., K, L sont quelconques, rationnels ou irrationnels.

Digitized by Google

Si dans la forme f on remplace x, y, z, t par les valeurs fournies par la substitution

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T, \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T, \\ t = \delta X + \delta' Y + \delta'' Z + \delta''' T, \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \gamma''', \delta'''$ sont des nombres entiers, on obtiendra une forme

$$F = A'X^2 + B'Y^2 + C'Z^2 + D'T^2 + 2E'XY + 2F'XZ + 2G'XT + 2H'YZ + 2K'YT + 2L'ZT,$$

qui sera équivalente à la forme f si le déterminant de la substitution est égal à ± 1.

2. Cela posé, introduisons dans f une cinquième variable u, en remplaçant x, y, z, t respectivement par $x - u, y - u, z - u, t - u$, on obtiendra une forme qu'on peut écrire

$$\varphi = a(x-y)^2 + b(x-z)^2 + c(x-t)^2 + d(x-u)^2 + e(y-z)^2 + f(y-t)^2 + g(y-u)^2 + h(z-t)^2 + k(z-u)^2 + l(t-u)^2,$$

dans laquelle $a, b, \ldots, k, l$ ont des relations faciles à établir avec A, B, ..., K, L, et qui devient identique à f quand on fait $u = 0$.

Et de même, si nous introduisons dans F une cinquième variable U en changeant X, Y, Z, T, respectivement en X — U, Y — U, Z — U, T — U, nous obtiendrons une forme

$$\Phi = a'(X-Y)^2 + b'(X-Z)^2 + c'(X-T)^2 + d'(X-U)^2 + e'(Y-Z)^2 + f'(Y-T)^2 + g'(Y-U)^2 + h'(Z-T)^2 + k'(Z-U)^2 + l'(T-U)^2,$$

et il est évident que l'on passerait directement de φ à Φ en posant

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T + \alpha^{IV} U, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T + \beta^{IV} U, \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T + \gamma^{IV} U, \\ t = \delta X + \delta' Y + \delta'' Z + \delta''' T + \delta^{IV} U, \\ u = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

les quantités α^{IV}, β^{IV}, γ^{IV}, δ^{IV} étant définies par les relations

$$\begin{aligned}
\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\alpha^{IV}&=0,\\
\beta+\beta'+\beta''+\beta'''+\beta^{IV}&=0,\\
\gamma+\gamma'+\gamma''+\gamma'''+\gamma^{IV}&=0,\\
\delta+\delta'+\delta''+\delta'''+\delta^{IV}&=0,
\end{aligned}$$

et, comme x, y, z, t n'entrent dans φ que par leurs différences, la substitution (2) est équivalente à la substitution

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
x&=\alpha_1 X+\alpha_2 Y+\alpha_3 Z+\alpha_4 T+\alpha_5 U,\\
y&=\beta_1 X+\beta_2 Y+\beta_3 Z+\beta_4 T+\beta_5 U,\\
z&=\gamma_1 X+\gamma_2 Y+\gamma_3 Z+\gamma_4 T+\gamma_5 U,\\
t&=\delta_1 X+\delta_2 Y+\delta_3 Z+\delta_4 T+\delta_5 U,\\
u&=\varepsilon_1 X+\varepsilon_2 Y+\varepsilon_3 Z+\varepsilon_4 T+\varepsilon_5 U,
\end{aligned}\right.$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ sont liés à $\alpha, \alpha', \ldots, \delta'', \delta'''$, par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha &=\alpha_1-\varepsilon_1, & \beta &=\beta_1-\varepsilon_1, & \gamma &=\gamma_1-\varepsilon_1, & \delta &=\delta_1-\varepsilon_1,\\
\alpha' &=\alpha_2-\varepsilon_2, & \beta' &=\beta_2-\varepsilon_2, & \gamma' &=\gamma_2-\varepsilon_2, & \delta' &=\delta_2-\varepsilon_2,\\
\alpha'' &=\alpha_3-\varepsilon_3, & \beta'' &=\beta_3-\varepsilon_3, & \gamma'' &=\gamma_3-\varepsilon_3, & \delta'' &=\delta_3-\varepsilon_3,\\
\alpha''' &=\alpha_4-\varepsilon_4, & \beta''' &=\beta_4-\varepsilon_4, & \gamma''' &=\gamma_4-\varepsilon_4, & \delta''' &=\delta_4-\varepsilon_4,\\
\alpha^{IV} &=\alpha_5-\varepsilon_5, & \beta^{IV} &=\beta_5-\varepsilon_5, & \gamma^{IV} &=\gamma_5-\varepsilon_5, & \delta^{IV} &=\delta_5-\varepsilon_5,
\end{aligned}$$

de sorte que les coefficients de l'une des lignes, par exemple $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$, restent complètement arbitraires.

Nous pourrons donc remplacer la forme f et toutes les formes équivalentes par des formes à cinq variables; nous passerons d'une forme à une autre par des substitutions analogues à la substitution (3); il est d'ailleurs toujours facile de revenir de la substitution (3) à la substitution (1) : il suffit de retrancher des coefficients de chacune des lignes les coefficients de la cinquième et de faire ensuite $u=0$, $U=0$. On voit donc que la substitution (3) donnera une forme Φ équivalente à φ, toutes les fois que la substitution (1) aura son déterminant égal à ± 1.

3. Considérons donc la forme

$$\varphi=a(x-y)^2+b(x-z)^2+c(x-t)^2+d(x-u)^2+e(y-z)^2+f(y-t)^2+g(y-u)^2+h(z-t)^2+k(z-u)^2+l(t-u)^2;$$

Digitized by Google

je dirai que cette forme est *réduite*, si elle satisfait à l'une des trois conditions suivantes, que j'ai publiées l'an dernier dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

1° *Ou bien tous les coefficients* $a, b, \ldots, k, l$ *sont positifs;*

2° *Ou bien* a *est seul négatif et il est inférieur en valeur absolue à* b, c, d, e, f, g;

3° *Ou bien* a *et* h *sont seuls négatifs, de plus* a *est inférieur en valeur absolue à* b, c, d, e, f, g; *en même temps* h *est inférieur en valeur absolue à* b, c, e, f, k, l; *enfin* $a + h$ *est inférieur en valeur absolue à* b, c, e, f.

Ces conditions peuvent s'énoncer ainsi :

1° *Ou bien tous les coefficients sont positifs.*

2° *Ou bien un seul est négatif et il est inférieur en valeur absolue aux six coefficients qui multiplient des différences contenant une des deux lettres de la différence dont le coefficient est négatif.*

3° *Ou bien deux coefficients sont négatifs et deux seulement. De plus, les différences multipliées par ces deux coefficients n'ont aucune lettre commune; chacun d'eux est inférieur en valeur absolue aux six coefficients des différences qui ont une lettre commune avec la différence multipliée par ce coefficient négatif. Enfin la somme de ces deux coefficients négatifs est inférieure en valeur absolue à l'un quelconque des quatre coefficients des différences formées avec deux des quatre lettres contenues dans les deux différences dont les coefficients sont négatifs.*

Pour que cette définition de la *réduite* soit précise, il faut démontrer : 1° qu'il y a toujours une forme équivalente à la forme donnée et vérifiant l'une des trois conditions précédentes; 2° que cette forme est unique (1), par quoi il faut bien entendre que, si l'on trouve une forme vérifiant l'une des conditions de réduction, il n'existera aucune forme équivalente satisfaisant soit à cette première condition, soit à l'une des deux autres.

4. Je commence par démontrer que la *réduite ainsi définie existe toujours.*

(1) Nous considérerons comme identiques les termes qu'on déduit d'une forme donnée par la permutation des variables.

Digitized by Google

Je dis que si, parmi les formes équivalentes à une forme donnée, on choisit celle pour laquelle la somme des coefficients

$$a+b+c+d+e+f+g+h+k+l$$

est la plus petite possible, cette forme vérifie l'une des conditions de réduction.

Supposons en effet que φ soit cette forme pour laquelle la somme des coefficients est minima; si cette forme φ a quelque coefficient négatif, une permutation des variables permet toujours de supposer que a est négatif; faisons alors la substitution

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{T}-\mathrm{Z},\\ y &= \mathrm{X}-\mathrm{U},\\ z &= \mathrm{Y}-\mathrm{U},\\ t &= \mathrm{T}-\mathrm{U},\\ u &= 0, \end{aligned}$$

nous aurons la transformée

$$\begin{aligned} \Phi = {} & a(\mathrm{T}-\mathrm{Z}-\mathrm{X}+\mathrm{U})^2+b(\mathrm{T}-\mathrm{Z}-\mathrm{Y}+\mathrm{U})^2+c(\mathrm{Z}-\mathrm{U})^2+d(\mathrm{Z}-\mathrm{T})^2\\ & +e(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2+f(\mathrm{X}-\mathrm{T})^2+g(\mathrm{X}-\mathrm{U})^2+h(\mathrm{Y}-\mathrm{T})^2\\ & +k(\mathrm{Y}-\mathrm{U})^2+l(\mathrm{T}-\mathrm{U})^2, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi = {} & e(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2-a(\mathrm{X}-\mathrm{Z})^2+(a+f)(\mathrm{X}-\mathrm{T})^2+(a+g)(\mathrm{X}-\mathrm{U})^2-b(\mathrm{Y}-\mathrm{Z})^2\\ & +(h+b)(\mathrm{Y}-\mathrm{T})^2+(k+b)(\mathrm{Y}-\mathrm{U})+(a+b+d)(\mathrm{Z}-\mathrm{T})^2\\ & +(a+b+c)(\mathrm{Z}-\mathrm{U})^2+(l-a-b)(\mathrm{T}-\mathrm{U})^2, \end{aligned}$$

et la somme des coefficients de Φ surpasse de

$$a+b$$

la somme des coefficients de φ; si donc $a+b$ est négatif, φ n'est pas, contrairement à l'hypothèse, la forme pour laquelle la somme des coefficients est minima.

Donc non seulement b doit être positif, mais encore supérieur à la valeur absolue de a; et la même chose peut être dite de c, d, e, f, g, car une permutation des variables permet toujours d'amener l'une de ces lettres à la seconde place, pendant que a reste à la première.

Digitized by Google

Donc, outre a, les seuls coefficients qui puissent être encore négatifs sont h, k, l; s'ils ne sont pas tous positifs ou nuls, on peut toujours supposer que h est négatif, et si alors on amène h à la première place par une permutation des variables, la démonstration précédente montrera que k et l doivent être positifs, et que de plus h doit être inférieur en valeur absolue à b, c, e, f, k, l.

Par conséquent, dans la forme, dont la somme des coefficients est minima, il ne peut y avoir au plus que deux coefficients négatifs, savoir a et h, et ces coefficients, déjà limités comme on vient de le voir, le sont encore par les considérations suivantes.

5. Faisons dans φ la substitution

$$\begin{aligned} x &= Y - X, \\ y &= U - T, \\ z &= U - Z, \\ t &= Y - T, \\ u &= 0, \end{aligned}$$

nous obtiendrons la transformée

$$\begin{aligned} &a(Y-X-U+T)^2 + b(Y-X-U+Z)^2 + c(X-T)^2 + d(X-Y)^2 + e(Z-T)^2 \\ &+ f(Y-U)^2 + g(T-U)^2 + h(U-Z-Y+T)^2 + k(Z-U)^2 + l(Y-T)^2, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} &(a+b+d)(X-Y)^2 + b(X-Z)^2 + (a+c)(X-T)^2 - (a+b)(X-U)^2 \\ &- (b+h)(Y-Z)^2 + (h+l-a)(Y-T)^2 + (a+b+h+f)(Y-U)^2 \\ &+ (e+h)(Z-T)^2 + (b+h+k)(Z-U)^2 + (a+g-h)(T-U)^2 \end{aligned}$$

et la somme des coefficients de cette dernière forme surpasse la somme des coefficients de φ de la quantité

$$a + h + b.$$

Donc, pour que la somme des coefficients de φ soit en effet minima, il est nécessaire, si a et h sont négatifs, qu'en valeur absolue $a + h$ soit inférieur à b, c'est-à-dire à l'un quelconque des coefficients des différences autres que $x - y$ et $z - t$ qu'on peut former avec les quatre

Digitized by Google

lettres x, y, z, t. En d'autres termes, il faut que $a + h$ soit inférieur en valeur absolue à b, c, e, f.

Il est donc maintenant démontré que si, parmi les formes équivalentes à une forme donnée, on choisit la forme dont la somme des coefficients est minima, cette forme vérifiera toujours l'une des conditions de réduction.

6. On voit en outre qu'on pourra toujours parvenir à une forme dont les coefficients vérifient les conditions de réduction en employant les substitutions qui permutent les variables et aussi les deux substitutions

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{T} - \mathrm{Z}, & x &= \mathrm{Y} - \mathrm{X}, \\ y &= \mathrm{X} - \mathrm{U}, & y &= \mathrm{U} - \mathrm{T}, \\ z &= \mathrm{Y} - \mathrm{U}, & z &= \mathrm{U} - \mathrm{Z}, \\ t &= \mathrm{T} - \mathrm{U}, & t &= \mathrm{Y} - \mathrm{T}, \\ u &= 0, & u &= 0, \end{aligned}$$

car leur emploi permet de réduire indéfiniment la somme des coefficients des formes qui ne satisfont pas aux conditions de réduction. Nous reviendrons plus loin (n° 8) sur ce sujet.

7. Je vais enfin démontrer que, abstraction faite des permutations possibles entre les variables x, y, z, t, u, *il n'existe qu'une seule forme capable de vérifier l'une des conditions de réduction.*

La démonstration résultera de ce que toute substitution appliquée à une telle forme augmente nécessairement la somme des coefficients, à moins qu'elle ne produise qu'une permutation des variables; de sorte que, si deux formes équivalentes non identiques étaient en même temps réduites, la somme des coefficients augmenterait en passant, soit de la première à la seconde, soit de la seconde à la première, ce qui est évidemment impossible.

Pour le prouver, je remarque d'abord que la somme $a + b + \ldots + k + l$ des coefficients est égale à la moitié de la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2, lorsqu'on développe les différences contenues dans φ.

Je partage maintenant la démonstration en trois parties correspondant aux trois conditions de réduction :

Digitized by Google

1° Je suppose que la forme φ vérifie la première des conditions de réduction, c'est-à-dire que tous les coefficients soient positifs.

Soit une forme Φ équivalant à φ et ne s'en déduisant pas par une permutation des variables. La substitution qui permet de passer de φ à Φ remplace alors certaines différences par des expressions contenant plus de deux lettres. Supposons que $x-y$ soit, par exemple, remplacé par $x+y-z-t$; alors, au lieu de $a(x-y)^2$, on aura

$$a(x+y-z-t)^2,$$

et, quand on fera la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2, la quantité a entrera quatre fois dans cette somme au lieu de n'y entrer que deux fois; la somme des coefficients sera donc augmentée.

Ainsi, pour que la somme des coefficients n'augmente pas par l'emploi d'une substitution, il est nécessaire que toute différence dont le coefficient n'est pas nul, c'est-à-dire toute différence entrant effectivement dans φ, soit remplacée par une différence, ce qui exige que la substitution se réduise à une permutation des variables x, y, z, t, u.

2° Supposons que la forme φ vérifie la seconde des conditions de réduction, c'est-à-dire que le coefficient a soit seul négatif et inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g.

De l'identité

$$(x+y-z-t)^2=-(x-y)^2-(z-t)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2.$$

on tire

$$(x-y)^2=-(x+y-z-t)^2-(z-t)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2,$$

et, par conséquent, si nous posons $a=-a'$, la forme φ deviendra

$$\begin{aligned}&a'(x+y-z-t)^2+(b-a')(x-z)^2+(c-a')(x-t)^2\\&+d(x-u)^2+(e-a')(y-z)^2+(f-a')(y-t)^2+g(y-u)^2\\&+(h+a')(z-t)^2+k(z-u)^2+l(t-u)^2,\end{aligned}$$

et, introduisant des coefficients $b', c', d', e', f', g', h', k', l'$, nous écrirons cette forme

$$\begin{aligned}\varphi'=&a'(x+y-z-t)^2+b'(x-z)^2+c'(x-t)^2+d'(x-u)^2\\&+c'(y-z)^2+f'(y-t)^2+g'(y-u)^2\\&+h'(z-t)^2+k'(z-u)^2+l'(t-u)^2,\end{aligned}$$

Digitized by Google

où tous les coefficients $a', b', \ldots, k', l'$ sont positifs. De plus, d', g' et h' sont tous trois supérieurs à a'.

Faisons maintenant une substitution S quelconque; si cette substitution remplace $x+y-z-t$ par un polynôme de quatre lettres, il sera nécessaire, si la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2 n'augmente pas, que les différences de deux lettres soient remplacées par de simples différences de deux lettres, ce qui exige que la substitution se réduise à une permutation.

Si le polynôme $x+y-z-t$ était remplacé par un polynôme contenant trois lettres, la plus simple expression possible de ce polynôme serait $x+y-2t$, et la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2 croîtrait nécessairement.

Enfin, si $x+y-z-t$ était remplacé par une différence de deux lettres, la lettre a' qui entre quatre fois dans des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2 n'entrerait plus que deux fois. Quelqu'une des lettres $b', c', \ldots, k', l'$ pourrait alors entrer plus de deux fois, et, par conséquent, quelque différence pourrait être remplacée par un polynôme contenant plus de deux lettres; mais il serait nécessaire, pour que la somme des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2 n'augmentât pas, que les différences $x-u$, $y-u$ et $z-t$ fussent remplacées par de simples différences, en même temps que $x+y-z-t$; mais cette hypothèse est inadmissible.

En effet, nous pouvons toujours supposer que, dans la substitution S, la quantité u est remplacée par zéro; et, comme $x-u$ et $y-u$ doivent être remplacés par de simples différences, il faut que, dans la substitution S, x et y soient exprimés par des différences de deux lettres.

Soient d'abord x et y exprimés au moyen de trois lettres différentes seulement

$$x = \mathrm{X} - \mathrm{Y},$$
$$y = \mathrm{X} - \mathrm{Z};$$

appelons α et β les différences qui remplacent $x+y-z-t$ et $z-t$; on aura

$$x+y-z-t = \alpha,$$
$$z-t = \beta;$$

Digitized by Google

on en conclura

$$z+t=2X-Y-Z-\alpha,$$
$$z-t=\beta,$$

et, par conséquent,

$$2z=2X-Y-Z-\alpha+\beta,$$
$$2t=2X-Y-Z-\alpha-\beta.$$

Comme z et t sont des fonctions à coefficients entiers de X, Y, Z, T, U, on devra avoir, en désignant par m, n, p, q, r des nombres entiers,

$$\alpha-\beta=2mX+(2n+1)Y+(2p+1)Z+2qT+2rU,$$
$$\alpha+\beta=2m'X+(2n'+1)Y+(2p'+1)Z+2q'T+2r'U.$$

On tire de là

$$\alpha=(m+m')X+(n+n'+1)Y+(p+p'+1)Z+(q+q')T+(r+r')U,$$
$$\beta=(m'+m)X+(n'-n)Y+(p'-p)Z+(q'-q)T+(r'-r)U;$$

et, comme α et β sont de simples différences, il faut que les seconds membres se réduisent à des différences de deux lettres. Remarquons que, si α contient X ou T ou U, β le contient aussi nécessairement; car on ne peut avoir $m+m'=\pm 1$ avec $m-m'=0$. D'ailleurs, T et U devant nécessairement entrer dans la substitution S, il faut que α et β contiennent ces deux lettres T et U; de sorte que Y et Z doivent disparaître des expressions de α et β, ce qui est impossible; car on ne peut avoir à la fois

$$n'-n=0,\quad n+n'+1=0,\quad p'-p=0,\quad p+p'+1=0.$$

Supposons maintenant que x et y s'expriment avec quatre lettres différentes

$$x=X-Y,$$
$$y=Z-T;$$

si on appelle toujours α et β les différences qui doivent remplacer $x-y-z-t$ et $z-t$, on aura

$$\alpha=(m+m'+1)X+(n+n'+1)Y+(p+p'+1)Z+(q+q'+1)T+(r+r')U,$$
$$\beta=(m'-m)X+(n'-n)Y+(p'-p)Z+(q'-q)T+(r'-r)U;$$

comme U doit nécessairement entrer dans la substitution S et que α et

Digitized by Google

β sont des différences de deux lettres, il faut annuler à la fois, par exemple, les deux coefficients de X dans α et β, ce qui est impossible.

Donc toute substitution qui ne se réduit pas à une simple permutation augmente nécessairement la somme des coefficients,

3° Supposons que a et h soient seuls négatifs; que a soit inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g; h inférieur en valeur absolue à b, c, e, f, k, l; enfin que $a + h$ soit inférieur en valeur absolue à b, c, e, f.

Nous pouvons toujours supposer en outre a supérieur à h en valeur absolue.

Si dans la forme φ on remplace a par $-a'$, et si l'on remplace $(x-y)^2$ par la valeur fournie par l'identité

$$(x-y)^2 = -(x+y-z-t)^2 + (x-z)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 - (z-t)^2,$$

on obtiendra, en désignant par $b', c', \ldots, k', l'$ des coefficients positifs dont les relations avec $a, b, c, \ldots, k, l$ sont évidentes,

$$\begin{aligned}\varphi = {} & a'(x+y-z-t)^2 + b'(x-z)^2 + c'(x-t)^2 + d'(x-u)^2 + e'(y-z)^2 \\ & + f'(y-t)^2 + g'(y-u)^2 + h'(z-t)^2 + k'(z-u)^2 + l'(t-u)^2,\end{aligned}$$

et remarquons que d', g', k', l' restent identiques à d, g, k, l, de sorte que d' et g' sont supérieurs à a' pendant que k' et l' sont supérieurs à la valeur absolue de h.

Cela posé, je dis que, si l'on fait une substitution conservant à la forme φ le caractère d'une forme réduite, cette substitution ne peut que permuter les variables.

En effet, si cette substitution remplace $x+y-z-t$ par un polynôme contenant quatre lettres, les différences ne pourront être remplacées que par des différences, de sorte que la substitution ne produit, comme il est facile de le voir, qu'une permutation.

Si cette substitution remplace $x+y-z-t$ par un polynôme à deux lettres, il faudra d'abord que $x-u$ et $y-u$ soient remplacés par de simples différences, puisque d' et g' sont supérieurs à a'. De plus, nous avons vu tout à l'heure que, si $x+y-z-t$, $x-u$, $y-u$ étaient remplacés par des différences, il n'en pourrait pas être de même pour $z-t$, de sorte que l'expression par laquelle sera remplacé $z-t$ accroitra la somme des coefficients des carrés des variables au

Digitized by Google

moins de $2h'$, c'est-à-dire au moins du double de la valeur absolue de $2(a-h)$; il faudra alors que $z-u$ et $t-u$ soient remplacés par des différences, puisque k' et l' sont supérieurs à h en valeur absolue. Enfin, les coefficients b', c', e', f', qui sont respectivement égaux à $b-a'$, $c-a'$, $e-a'$, $f-a'$, sont par conséquent supérieurs à la valeur absolue de h : donc $x-z$, $x-t$, $y-z$, $y-t$ devront être remplacés par des différences.

Ainsi, dans le cas où $x+y-z-t$ est remplacé par un binôme, il en est de même de toutes les différences, à l'exception de $x-y$ et $z-t$.

Or, dans la substitution que nous considérons, on peut toujours supposer $u=0$, et, comme $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$ doivent être remplacés par des différences, il faut que x, y, z, t s'expriment par des différences de deux lettres.

On peut donc toujours poser

$$x = X - U,$$

et, comme $x-z$ doit s'exprimer par une différence, il faut que l'expression de z ait une lettre commune avec celle de x; on peut donc écrire

$$z = Z - U.$$

Comme t doit avoir une lettre commune avec x, puisque $x-t$ s'exprime par une différence, mais non avec z, il faudra écrire

$$t = X - T.$$

Enfin $y-t$ et $y-z$ devant s'exprimer par des différences de deux lettres, il faut que y ait une lettre commune avec z et une lettre commune avec t, et, comme on ne peut avoir $y = X - U$, ce qui rendrait y identique à x, il faut poser

$$y = Z - T;$$

mais alors $x+y-z-t$, qui devrait être remplacé par une différence de deux lettres, est identiquement nul. Ajoutons encore que le déterminant de la substitution est nul au lieu d'être ± 1.

La supposition que nous avons faite est donc impossible.

En résumé, il est démontré que, *si une forme vérifie l'une des conditions*

Digitized by Google

de réduction, il n'existe aucune forme équivalente qui puisse vérifier aussi quelqu'une des conditions de réduction, pourvu que l'on fasse abstraction des formes que l'on obtiendrait par la permutation des variables.

8. Nous avons remarqué au n° 6 qu'on pouvait réduire une forme en employant, outre les substitutions qui permutent les variables, les deux substitutions suivantes

$$\begin{aligned} x &= T - Z, & x &= Y - X,\\ y &= X - U, & y &= U - T,\\ z &= Y - U, & z &= U - Z,\\ t &= T - U, & t &= Y - T,\\ u &= 0, & u &= 0, \end{aligned}$$

car leur emploi permet de diminuer indéfiniment la somme des coefficients des formes qui ne sont pas réduites. D'ailleurs cette somme des coefficients ne peut pas, dans les formes positives, descendre au-dessous d'une certaine limite, puisqu'elle est égale à la demi-somme des coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2, u^2.

Il faut cependant démontrer encore que la suite des opérations qui diminuent la somme des coefficients ne se poursuit pas indéfiniment. Soit donc φ une forme non réduite que l'on veut réduire; supposons qu'on lui applique les substitutions qui diminuent la somme des coefficients et qu'après plusieurs opérations on l'ait transformée en une forme Φ; la série des substitutions employées pour passer de φ à Φ peut se remplacer par une substitution unique

$$(S)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T + \alpha^{IV} U,\\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T + \beta^{IV} U,\\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T + \gamma^{IV} U,\\ t = \delta X + \delta' Y + \delta'' Z + \delta''' T + \delta^{IV} U,\\ u = 0, \end{cases}$$

et le coefficient de X^2 dans Φ s'obtiendra en remplaçant dans φ les variables x, y, z, t respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; on obtiendrait d'une manière analogue les coefficients de Y^2, Z^2, T^2, U^2 dans Φ; mais la somme des coefficients de X^2, Y^2, Z^2, T^2, U^2 est le double de la somme des coefficients de la forme Φ et cette somme a été constamment dimi-

Digitized by Google

nuée par les substitutions qui ont conduit de φ à Φ; donc les coefficients de la substitution S restent nécessairement limités. Il en résulte que les opérations de la réduction sont en nombre fini. En effet, supposons que, dans la suite des opérations de la réduction, on cherche chaque fois la substitution par laquelle on peut remplacer toutes les substitutions déjà employées; on obtiendra ainsi des substitutions analogues à S et qui ne pourront pas être indéfiniment différentes puisque les coefficients α, α', α'', ... sont limités. Si donc la série des opérations se continuait indéfiniment, elle conduirait nécessairement à deux formes Φ et Φ' qu'on pourrait déduire de φ l'une et l'autre par la même substitution et qui seraient par conséquent identiques l'une à l'autre, ce qui est impossible, puisque les opérations de réduction diminuent constamment la somme des coefficients. Donc *la forme réduite peut toujours être obtenue par un nombre fini d'opérations.*

9. Nous avons vu que les substitutions qui opèrent la réduction sont les substitutions qui permutent les variables et les deux substitutions que nous avons écrites plus haut. Et comme les substitutions qui permutent les variables sont au nombre de cent vingt, nous avons donc en tout cent vingt-deux substitutions. Ces cent vingt-deux substitutions peuvent se ramener à deux seulement.

Pour le démontrer, je remarque d'abord que les cent vingt-deux substitutions qui permutent les variables s'obtiennent toutes en combinant les unes avec les autres :

1° La permutation qui change x, y, z, t, u respectivement en

$$\text{A} \quad y, x, z, t, u.$$

2° Les deux permutations qui changent x, y, z, t, u respectivement en

$$\text{B} \quad y, z, x, t, u,$$
$$\text{B}' \quad z, x, y, t, u;$$

3° Les trois permutations qui changent x, y, z, t, u respectivement en

$$\text{C} \quad y, z, t, x, u,$$
$$\text{C}' \quad z, t, x, y, u,$$
$$\text{C}'' \quad t, x, y, z, u;$$

Digitized by Google

4° Les quatre permutations qui changent x, y, z, t, u respectivement en

$$\begin{aligned} &\mathrm{D} && y,\ z,\ t,\ u,\ x,\\ &\mathrm{D}' && z,\ t,\ u,\ x,\ y,\\ &\mathrm{D}'' && t,\ u,\ x,\ y,\ z,\\ &\mathrm{D}''' && u,\ x,\ y,\ z,\ t. \end{aligned}$$

On voit en outre que la permutation qui produit la suite B′ s'obtient en répétant deux fois la permutation B.

De même, C′ et C″ s'obtiennent en répétant deux et trois fois la permutation C. Enfin D′, D″ et D‴ s'obtiennent en répétant deux, trois et quatre fois la permutation D.

Et si nous convenons d'indiquer par un exposant la répétition d'une même permutation, nous pourrons écrire

$$\mathrm{B}'=\mathrm{B}^2,\quad \mathrm{C}'=\mathrm{C}^2,\quad \mathrm{C}''=\mathrm{C}^3,\quad \mathrm{D}'=\mathrm{D}^2,\quad \mathrm{D}''=\mathrm{D}^3,\quad \mathrm{D}'''=\mathrm{D}^4.$$

Les cent vingt substitutions qui permutent les variables peuvent donc être déjà ramenées aux quatre permutations

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}.$$

10. Mais je vais démontrer que B et C peuvent être ramenés à A et D. En effet, on a

$$\mathrm{C}=\mathrm{D}^2\,\mathrm{A}\,\mathrm{D}^4,$$

en indiquant par là qu'on obtient C en faisant d'abord deux fois la permutation D, puis une fois la permutation A et ensuite quatre fois la permutation D.

On a de même

$$\mathrm{B}=\mathrm{C}^2\,\mathrm{A}\,\mathrm{C}^3,$$

c'est-à-dire qu'on obtient B en faisant deux fois la permutation C, puis une fois la permutation A et trois fois la permutation C.

Les substitutions par lesquelles la réduction d'une forme peut s'obtenir sont donc les deux substitutions qui donnent les permutations A et B et les deux substitutions données au commencement du n° 8.

Digitized by Google

Ce qui fait en tout les quatre substitutions suivantes

$x = Y,$	$x = Y,$	$x = T - Z,$	$x = Y - X,$
$y = X,$	$y = Z,$	$y = X - U,$	$y = U - T.$
$z = Z,$	$z = T,$	$z = Y - U,$	$z = U - Z,$
$t = T,$	$t = U,$	$t = T - U,$	$t = Y - T,$
$u = U,$	$u = X,$	$u = o,$	$u = o.$

Si nous les désignons respectivement par les lettres A, D, E, F, nous trouverons

$$A = D^3 E^3 D^2,$$
$$F = E\, D^4 E,$$

de sorte que les cent vingt-deux substitutions qui opèrent la réduction des formes quaternaires se réduisent aux deux substitutions D et E, qu'on peut écrire ainsi

$x = Y - X,$	$x = T - Z,$
$y = Z - X,$	$y = X - U,$
$z = T - X,$	$z = Y - U,$
$t = U - X,$	$t = T - U,$
$u = o,$	$u = o.$

Ces deux substitutions ne peuvent être ramenées à une seule substitution S, dont D et E seraient des puissances. Car supposons que l'on ait $S^n = D$, on aurait $S^{5n} = D^5$; et, comme D^5 est une substitution identique, il faudrait que S^{5n} fût une substitution identique. Alors les calculs de réduction d'une forme ne pourraient jamais comporter plus de $5n - 1$ opérations; en d'autres termes, quels que soient $a, b, \ldots, k, l$, il n'y aurait que $5n - 1$ types de formes réduites, ce qui est absurde.

Donc *les éléments nécessaires et suffisants de toute réduction sont les deux substitutions* D *et* E.

Digitized by Google

RACINES COMMUNES

A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ENTIÈRES,

PAR M. V. HIOUX,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOURS.

NOTE ADDITIONNELLE.

Le Mémoire que nous avons publié dans le Tome X de ce Recueil (numéros de novembre et décembre 1881) contient, pages 386 et 387, l'énoncé et la démonstration du théorème suivant, dont nous croyons devoir donner une nouvelle démonstration.

THÉORÈME I. — *Si l'on pose* $n - i = p - 1$, *les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations* $A = 0$ *et* $B = 0$ *aient exactement p racines communes sont*

$$N_{i,0} = 0, \quad N_{i,1} = 0, \quad \ldots, \quad N_{i,n-i} = 0 \quad \text{et} \quad N_{i-1,0} \lesssim 0.$$

En d'autres termes : *Le polynôme* T_i *doit être identiquement nul et le polynôme* T_{i-1} *doit être effectivement de degré p.*

Démonstration. — 1° Les conditions sont nécessaires.

En effet, pour que les équations $A = 0$ et $B = 0$ aient exactement p racines communes, il faut que les polynômes A et B aient un plus grand commun diviseur de degré p. Soit D ce plus grand commun diviseur. Divisons par D les deux termes de la fraction $\frac{A}{B}$; nous pouvons représenter le quotient par $-\frac{A_i}{B_i}$, en désignant par A_i et B_i deux polynômes entiers en x, premiers entre eux, et de degrés respectivement égaux à $m - p$ et à $n - p$.

Digitized by Google

On devra donc avoir identiquement

$$BA_i + AB_i = 0.$$

Mais, en formant l'identité

$$T_i = BA_i + AB_i,$$

on a constitué les polynômes désignés ci-dessus par A_i et B_i, et pour que ces polynômes soient premiers entre eux et de degrés égaux à $m - p$ et $n - p$, il faut que l'on ait $N_{i-1,0} \gtrless 0$.

D'ailleurs le choix des multiplicateurs employés fait de T_i un polynôme entier en x de degré $p - 1$.

L'expression $BA_i + AB_i$ devant être identiquement nulle, il en est de même du polynôme T_i qui lui est identique. On a donc, avec $N_{i-1,0} \gtrless 0$,

$$N_{i,0} = 0, \quad N_{i,1} = 0, \quad \ldots, \quad N_{i,n-i} = 0.$$

Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

2° Les conditions énoncées sont suffisantes.

En effet, en les supposant remplies, on a identiquement

$$BA_i + AB_i = 0,$$

et, comme $N_{i-1,0}$ n'est pas nul, les polynômes A_i et B_i sont premiers entre eux et de degrés égaux à $m - p$ et $n - p$. Il suit de là que les deux polynômes A et B ont un plus grand commun diviseur de degré p, à l'aide duquel on peut remplacer la fraction $\frac{A}{B}$ par la fraction égale $-\frac{A_i}{B_i}$.

Les équations $A = 0$ et $B = 0$ ont deux p racines communes.

Donc les conditions énoncées sont suffisantes.

Digitized by Google

ÉTUDE SPECTROSCOPIQUE

SUR L'OZONE,

PAR M. J. CHAPPUIS,

AGRÉGÉ PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Dans le courant de l'année 1880, nous avons entrepris, M. Hautefeuille et moi, des recherches sur l'ozone.

1. L'ozone, tel qu'on le préparait habituellement, possédait dans l'oxygène une si faible tension, 53^{mm} au plus, que les propriétés physiques de ce gaz étaient à peine distinguées de celles de l'oxygène.

On sait les difficultés qu'a surmontées si habilement M. Soret pour déterminer la densité (1) de l'ozone, en opérant sur l'oxygène faiblement ozonisé.

Parmi les constantes physiques de ce corps, sa chaleur de formation (2) a été obtenue avec précision par M. Berthelot, malgré l'état de dilution où il se trouve en sortant des appareils à effluves ordinaires.

2. La préparation d'un mélange très riche en ozone était donc la première condition à remplir pour acquérir des notions nouvelles sur

(1) SORET, *Annales de Chimie et de Physique*, t. VII, p. 113-118; 1866. — *Ibid.*, t. XIII, p. 257-282; 1868.

(2) BERTHELOT, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII, p. 1281; 1876.

Digitized by Google

ce corps curieux; aussi tous nos efforts ont-ils porté au début sur l'étude des procédés de préparation de l'ozone.

Nous avons établi (1) que la transformation isomérique de l'oxygène soumis à l'effluve électrique obéit à des lois simples qui sont les mêmes que celles qui président à la dissociation des composés gazeux. Les tensions de transformation sont, comme les tensions de dissociation dans les systèmes homogènes, sensiblement proportionnelles aux pressions totales.

Les tensions de l'ozone croissent rapidement lorsqu'on abaisse la température de l'oxygène, en refroidissant l'appareil dans lequel on soumet ce gaz à l'effluve; elles doublent, ou à peu près, en passant de $+20°$ à $-23°$; elles quintuplent en passant de $+20°$ à $-55°$.

Pour nous procurer de l'ozone sous la plus forte tension possible, il suffisait donc d'ozoniser l'oxygène à très basses températures. Nos expériences prouvent que, une fois soustrait à l'action des décharges électriques, le mélange d'oxygène et d'ozone cesse d'être un système homogène en équilibre; mais que cependant le mélange se conserve, sans altération sensible, pendant tout le temps qu'on maintient la température constante, si l'on opère au-dessous de zéro. De là la nécessité, ou de renouveler constamment l'ozone, ou d'opérer à la plus basse température possible et le plus rapidement possible.

Toutes nos expériences nous avaient appris un moyen pratique (2), sinon commode, de nous procurer de l'oxygène contenant environ 20 pour 100 d'ozone; nous avons alors songé à utiliser le gaz ainsi préparé, à étudier la compressibilité de ce mélange et la liquéfaction de l'ozone.

L'expérience se fait de la façon suivante :

L'oxygène séjourne un quart d'heure dans un appareil à effluves électriques de M. Berthelot, dont les tubes concentriques en verre mince sont plongés dans du chlorure de méthyle; puis on le fait passer dans l'éprouvette terminée par un tube capillaire de l'appareil de M. Cailletet. Ce réservoir, de 60^{cm} environ, primitivement vide et maintenu à $-23°$, ne pouvant se remplir en une fois et sous une pression

(1) HAUTEFEUILLE et CHAPPUIS, *Comptes rendus*, t. XCI, p. 228; 1880.
(2) *Ibid.*, p. 552; 1880.

Digitized by Google

de 760^{mm}, est mis rapidement en communication cinq à six fois de suite avec l'appareil à effluves, dont la capacité ne surpasse pas 20^{cc}. En une heure un quart, on parvient par ce procédé à remplir l'éprouvette d'un mélange d'oxygène et d'ozone très chargé de ce dernier gaz.

L'éprouvette est alors retirée du chlorure de méthyle et séparée de l'appareil à effluves par un trait de lime; le gaz qu'elle contient est refoulé avec lenteur par du mercure refroidi au-dessous de zéro, dans le tube capillaire maintenu à — 23°.

Le mercure qui transmet la pression de la presse hydraulique n'appauvrit pas le mélange aussi vite qu'on pouvait le craindre. Il se forme à la surface du métal un vernis solide, qui limite rapidement l'action. L'échauffement du gaz pendant la compression est plus redoutable. Malgré ces difficultés, on parvient à augmenter la tension de l'ozone dans une forte proportion.

3. Des résultats obtenus au point de vue de la liquéfaction de l'ozone, je ne rappellerai que celui-ci : l'étude comparative des mélanges d'oxygène avec l'ozone d'une part, et avec l'acide carbonique d'autre part, nous ont montré que le point de liquéfaction de l'ozone est peu différent de celui de l'acide carbonique. Mais ces expériences nous ont permis de constater une propriété nouvelle de ce corps, et c'est celle-là seulement dont nous étudierons les conséquences dans la suite de ce travail.

Dès les premiers coups de piston, le tube capillaire devient bleu d'azur; cette coloration s'accentue au fur et à mesure qu'on diminue le volume du gaz; et si la tension de l'ozone est amenée par la compression à être de plusieurs atmosphères, le gaz est bleu indigo et le ménisque de mercure, vu à travers le gaz, est alors bleu d'acier.

Si l'on place à ce moment la partie supérieure du tube capillaire dans le protoxyde d'azote liquide, l'intensité de la coloration augmente considérablement dans toute cette partie refroidie à — 88°; la partie inférieure du tube étant maintenue à — 23°, on peut juger de la différence de nuance et estimer que l'ozone à — 88° est trois ou quatre fois plus bleu que l'ozone à — 23°. L'intensité de la coloration croît donc à mesure que la température s'abaisse. Après quelques mi-

Digitized by Google

nutes, les températures des différentes parties du tube sont peu différentes, le gaz paraît uniformément coloré en bleu foncé; l'ozone est alors emprisonné dans un vase fermé par du mercure solide, dont le ménisque reste brillant et absolument inattaqué par l'ozone à cette basse température.

On peut aussi observer cette coloration en comprimant l'oxygène qui a traversé lentement, à la température ordinaire, un appareil à effluves; car, si l'on comprime avec précaution ce gaz dans un tube capillaire refroidi à $-23°$, l'ozone qu'il contient peut être amené à une tension de 10^{atm} et peut être conservé plusieurs heures, dans ces conditions de température et de pression, si le gaz est séparé du mercure par une colonne d'acide sulfurique.

Il est donc établi que l'ozone, sous une forte tension, est un gaz coloré; mais en est-il de même de l'ozone à la tension de quelques millimètres? La couleur bleue caractérise l'ozone aussi sûrement que son odeur, car pour toutes les tensions on la retrouve en examinant le gaz sous une épaisseur convenable; pour la rendre manifeste, il suffit d'interposer entre l'œil et une surface blanche un tube de 1^m à 2^m de long traversé par le courant d'oxygène qui a passé dans l'appareil de M. Berthelot. La couleur que possède alors le gaz rappelle la couleur bleue du ciel; ce bleu est plus ou moins foncé suivant que l'oxygène a séjourné plus ou moins longtemps dans l'appareil à effluves, et qu'il est, par suite, plus ou moins riche en ozone. Dès qu'on interrompt l'effluve, la coloration bleue disparaît, l'oxygène ozonisé étant remplacé par de l'oxygène pur.

4. La compression, dans un tube capillaire maintenu à $-23°$ dans du chlorure de méthyle, d'un mélange d'acide carbonique et d'oxygène ozonisé à très basse température, donne des résultats analogues à ceux qu'on observe avec les mélanges de plusieurs gaz liquéfiables, mais qui empruntent ici à la coloration de l'ozone une netteté particulière (1).

Une compression lente permet d'obtenir un liquide se séparant du gaz par un ménisque; ce liquide n'est pas incolore, comme l'est habi-

(1) P. Hautefeuille et J. Chappuis, *Comptes rendus*, t. XCI, p. 815; 1880.

Digitized by Google

tuellement l'acide carbonique liquide : il est franchement bleu; sa nuance ne paraît pas différer de celle du gaz qui le surmonte.

C'est là un état stable qui persiste tant que les gaz restent sous pression. Si l'on vient à détendre légèrement les gaz et à les comprimer immédiatement, on voit au-dessus du mercure une colonne liquide d'un beau bleu d'azur, beaucoup plus colorée que le gaz.

Le froid de la détente a déterminé un nuage abondant formé d'acide carbonique et d'ozone liquides ou solides; car ce dernier corps est alors refroidi à une température inférieure à son point critique, et l'abondante liquéfaction de l'acide carbonique produite par la compression recueille une partie de cet ozone. Ce qui prouve que les choses se passent bien ainsi, c'est que la coloration du liquide diminue et qu'en quelques minutes le liquide et le gaz reprennent la même nuance. L'ozone recueilli tout d'abord par l'acide carbonique liquide se diffuse, l'atmosphère du tube ne contenant pas la vapeur d'ozone à l'état de saturation.

De même que la compression d'un mélange d'acide carbonique et de protoxyde d'azote donne un liquide mixte formé des deux gaz liquéfiés, celle d'un mélange d'oxygène, d'acide carbonique et d'ozone donne un liquide mixte contenant de l'ozone liquéfié. C'est cet ozone qui colore en bleu le liquide que nous avons obtenu dans nos expériences.

5. En résumé, l'ozone est bleu à la température et à la pression ordinaires. Ce fait est d'autant plus facile à constater que l'on opère avec une couche plus épaisse de ce gaz ou à une pression plus élevée.

La couleur de l'ozone se fonce quand on abaisse sa température, et enfin on peut encore l'observer quand ce corps a été amené à l'état liquide.

Ce sont ces recherches et ces résultats qui servent de point de départ à ceux que je vais maintenant exposer. Ce travail a été fait au laboratoire de Chimie de M. H. Sainte-Claire Deville, à l'École Normale supérieure, d'après les conseils bienveillants de mon maître, M. P. Hautefeuille; qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Digitized by Google

PREMIÈRE PARTIE.

SPECTRE D'ABSORPTION DE L'OZONE.

Spectres d'absorption.

Quand on fait passer un rayon de soleil dans un tube contenant un gaz coloré, et qu'on le reçoit ensuite sur le prisme d'un spectroscope, on observe dans le spectre des bandes obscures; on reconnait en général par une observation plus attentive que ces bandes sont formées de fines raies, alternativement brillantes et sombres, analogues à celles qu'on observe dans le spectre solaire.

La première observation de ce genre a été faite par Brewster en 1832 sur l'acide hypoazotique (1); il constata que ce gaz donne un très beau spectre d'absorption; et l'on peut considérer sa découverte comme le point de départ de toutes les observations de spectroscopie sidérale, qui ne prirent, d'ailleurs, leur véritable développement que vingt ans après, lorsque Kirchhoff parvint à rendre compte des résultats observés par Foucault, Brewster et Angström, en donnant une théorie des raies du spectre solaire.

Depuis l'observation de Brewster, on a constaté le même fait avec la vapeur d'iode et de brome; les spectres étaient différents et pouvaient, par conséquent, servir à caractériser les corps qui leur donnaient naissance. Le chlore et ses composés oxygénés qui sont comme lui colorés présentaient également le même phénomène. Presque tous les gaz colorés ont été passés en revue; tous ont présenté un spectre.

Il est même probable que tous les gaz présenteraient un système de bandes d'absorption caractéristiques, si l'on pouvait les observer sous une épaisseur assez grande (2). On constate, en effet, dans le

(1) *Transactions philosophiques d'Édimbourg*, t. XII.

(2) JAMIN, *Cours de Physique*, t. III, 2e édition, p. 451.

Digitized by Google

spectre solaire, quand l'astre est à son lever ou à son coucher, des bandes obscures qu'il est impossible de retrouver quand le Soleil est au zénith. Elles sont dues évidemment à l'absorption de certaines radiations par l'air ou par les gaz contenus dans l'air; il faut que la couche atmosphérique traversée par les rayons lumineux soit très épaisse pour produire l'absorption; les bandes disparaissent tout à fait si l'observation est faite du haut d'une montagne.

Cas de l'ozone.

Ces faits, bien connus, m'ont fait espérer qu'il ne serait pas très difficile, grâce à la coloration assez intense de l'ozone, d'observer le spectre d'absorption auquel il ne pouvait manquer de donner naissance.

L'observation devait certainement présenter quelques difficultés, résultant de la nécessité de se procurer de l'ozone parfaitement pur, et de l'impossibilité où l'on se trouve de le préparer autrement que dilué dans un grand excès d'oxygène. La présence de traces de corps étrangers pouvait, en effet, introduire dans le spectre, si l'on parvenait à en observer un, des bandes que l'on aurait à tort attribuées à l'ozone. Il fallait donc opérer avec de l'oxygène parfaitement pur et sec, le conserver dans des réservoirs en verre, et l'amener de ces réservoirs au tube d'observation en traversant un appareil ozoniseur, sans qu'à aucun moment il pût être décomposé, ou se charger de matières gazeuses qui auraient apporté un grand trouble dans l'observation.

D'autre part, la dilution forcée de l'ozone dans l'oxygène conduisait naturellement à l'emploi d'un tube très long, d'un maniement difficile, d'un volume notable. Ce tube devait être tout en verre, fermé à ses extrémités par des glaces de verre mastiquées avec une matière inattaquable par l'ozone.

Enfin, la préparation de l'ozone devait être faite dans les conditions les meilleures, de façon que le mélange gazeux fût très coloré et très propre à produire une énergique absorption des rayons lumineux.

Essais préliminaires.

Je commençai par faire des essais qui m'ont prouvé que l'on pouvait employer sans inconvénient le silicate de soude pour toutes les soudures

Digitized by Google

de verre sur verre; l'ozone n'attaque pas la matière vitreuse qui se forme à la longue lorsque le silicate est sec.

Un long usage nous avait appris que le mastic Golaz résiste également bien à l'action prolongée de l'ozone.

Quant à la préparation, je songeai tout d'abord à la faire à la plus basse température possible, en refroidissant l'appareil ozoniseur par le chlorure de méthyle, par exemple, espérant que l'ozone très riche qu'on obtient dans ces circonstances permettrait l'emploi d'un tube moins long, par conséquent d'une moindre capacité et plus facile à remplir.

Les essais que j'ai tentés de ce côté m'ont démontré que cette méthode ne pouvait servir; elle ne donne, en effet, de bons résultats que dans le cas tout particulier où je l'ai employée avec M. Hautefeuille, c'est-à-dire seulement lorsque les gaz, sortant à — 23° de l'appareil ozoniseur, sont maintenus à cette température et amenés dans un récipient également à — 23°.

Les expériences comparatives ont été faites à la fois dans deux tubes de 2^m. L'un recevait l'ozone préparé à la température ordinaire, l'autre l'ozone préparé à — 23°; les deux tubes étaient à la température de la salle d'expérience (15° environ). Il ne m'a jamais été possible de constater une différence dans la coloration en faveur de l'appareil rempli avec le gaz refroidi pendant la préparation; j'ai plusieurs fois répété l'expérience, le résultat a toujours été le même. Plus tard, lorsque j'eus observé le spectre d'absorption dû à l'ozone, j'ai pu refaire ces mêmes expériences, et juger par l'intensité des bandes qu'il n'y avait pas avantage à refroidir l'appareil producteur, si l'on ne refroidissait pas en même temps le tube d'observation.

La raison de ce fait doit être dans la nature explosive de l'ozone. Abandonné à lui-même, il ne se décompose que lentement, surtout s'il est maintenu à basse température; mais, si l'on vient à l'échauffer, la décomposition commence, et elle se continue d'autant plus vite qu'elle a commencé plus rapidement. C'est donc dans le passage des gaz de — 23° à la température de la salle qu'il faut voir la cause de l'insuccès constaté.

Or on ne peut songer à refroidir à — 23° un tube de la longueur de celui que je voulais employer, fait de plusieurs morceaux et présentant

Digitized by Google

des masticages au silicate de soude en plusieurs points, et particulièrement à l'arrivée et à la sortie du gaz.

J'ai donc dû avoir recours à un tube de grande longueur et préparer l'ozone à la température ordinaire.

Description de l'appareil.

L'appareil (*fig.* 1) qui m'a servi à observer les bandes d'absorption de l'ozone à la pression atmosphérique et à la température ordinaire peut se diviser en trois parties :

a. La source et les réservoirs d'oxygène;

b. L'appareil producteur d'ozone;

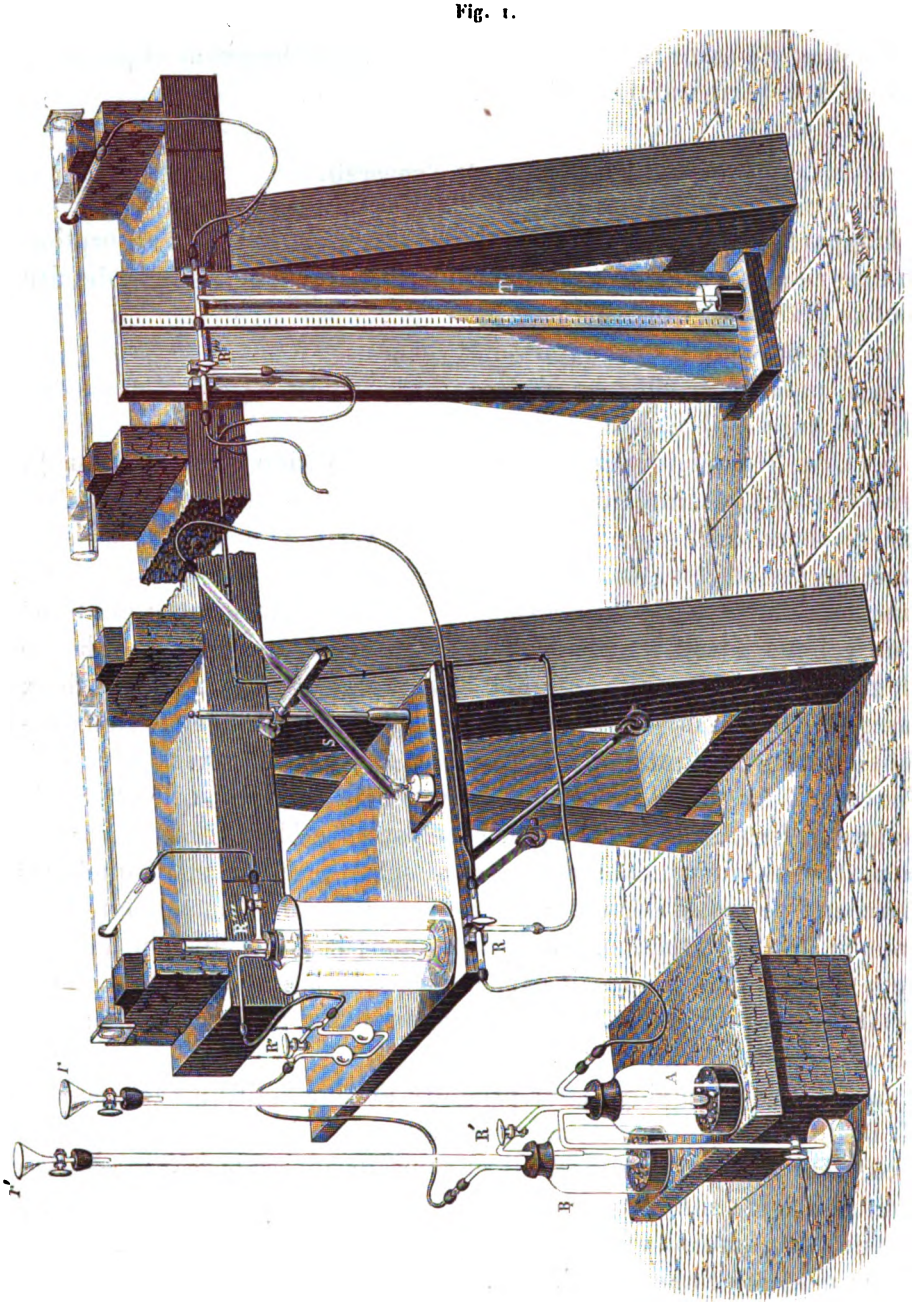
c. Le tube d'observation.

a. L'oxygène était préparé par la décomposition par la chaleur du précipité *per se* chimiquement pur et parfaitement sec. Ce produit encore chaud était placé dans un tube de verre de Bohême S fermé à l'une de ses extrémités, étiré à l'autre pour permettre d'y sceller un tube de plomb avec du mastic Golaz. Ce tube abducteur était mastiqué à un robinet à trois voies R, communiquant par un premier tube de plomb à la machine pneumatique à mercure, et par un autre à deux vases de 1^{lit}, servant de réservoirs à oxygène. Chacun de ces deux flacons portait, mastiqué dans son goulot, outre deux tubes abducteurs s'ouvrant à la partie supérieure du vase, un large tube de $0^{m},80$ de longueur, fermé à sa partie supérieure par un robinet et plongeant par sa partie supérieure dans du mercure sur lequel nageaient quelques morceaux de potasse fondue; ces tubes servaient de manomètres. Le premier flacon portait, en outre, un siphon; la petite branche à l'intérieur du récipient plongeait dans le mercure; la grande branche était fermée par un robinet. Le tube de communication des deux réservoirs portait un robinet R'.

b. L'appareil employé pour produire l'ozone était un ozoniseur de M. Berthelot entièrement soudé; il était séparé du deuxième réservoir à oxygène par un tube de Will et Warentrapp renfermant quelques gouttes d'acide sulfurique concentré, et dont les deux boules, réunies par un tube muni d'un robinet R'', pouvaient à volonté être mises en communication l'une avec l'autre.

Digitized by Google

Fig. 1.



Digitized by Google

L'effluve était produite par une forte bobine de Ruhmkorff, mise en action par une pile de 6 éléments Bunsen.

c. Un robinet R‴, soudé sur le tube abducteur de l'appareil à ozone, le séparait du tube d'observation. Ce tube avait une longueur de $4^{m},50$ et une capacité de 2^{lit}. Il était formé de quatre tubes de verre de section elliptique (grand axe, $0^{m},03$ à $0^{m},04$; petit axe, $0^{m},015$ à $0^{m},02$) rodés, ajustés bout à bout et soudés au silicate de soude. Les points de jonction étaient, par précaution et une fois le silicate sec, enveloppés de bandes de caoutchouc et scellés dans un bloc de plâtre fin.

Les deux ouvertures extrêmes étaient fermées par des lames de verre appliquées contre le tube rodé, et maintenues d'abord par du silicate de soude et du plâtre, puis, par la suite, avec du mastic Golaz.

Dans le voisinage de chaque extrémité était un trou de $0^{m},005$ de diamètre percé dans la paroi du tube; dans ces ouvertures s'engageaient le tube qui amenait l'ozone et le tube à dégagement; ils y étaient soudés au silicate. Le tube à dégagement faisait partie d'un tube en T, dont la grande branche verticale, servant de baromètre, pouvait ainsi à chaque instant donner la pression dans l'intérieur du tube, et dont l'autre branche, munie d'un robinet R^{iv}, communiquait par un tube de plomb à la machine pneumatique.

Préparation de l'expérience.

Voici maintenant comment l'appareil était mis en expérience. Les robinets *r*, *r'* des tubes manométriques des réservoirs étant fermés et tous les autres ouverts, la machine pneumatique faisait le vide dans toutes les parties de l'appareil; on amenait la pression à n'être plus que de $0^{m},002$. On chauffait alors le tube producteur d'oxygène, jusqu'à ramener la pression à $0^{m},10$; le vide était fait de nouveau, et la même série d'opérations était reproduite jusqu'à trois fois. A la fin de la troisième opération, la pression de l'azote ne se mesure plus que par des dix-millièmes de millimètre; l'appareil pouvait être considéré comme totalement purgé; on fermait alors les deux robinets R‴, R^{iv}, qui permettent d'isoler le tube d'observation; on fermait également le robinet R″ qui sépare l'ozoniseur des réservoirs; ceux-ci communiquent entre eux et avec la source d'oxygène, le robinet à trois

Digitized by Google

voies R étant disposé de façon à les séparer de la machine pneumatique.

On chauffait alors le tube à oxyde de mercure de manière à remplir les deux réservoirs d'oxygène, le réservoir B à la pression de $0^m,85$ à $0^m,90$ de mercure, le réservoir A à une pression de $1^m,10$ environ. Les deux robinets r, r' des tubes manométriques étaient ouverts de façon à les faire communiquer avec l'atmosphère, et de façon que la colonne de mercure qu'ils renferment pût servir à donner d'une façon approximative la pression du gaz dans les réservoirs. Cette colonne était donc de $0^m,10$ à $0^m,15$ pour le réservoir B, et de $0^m,30$ environ dans le manomètre de A.

Lorsque, dans la suite des opérations, la pression avait diminué dans le réservoir B, on pouvait, en le mettant en communication avec A, ramener la pression à sa valeur primitive; quant à ce dernier, on y maintenait la pression à peu près constante de deux façons à volonté : ou bien en continuant pendant toute la durée d'une expérience le dégagement d'oxygène, ou bien en versant, à l'aide d'un entonnoir, du mercure dans le flacon A, par le tube manométrique, de façon à déplacer l'oxygène qu'il contenait. Dans ce dernier cas, après une expérience, le réservoir A était plein de mercure; le siphon que j'avais adapté à cette partie de l'appareil permettait d'enlever le mercure, de le chasser par de l'oxygène et de rétablir l'appareil en expérience.

Dans tous les cas, on pouvait avoir besoin, au milieu d'une expérience, de remplacer le producteur d'oxygène, soit que l'oxyde de mercure fût épuisé, soit que ce tube de verre de Bohême, chauffé trop longtemps de suite ou alternativement chauffé et refroidi, vint à se briser. (Cet accident ne pouvait avoir d'inconvénients au point de vue de la rentrée de l'air dans les réservoirs, puisque l'oxygène y était toujours maintenu sous pression.) Ce changement pouvait se faire facilement, grâce à la disposition du robinet à trois voies R qui commandait cette partie de l'appareil, la rendant ainsi indépendante, et permettant d'abord de la séparer des réservoirs, puis de faire le vide et des lavages à l'oxygène dans le nouveau tube avant de rétablir les communications.

Digitized by Google

Expérience.

Préparation de l'ozone.

L'appareil était ainsi prêt pour une expérience. Le vide étant fait dans le tube d'observation et l'appareil ozoniseur se trouvant plein d'oxygène à une pression supérieure de quelques centimètres à la pression atmosphérique, la machine de Ruhmkorff était mise en marche, et on laissait l'effluve produire son effet pendant dix minutes; on ouvrait alors le robinet du tube de communication R‴ et l'oxygène ozonisé se répandait dans le tube vide.

On avait soin, à ce moment, de fermer le robinet R″ qui faisait communiquer les deux boules de l'appareil de Will et Warentrapp, et qui avait permis de faire le vide des deux côtés de la colonne d'acide sulfurique; l'oxygène était alors forcé de traverser ce liquide, et c'était par la rapidité du passage des bulles qu'on réglait l'admission du gaz dans l'appareil à effluve, et par suite la marche de l'expérience.

A l'autre extrémité du tube, d'ailleurs, le baromètre donnait des indications et permettait de savoir à quel point on en était de la préparation, quelle était la pression de l'oxygène ozonisé soumis à l'observation.

Si on laissait l'opération continuer ainsi, le réservoir B se vidant, la pression y deviendrait bientôt inférieure à la pression atmosphérique, l'ozone ne serait plus préparé dans les conditions qui paraissent les plus favorables à sa production; aussi fallait-il souvent arrêter le courant d'oxygène et mettre B en communication avec A, pour ramener la pression dans le réservoir B à sa valeur primitive. L'opération ainsi conduite demandait six heures environ, pour permettre de remplir d'oxygène très riche en ozone le tube d'observation, dont la capacité était, comme je l'ai dit, de 2^{lit}.

Observation. — Résultats.

I. A l'une des extrémités du tube, on plaçait une lanterne permettant l'usage, ou de la lumière Drummond, ou d'une lampe à gaz; on interposait une cuve d'alun, ou simplement d'eau, entre cette source de

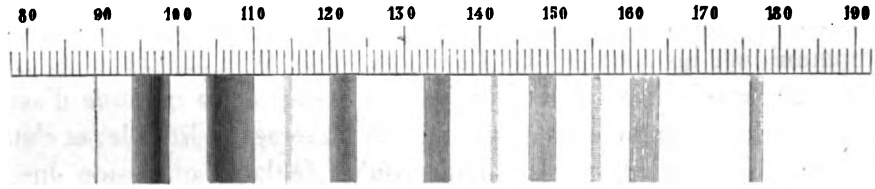
Digitized by Google

lumière et le tube, de façon à arrêter la presque totalité des rayons calorifiques, qui détermineraient une diminution rapide dans la teneur en ozone. A l'autre extrémité, on plaçait le spectroscope destiné à l'observation.

Dans une première série d'expériences, faites avec un spectroscope qui portait à volonté un ou deux prismes, j'ai constaté la présence, dans la partie visible du spectre, de onze bandes obscures.

II. Ces bandes étaient faciles à repérer; j'ai pu en dresser une carte (*fig.* 2); le spectroscope ne portant qu'un prisme, les mesures micro-

Fig. 2.



métriques m'ont donné le Tableau suivant, D ($\lambda = 588{,}9$) étant au 100 du micromètre.

Numéros.	Degrés du micromètre.		Largeurs.
1.....	89	»	»
2.....	94	99	5
3.....	104	110	6
4.....	115	116	1
5.....	120	123,5	3,5
6.....	132,5	136	3,5
7.....	141,5	142,5	1
8.....	146,5	150	3,5
9.....	156	157	1
10.....	160	163,5	3,5
11.....	176	»	»

III. J'ai construit une courbe de conversion des degrés du micromètre en λ, en mesurant un nombre suffisant de raies connues avec le spectroscope qui m'a servi dans toutes ces expériences; j'ai pu ainsi

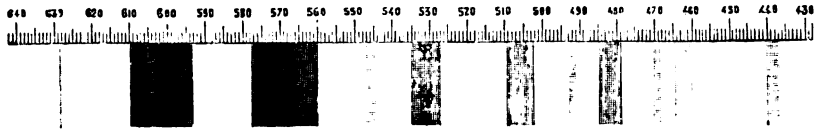
Digitized by Google

obtenir une autre Carte (*fig.* 3) et dresser le Tableau suivant, qui donnent la position des bandes exprimée en longueurs d'onde.

Numéros.	λ		Largeurs.
1.....	628,5	»	»
2.....	609,5	593,5	16
3.....	577,0	560,0	17
4.....	547,0	544,5	2,5
5.....	535,0	527,0	6,5
6.....	508,5	502,0	6,5
7.....	492,5	491,0	1,5
8.....	484,5	479,0	4,5
9.....	470	468,5	1,5
10.....	464,5	460,0	4,5
11.....	444	»	»

IV. La bande n° 1 est douteuse; ce n'est que dans les expériences où l'ozone a été préparé avec le plus grand soin et traversé sous la

Fig. 3.



plus grande longueur que j'ai réussi à l'observer. Je l'ai vue avec difficulté dans deux observations, et sa position a été notée une fois à 88,5 et l'autre à 89.

La deuxième est, de toutes, la plus visible; elle n'est pas également sombre dans toute sa largeur, elle présente une ombre très forte, s'étalant de 96 à 98, et, à gauche et à droite, une sorte de pénombre qui s'arrête assez nettement aux limites indiquées dans le Tableau.

La troisième bande paraît beaucoup plus sombre dans la région voisine de D; le maximum semble très voisin de 105, et elle va en décroissant jusqu'à 110, où elle est encore assez nette pour qu'il n'y

Digitized by Google

ait pas de différence bien sensible entre deux pointages, faits à plusieurs jours d'intervalle.

Je n'ai remarqué de variation d'intensité dans l'obscurité de la bande que dans l'observation des deux bandes dont je viens de parler; dans toutes les autres, la teinte semble uniforme, et c'est à peine si les bords se fondent un peu, laissant quelque indécision sur le point exact où elles commencent et où elles finissent.

Quant à la dernière, on juge assez bien où elle commence dans le bleu violacé, mais on ne peut dire où elle finit, pas plus qu'on ne peut à l'œil juger s'il en existe d'autres dans le violet.

V. Pour m'assurer de ce fait, j'ai dû faire de nombreuses photographies, qui me permettent d'affirmer que l'ozone ne donne naissance à aucune bande d'absorption dans toute la région du spectre comprise depuis G jusqu'à H. Les photographies ont été faites à l'aide de la gélatine au bromure. Les plaques que j'employais étaient sensibles aux rayons lumineux un peu avant G, et jusqu'un peu au delà de H; les photographies étaient faites, soit avec la lumière solaire, soit avec la lampe Drummond; dans le premier cas, on obtenait une belle photographie où les raies G, h, H_1, H_2 étaient des plus faciles à reconnaître, mais, dans les deux cas, on ne voyait aucune bande.

VI. Tous les essais que j'ai faits pour arriver à résoudre les bandes les plus larges et les plus noires, en raies fines, sont restés sans succès.

L'emploi de deux prismes, pour l'étude de ce spectre, ne semble présenter aucun avantage. C'est bien, en réalité, un spectre de bandes et non un spectre de lignes. Observées avec un spectroscope très dispersif portant deux prismes à sulfure de carbone, ces bandes s'étalent, perdent de leur netteté. C'est un fait déjà signalé par M. Gernez, dans l'étude qu'il a faite des spectres d'absorption de l'acide hypoazotique et des composés oxygénés du chlore (1), observés à l'état liquide ou à l'état de dissolution, mais qui ne se présente pas pour ces mêmes corps étudiés à l'état gazeux; dans le cas des vapeurs, en effet, presque toutes les raies sont très fines et apparaissent d'autant plus distinctement que le faisceau lumineux est plus étalé.

(1) GERNEZ, *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 660; 1872.

Digitized by Google

Ordre d'apparition des bandes.

Brewster le premier, dans son expérience sur la vapeur d'acide hypoazotique, a constaté que les bandes obscures s'étalent de plus en plus, à mesure que la densité du gaz augmente. Le phénomène est des plus nets avec ce gaz; les bandes apparaissent peu à peu, d'abord dans le bleu, puis dans le vert et le violet, et ce n'est que lorsque ces bandes, en s'étalant, ont fini par se réunir, de manière à faire disparaître tous les rayons bleus et violets et presque la totalité du vert, que l'on peut apercevoir d'une façon nette une quantité de raies très fines qui viennent d'apparaître seulement dans le rouge.

Ce fait a depuis été observé par Miller (1), qui a constaté que les lignes augmentaient en nombre et en largeur quand on augmente la profondeur du milieu.

M. Gernez le signale également (2).

J'ai constaté la production d'un phénomène analogue dans le spectre d'absorption de l'ozone. Les bandes n'apparaissent pas au même instant dans toutes les parties du spectre. Leur ordre d'apparition est le même, soit qu'on fasse varier la longueur du tube, soit qu'on augmente par compression la densité du gaz soumis à l'observation.

1° Les bandes 2 et 3 se voient d'abord. L'apparition de la bande 2 précède à peine celle de la bande 3; quoique ayant la même largeur, la bande 2 est un peu plus obscure que l'autre; d'autre part, la bande 3 apparait dans la région la plus lumineuse du spectre; ces deux bandes, encadrant la raie D, sont toujours celles qu'il faut rechercher dans les expériences comme caractérisant l'ozone.

2° Ensuite viennent successivement les bandes 5, 6 et 8, la première à la limite du jaune et du vert, la seconde dans le vert, la troisième dans le vert bleu.

3° Les bandes 10 et 11 apparaissent en troisième lieu et presque en même temps.

4° Ce n'est que dans les meilleures expériences, avec une longueur

(1) MILLER, *Philosophical Magazine*, t. II, p. 381.

(2) GERNEZ, *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 465 et 660; 1872.

Digitized by Google

de $4^m,50$ d'oxygène très riche en ozone, que l'on voit enfin les bandes 4, 7 et 9; et même dans ces conditions, la bande 1 est difficile à saisir.

Avec le grand tube, dès le début de l'expérience, alors que la pression n'était encore que de $0^m,07$ de mercure, on voyait déjà les deux raies caractéristiques formant ombre à gauche et à droite de D; à une pression de $0^m,09$, il y avait cinq bandes visibles; à $0^m,12$ de pression, les sept bandes larges pouvaient se repérer.

On ne commençait à voir les trois bandes étroites (nos 4, 7 et 9) que pour des pressions voisines de $0^m,50$ de mercure, et la bande 1 que tout à fait la fin, la pression étant de $0^m,76$.

Le nombre et l'obscurité des bandes visibles va donc certainement en croissant, avec l'épaisseur du milieu traversé ou avec sa densité. Je n'ai constaté, avec le tube de $4^m,50$ dans ces limites de pression (de 0^{atm} à 1^{atm}), que de trop faibles différences dans la largeur des bandes pour qu'il y ait intérêt à les signaler; et, d'ailleurs, l'apparence particulière de celles qui sont dues à l'ozone exclut la possibilité de mesures bien précises, analogues à celles que permet l'acide hypoazotique par exemple.

Influence de la pression.

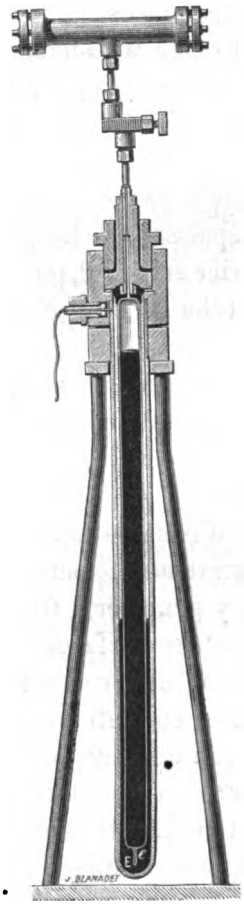
Il m'a paru intéressant de faire des expériences avec un tube d'une faible longueur, mais à des pressions très fortes; elles devaient permettre, en effet, de voir, en même temps qu'une coloration très intense, un spectre d'asorption des plus nets, et sur lequel deux observations restaient à faire pour confirmer les résultats obtenus jusque-là et les établir d'une façon définitive : constater, dans ces conditions nouvelles, l'ordre d'apparition des bandes et leur élargissement, puis essayer à nouveau la résolution des bandes en raies fines.

Je me suis servi, dans ce but, d'un appareil, que j'ai fait construire en vue d'autres expériences encore, et qui m'a permis l'observation du spectre de l'ozone à des pressions différentes, comprises dans des limites beaucoup plus écartées que celles que permet la première expérience. Rien ne prouve *a priori* que l'effet produit par l'augmentation d'épaisseur de la colonne gazeuse ou celui produit par une augmentation de densité

Digitized by Google

du gaz coloré soit le même; dans le cas où les rayons lumineux traversent une colonne d'un gaz coloré vingt ou quarante fois plus longue, la modification qu'il subit peut être différente de celle qu'on observe si

Fig. 4.



le même rayon traverse un gaz vingt ou quarante fois plus dense; car, dans ce dernier cas, si l'on a affaire, comme cela a lieu dans la circonstance, à un gaz relativement assez facile à liquéfier, ce n'est plus en réalité une matière gazeuse qui détermine la modification de la lumière, mais une véritable vapeur.

Digitized by Google

L'observation du spectre d'absorption des corps, soit à l'état gazeux, soit à l'état liquide, contenus dans des tubes cylindriques ou dans des tubes terminés par des surfaces sphériques, comme je l'ai pratiquée quelquefois, présente des inconvénients. Aussi me suis-je proposé de réaliser un appareil permettant cette même observation à travers des surfaces planes, à travers des glaces.

L'appareil a été construit par M. Golaz, avec l'habileté dont ce constructeur a si souvent fait preuve (*fig.* 4).

Le principe en est facile à saisir. On peut, dans cet appareil, considérer trois parties :

En premier lieu, un vaste réservoir tout en verre, formé d'un tube cylindrique à parois peu épaisses; sa longueur était d'environ $0^m,80$, et son diamètre pouvait varier entre $0^m,03$ et $0^m,035$; il était terminé, à chaque extrémité, par un tube de $0^m,006$ de diamètre extérieur, long de $0^m,06$.

Cette partie devant être entièrement plongée dans le mercure et dans l'eau, qui transmettent la pression de la pompe hydraulique, il importe peu qu'elle soit ou non résistante, la pression devant y être la même à l'intérieur et à l'extérieur.

En second lieu, le tube d'observation (*fig.* 5). Dans un épais tube cylindrique en acier, on a introduit deux coquilles, A et B, de cuivre rouge, ajustées de façon à y pénétrer à frottement. Ces deux coquilles ont été préalablement rabotées de façon qu'une fois mises en place elles laissent entre elles un tube rectangulaire dans lequel on peut glisser un tube sans soudure, en platine, qui s'y ajuste exactement.

Le cylindre d'acier a $0^m,20$ de long, $0^m,03$ de diamètre; le tube intérieur a $0^m,20$ de long, $0^m,01$ de haut et $0^m,005$ de large; c'est donc une cavité de $0^{mc},10$, dont les parois sont en platine, par suite inattaquables à la plupart des agents chimiques, et peuvent, grâce à l'acier qui les entoure, résister à plusieurs centaines d'atmosphères.

Ce canal est fermé, à ses deux extrémités, par des glaces de $0^m,006$ d'épaisseur, maintenues, contre l'ouverture bien rodée, par une plaque d'acier, percée d'une ouverture rectangulaire et reliée par cinq vis de pression au corps du tube d'acier, qui présente, à cet effet, un renflement vers chaque extrémité.

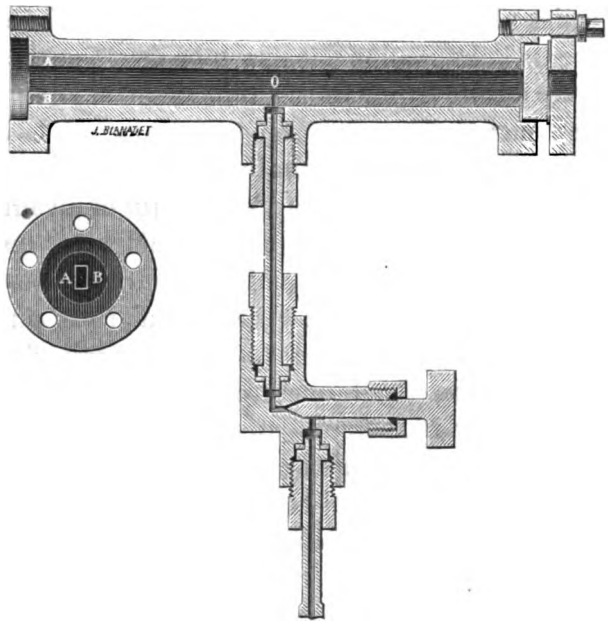
Les gaz qui doivent être comprimés dans cet espace y sont introduits

Digitized by Google

par un trou percé dans la partie centrale du canal, à travers les parois en O.

Enfin, en troisième lieu, le réservoir de verre et le tube d'observation communiquent par un tube capillaire en acier, dont le diamètre extérieur est de $0^{m},012$; il porte, dans le voisinage du tube d'observation, un robinet à pointe pouvant résister à de très fortes pressions. La figure montre le système bien connu de raccords employés.

Fig. 5.



La partie inférieure du tube de raccordement est mastiquée à la glu marine dans une douille, à laquelle elle est de plus fixée par deux écrous; elle est percée d'une ouverture de diamètre suffisant pour recevoir l'un des tubes extrêmes du réservoir de verre, qui y est également soudé à la glu marine.

Le maniement de l'appareil est facile à saisir. En E, on soude un robinet à trois voies, dont l'une conduit à la machine pneumatique, l'autre communique par une soudure à un appareil de M. Berthelot. Le vide fait, on laisse rentrer peu à peu l'oxygène ozonisé. L'appareil

Digitized by Google

plein, on le sépare en *e*, on le renverse sur un bloc de grande dimension plein de mercure, et l'opération se continue comme avec un tube ordinaire de M. Cailletet.

L'observation de l'ozone dans ces conditions permet de voir apparaître à la fois la couleur bleue et les deux bandes voisines de D à une pression de 5^{atm}.

L'ordre d'apparition, à mesure que la pression croît, est le même que celui déjà signalé. Des mesures micrométriques faites à 25^{atm} donnent, pour les bandes, le même aspect, la même position et la même largeur que celles observées avec le tube de 4^{m}, 50 plein à la pression atmosphérique. Or l'observation dans un tube de 0^{m}, 20 de long à 25^{atm} doit correspondre à celle faite dans un tube de 5^{m} si l'augmentation de longueur de la couche gazeuse et son augmentation de densité produisent le même effet sur le rayon lumineux.

J'ai poursuivi l'observation jusqu'à 45^{atm}, ce qui équivaut à l'observation dans un tube de 9^{m}. La couleur avait notablement augmenté, les bandes étaient sensiblement plus sombres; la moyenne des mesures leur donnait à peu près la même largeur; je n'ai pas pu en observer de nouvelles, pas plus que je n'ai pu les résoudre en raies fines. La bande n° 1 a pu être notée à 89. La fermeture du robinet, empêchant l'absorption de l'ozone par le mercure et sa destruction, puisqu'il n'est plus en contact qu'avec du platine et du verre (et aussi avec de l'acier, mais dans la très courte partie qui sépare le tube d'observation du robinet), m'a permis de conserver l'ozone à cette pression pendant un temps suffisant pour faire toutes ces observations avec le soin désirable.

Influence de la température.

1° SUR LA COULEUR.

Nous avions constaté, M. Hautefeuille et moi, qu'un abaissement de température déterminait pour l'ozone, à l'inverse de ce qui arrive pour l'acide hypoazotique, une augmentation dans l'intensité de coloration. Ce fait était assez net pour donner lieu aux expériences suivantes :

Première expérience. — L'ozone étant comprimé à la température ordinaire, à 80^{atm}, par exemple, dans le tube capillaire de l'appareil

Digitized by Google

Cailletet, la couleur bleue du gaz qui paraissait alors douteuse devenait très nette si, tout en maintenant la pression constante, on abaissait la température de l'ozone à — 23°, en plongeant la partie supérieure du tube dans du chlorure de méthyle; à — 88° la coloration était encore plus intense.

Deuxième expérience. — Un tube de 1^{m} de long étant rempli d'oxygène aussi riche que possible en ozone, on observait une feuille de papier blanc placée à l'ouverture opposée à celle où l'on mettait l'œil. C'est à peine si cette feuille paraissait colorée; on répandait alors, à l'aide d'un siphon, du chlorure de méthyle sur le tube enveloppé de papier ou de linge, et l'on voyait de suite la coloration apparaître. La variation de température était assez brusque dans cette expérience, et l'on peut estimer à — 50° la température obtenue momentanément par cette évaporation rapide sous l'action du vent, l'appareil étant placé en plein air dans une cour.

2° SUR LE SPECTRE D'ABSORPTION.

Première expérience. — De ces deux expériences, la première ne se prêtait pas facilement aux observations spectroscopiques; la deuxième permettait, au contraire, très bien la recherche des bandes aux deux températures si différentes auxquelles se trouvait soumis le gaz à quelques moments d'intervalle.

Avec un tube aussi court que celui que j'employais (1^{m}), et en préparant et maintenant le gaz à la température ambiante, c'est avec difficulté qu'on observait les deux bandes qui encadrent la raie D, et l'on ne pouvait voir aucune des autres; quand, au contraire, le tube était refroidi, par l'évaporation rapide du chlorure de méthyle, les bandes 2 et 3 devenaient plus faciles à observer et l'on apercevait les bandes qui se trouvent dans le vert (5, 6 et 8).

Ainsi les bandes d'absorption semblent suivre la même marche que la coloration; toutes les causes qui augmentent la coloration du gaz, augmentation de longueur, accroissement de pression, abaissement de température, augmentent aussi le pouvoir d'absorption du gaz et, par suite, le nombre et l'intensité des bandes qui en résultent.

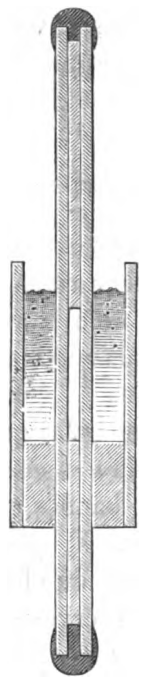
Deuxième expérience. — J'ai tenu à multiplier les observations de ce

Digitized by Google

spectre dans les conditions les plus variées. J'ai construit un appareil qui m'a permis d'observer l'ozone préparé à — 23°, et maintenu à cette température. On pouvait songer à deux procédés : l'un consistant à faire passer les gaz dans un appareil de M. Berthelot, où l'eau acidulée serait remplacée par le chlorure de méthyle, et communiquant, par un tube aussi court que possible, avec un tube d'observation maintenu également à la même température; l'autre permettant dans le même tube la préparation et l'observation du gaz; c'est à ce deuxième procédé que je me suis de préférence arrêté.

Des lames de verre (*fig.* 6) étaient disposées de façon à laisser entre

Fig. 6.



elles un canal long de $0^m,70$, large de $0^m,002$ et haut de $0^m,02$. Les deux lames qui fermaient les parois latérales de ce canal étaient en verre mince de $0^m,001$ d'épaisseur. Dans chacune des ouvertures extrêmes de ce canal pénétrait un tube de $0^m,001$ de diamètre extérieur destiné à l'introduction ou à la sortie des gaz; et sur chaque ouverture

Digitized by Google

était mastiquée une lame de verre fermant ainsi le tube prismatique à ses deux extrémités. Une couche de mastic coulée sur la tranche de l'appareil réunissait les lames de verre, et faisait du canal un espace hermétiquement clos, ne communiquant avec l'extérieur que par les deux petits tubes soudés aux extrémités.

D'autres lames de verre étaient disposées à gauche et à droite du canal, et formaient des auges ouvertes dans lesquelles on devait placer le chlorure de méthyle destiné à servir à la fois de conducteur et de réfrigérant. Des vis de pression en bois maintenaient à la fois ces deux cuves pressées contre les parois du canal.

L'oxygène pur et sec, destiné à l'expérience, traversait d'abord un appareil ordinaire à effluves où la préparation se commençait; puis les gaz étaient introduits par l'un des tubes capillaires dans le canal où devait s'achever la transformation en ozone, et où devait se faire l'observation des bandes d'absorption.

Un bec de gaz papillon était placé à l'une des ouvertures, le spectroscope à l'autre.

Quand l'air était chassé de l'appareil, en y faisant assez longtemps passer l'oxygène contenant 4 à 5 pour 100 d'ozone, on remplissait les deux auges latérales de chlorure de méthyle; dans chacune plongeait un long fil de platine communiquant à l'un des pôles d'une forte bobine de Ruhmkorff. L'effluve traversait alors le canal, et l'on voyait facilement l'échange électrique se faire sous forme d'une très belle pluie de feu, et assez régulièrement dans tout l'espace occupé par le gaz.

L'oxygène achevait ainsi de s'enrichir en ozone dans le tube même d'observation et à la température de — 23°. Le spectroscope permettait l'observation des raies principales. J'avais disposé à côté de celui-là un deuxième appareil formé d'un tube de 2^m, rempli d'ozone préparé dans un appareil de M. Berthelot à la température ordinaire. L'observation du phénomène ne semblait pas présenter de différence bien marquée dans les deux expériences, et s'il y en avait une, elle était plutôt en faveur de l'observation faite à basse température, dans le tube de $0^m,70$.

Or, d'après les expériences faites avec M. Hautefeuille, la proportion d'ozone obtenue à — 23° est à peu près double de celle qu'on peut se

Digitized by Google

procurer à + 20°. Le phénomène observé dans le tube de $0^m,70$ devait donc être au plus comparable à celui obtenu avec un tube de $1^m,50$.

Cette expérience est donc bien d'accord avec celle que j'ai décrite précédemment, et tend encore à prouver que, si l'abaissement de température augmente la coloration du gaz, il rend aussi plus nettes les bandes d'absorption. Cette série d'expériences permet de prévoir combien de difficultés on rencontrerait, de combien de conditions il faudrait tenir compte, si l'on voulait juger de la teneur en ozone d'un mélange gazeux, soit à l'aide de la coloration, soit à l'aide des bandes d'absorption.

Spectre d'absorption de l'ozone liquide.

La coloration et le spectre d'absorption se produisent donc avec l'ozone gazeux, observé à des pressions et à des températures très différentes; nous savons, d'autre part, que l'ozone conserve sa couleur, lorsqu'il a passé à l'état liquide.

Produit-il encore, sous cet état, un spectre d'absorption, et ce spectre est-il identique à celui que donne le gaz éloigné de son point de liquéfaction?

La disposition à employer pour résoudre cette question s'imposait : j'ai reproduit l'expérience qui m'avait permis d'observer, avec M. P. Hautefeuille, l'acide carbonique liquide, coloré en bleu par la présence de l'ozone. Cependant, au lieu d'opérer avec un mélange contenant volumes égaux d'acide carbonique et d'oxygène ozonisé, je n'ai introduit dans le réservoir de l'appareil de M. Cailletet qu'un volume d'acide carbonique pour deux volumes d'oxygène. L'oxygène ozonisé était préparé avec toutes les précautions déjà indiquées, à la température de — 23°, et les gaz étaient comprimés, par du mercure à 0°, à 450^{atm} dans le tube capillaire non refroidi.

La lumière Drummond envoyait un faisceau lumineux sur le tube dans la région voisine du ménisque du mercure. Ce tube était enveloppé dans une feuille de papier noir collée à sa surface, et présentant deux fentes opposées de $0^m,001$ de largeur, par lesquelles passait la lumière, qui, de l'autre côté, tombait sur la fente du spectroscope.

Digitized by Google

Cette disposition avait pour but de ne recevoir dans le spectroscope que les rayons ayant traversé le liquide.

J'ai pu observer ainsi le spectre de l'ozone liquéfié et constater son analogie avec celui du gaz. La faible coloration du liquide ne m'a pas permis d'apercevoir d'autres raies que les deux raies caractéristiques voisines de D, ce à quoi on devait s'attendre; la coloration du liquide était, en effet, celle qu'on aurait observée avec un tube de 1^m à $1^m,50$ plein d'oxygène ozonisé, préparé à la température ordinaire; or, dans ces conditions, on ne voit dans le spectroscope que les deux raies voisines de D.

DEUXIÈME PARTIE.

OBSERVATIONS CRITIQUES SUR LE SPECTRE D'ABSORPTION DE L'OZONE.

Dans toutes les expériences dont j'ai parlé jusqu'ici, les précautions prises pour éviter la présence de l'azote mélangé à l'oxygène sur lequel on opère ont été minutieuses, comme on a pu le voir par la description que j'ai donnée du mode d'expérience, qui m'a servi à l'étude des bandes d'absorption produites par l'ozone; c'est que, en effet, il importait d'éviter la production de composés oxygénés de l'azote qui auraient pu avoir une couleur propre, ou donner naissance à un spectre d'absorption.

Nous avons tout d'abord, M. Hautefeuille et moi, démontré directement, par quelques expériences, que la couleur bleue du gaz était bien due à l'ozone (1), et on démontre également, par les mêmes expériences, que le spectre d'absorption décrit est bien caractéristique de la présence de ce corps.

---

(1) P. HAUTEFEUILLE et J. CHAPPUIS, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 80; 1881.

Digitized by Google

Les composés oxygénés de l'azote, portés à la température du rouge sombre, se décomposent en donnant naissance à de l'acide hypoazotique, gaz facile à reconnaître, tant à cause de sa couleur qu'à cause des bandes que présente, observé au spectroscope, un rayon de lumière qui a traversé ce gaz.

L'ozone, au contraire, se décompose lentement à la température ordinaire ou rapidement à température élevée, en régénérant l'oxygène qui a servi à le préparer.

Il résulte de ces faits que l'élévation à la température du rouge sombre des gaz étudiés permettra de décider si la couleur et les bandes d'absorption sont dues à un composé de l'azote ou à l'ozone. Dans le premier cas, n'y eût-il que des traces d'acide hypoazotique formées, le spectroscope permettra d'observer le spectre de ce corps; dans le deuxième cas, la couleur et les bandes devront disparaître à la fois.

Décomposition de l'ozone.

L'expérience qui doit décider est facile à faire; on remplit un tube, de petit diamètre et de 2^m de long, d'oxygène pur et bien sec, auquel on a fait traverser lentement l'appareil de M. Berthelot. Ce tube est fermé à chaque extrémité par des glaces, et présente à chaque bout une petite ouverture capillaire. L'une sert à l'entrée du gaz, l'autre à sa sortie. Quand on juge que le tube est plein, ces deux ouvertures sont fermées au chalumeau.

On peut alors observer la décomposition lente de l'ozone, à la température ordinaire; sa couleur diminue peu à peu, en même temps les bandes d'absorption deviennent plus difficiles à saisir; enfin, au bout de plusieurs jours, une feuille de papier, placée à une des extrémités et observée de l'autre, ne paraît plus colorée, et le spectre est devenu continu.

On peut suivre cette même décomposition, déterminée plus rapidement, en portant successivement toutes les parties du tube au rouge sombre. Le tube doit être, dans ce cas, en verre de Bohême; le résultat observé est le même.

Après l'une quelconque de ces deux expériences, à l'ouverture du tube, on constate la disparition totale de l'odeur de l'ozone et une légère

Digitized by Google

augmentation de pression. On peut encore interposer, entre l'appareil à effluves et l'orifice du long tube d'observation, un tube étroit en verre de Bohême, porter ce tube en un point au rouge et faire passer le courant gazeux; on détruit ainsi la totalité de l'ozone formé, immédiatement après sa sortie de l'ozoniseur et avant son introduction dans le tube; à aucun moment, on ne peut y constater l'odeur ou la couleur du gaz; on ne peut non plus retrouver son spectre. De toutes ces expériences, il résulte que le gaz coloré en bleu qui donne le spectre décrit est un gaz décomposable à la température ordinaire lentement, ou au rouge rapidement, et décomposable sans donner d'acide hypoazotique, puisque, à aucun moment, le spectre n'est traversé par les raies caractéristiques de ce gaz. Ce n'est donc pas un composé oxygéné de l'azote, et ces deux propriétés appartiennent bien à l'ozone.

Décomposition de l'ozone en présence de l'azote.

Les mêmes phénomènes s'observent, d'ailleurs, quand la décomposition de l'ozone a lieu en présence de l'azote.

Schœnbein croyait que l'ozone pouvait se combiner, sans l'intervention de l'électricité, à l'azote pour donner de l'acide hypoazotique, et c'est ainsi qu'il expliquait la formation des nitrates; s'il était besoin, après les travaux de M. Berthelot, de démontrer que cette explication était inadmissible, nous pouvions facilement en trouver dans nos expériences une nouvelle preuve. Si, en effet, on détruit par la chaleur l'ozone en présence de l'azote, soit qu'on observe le phénomène en vase clos, soit qu'on emploie un courant gazeux, le résultat est le même que celui obtenu dans les expériences précédentes avec l'ozone en présence de l'oxygène pur; on peut également conserver à la température ordinaire le mélange des deux gaz; l'ozone se détruit à la longue en présence de l'azote sans se combiner aucunement à lui. On ne voit, en effet, pas traces de bandes de l'acide hypoazotique, même si l'on chauffe les gaz une fois la décomposition terminée.

Ainsi donc, rien n'est changé au résultat, à cette condition que l'azote n'ait pas été soumis en présence de l'oxygène à l'action de l'électricité.

Digitized by Google

Phénomènes qui peuvent résulter de la présence de l'azote dans l'oxygène soumis à l'effluve électrique.

Il est une nouvelle vérification que nous n'avons pas manqué de faire, et qui consiste à reproduire toutes ces expériences en introduisant à dessein quelques bulles d'azote dans l'oxygène soumis à l'effluve.

Si le résultat est le même, c'est-à-dire si l'on obtient le même spectre, l'expérience ne prouvera rien, l'incertitude subsistera; on pourra douter d'avoir dans le premier cas opéré avec de l'oxygène bien exempt d'azote, et attribuer à un composé oxygéné de ce gaz la production simultanée d'une coloration bleue et de bandes d'absorption; mais si, au contraire, on observe dans ce deuxième cas des phénomènes nouveaux, si un spectre différent vient se superposer à celui déjà observé, et cela par le seul fait de l'introduction d'azote dans les gaz soumis à l'effluve, on aura ainsi démontré que, dans les premières observations, c'était bien sur de l'oxygène privé d'azote, par conséquent sur l'ozone, que l'on avait opéré.

Or c'est précisément cette deuxième hypothèse qui se réalise; l'introduction d'azote dans l'oxygène donne naissance à un phénomène tout nouveau.

PREMIER CAS. — *Acide pernitrique.*

Si nous lançons dans l'appareil à effluves un mélange d'oxygène et d'azote, nous produisons avec l'ozone, caractérisé encore dans ces circonstances par sa couleur et par son spectre, un composé d'oxygène et d'azote qui présente un spectre d'absorption tout spécial.

Il y a donc une différence bien facile à saisir entre les résultats obtenus avec l'oxygène pur et ceux que donne l'oxygène mélangé même à de faibles proportions d'azote. L'observation de ce spectre nouveau, toutes les fois qu'on n'opère pas sur de l'oxygène bien exempt d'azote, m'a conduit à exagérer encore les précautions employées dans la préparation de l'oxygène et dans la purification des appareils destinés à l'observation du spectre de l'ozone.

L'observation de ce nouveau spectre nous a déterminés à faire une

Digitized by Google

série d'expériences dont la conclusion nécessaire a été l'existence d'un composé nouveau d'oxygène et d'azote plus oxygéné que l'acide azotique, et pour lequel nous avons, M. Hautefeuille et moi, proposé le nom d'*acide pernitrique* (1).

Les propriétés que nous avons trouvées à ce corps nous ont permis de préciser les conditions de sa formation; j'ai pu alors préparer ce composé dans le but d'étudier et de décrire complètement son spectre d'absorption.

Nous ne savons pas encore préparer l'acide pernitrique seul, en l'absence de l'ozone; et de ce fait résulte, dans le spectroscope, la superposition sur le même spectre des bandes de l'ozone et des bandes du composé de l'azote. Heureusement, l'intensité des bandes est bien plus grande pour l'acide pernitrique, et leur caractère bien nettement tranché. Des traces de ce corps suffisent pour qu'on aperçoive deux raies entre A et D, dans une région où l'ozone ne présente pas de bandes; de plus, ce sont des raies fines et noires, au lieu de ces bandes larges et grises, à contours peu nets, qui caractérisent l'ozone. C'est grâce à ces différences essentielles que nous avons pu distinguer de suite les deux spectres malgré leur superposition.

Je m'écarterais de mon sujet en rapportant ici les résultats intéressants que nous avons été conduits à observer en poursuivant l'étude des propriétés de ce nouvel acide (2). Le fait que je voulais prouver est suffisamment établi. La présence de l'azote dans l'oxygène que l'on a soumis à l'effluve pour le transformer en ozone se manifeste par l'apparition de bandes nouvelles dans le spectre. Dans cette expérience, on observe encore la couleur bleue et les bandes d'absorption dues à l'ozone, mais en même temps un autre spectre superposé au premier; de plus, quand on vient à détruire par la chaleur les gaz soumis à l'expérience, ou quand on observe les produits de leur décomposition spontanée, les résultats sont tout différents de ceux observés avec l'ozone pur.

La décomposition est lente à la température ordinaire; suivie au spectroscope, elle présente une particularité très importante. On con-

(1) P. Hautefeuille et J. Chappuis, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 82, 1881.
(2) P. Hautefeuille et J. Chappuis, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 134; 1881.

Digitized by Google

state une période de vingt-quatre à quarante-huit heures pendant laquelle les bandes de l'acide pernitrique ont totalement disparu, sans qu'il y ait trace d'acide hypoazotique; puis l'acide hypoazotique apparaît lentement et la décomposition paraît terminée au bout de quelques jours. Il y a donc passage par un produit de décomposition intermédiaire et non décomposition directe avec production d'acide hypoazotique; de plus, le composé intermédiaire se détruit spontanément sous l'influence de la lumière en donnant de l'acide hypoazotique. Tous ces faits portent à conclure que c'est de l'acide azotique anhydre qui a tout d'abord pris naissance.

Le mélange se décompose rapidement au rouge, les bandes de l'ozone et les bandes nouvelles sont rapidement remplacées par les bandes qui caractérisent l'acide hypoazotique, soit qu'on opère en vase clos soit qu'on opère sur un courant gazeux.

En résumé, on observe, dans le cas où l'on a introduit de l'azote dans l'oxygène, tous les phénomènes que l'on pouvait désirer pour différencier le plus nettement possible les deux gaz : ozone et composé oxygéné de l'azote.

Il devenait nécessaire, après ces observations, de faire une étude comparative des spectres de l'ozone et de l'acide pernitrique qui permette, dans tous les cas où l'on aura préparé l'ozone, de savoir si l'on a opéré avec de l'oxygène exempt d'azote, et qui, dans tous les cas, ne laisse place à aucune erreur possible sur la provenance des bandes observées dans le spectre.

Deuxième cas. — *Acide hypoazotique.*

Mais les choses sont encore plus compliquées que je ne les ai montrées jusqu'ici; les faits que je viens d'indiquer ne sont pas les seuls que l'on puisse observer en préparant l'ozone avec l'oxygène contenant de l'azote, avec l'air, par exemple. M. Berthelot a démontré que, par l'emploi des plus fortes tensions électriques que l'on puisse réaliser avec les appareils de Ruhmkorff, on peut arriver à déterminer une combinaison tout autre de l'azote et de l'oxygène. Dans ce cas, en effet, ce ne sera plus l'acide pernitrique qui se produira; ce corps n'est pas stable à la haute température que détermine dans les gaz le passage de l'effluve provenant de l'électricité à forte tension; il sera décomposé,

Digitized by Google

et c'est le produit de sa décomposition par la chaleur, l'acide hypoazotique, qui apparaîtra seul. Les fortes tensions sont encore très propres à la production de l'ozone; on devra donc trouver, dans le spectre d'absorption du mélange gazeux, observé dans les mêmes conditions que j'ai déjà décrites, à la fois les bandes de l'ozone et les bandes de l'acide hypoazotique.

Le spectre de l'acide hypoazotique est assez connu pour que je n'aie pas besoin d'insister longuement. Ici, d'ailleurs encore, les bandes qui caractérisent l'ozone et l'acide hypoazotique ont un caractère tout différent, et il suffit de suivre la naissance de ces bandes dans le spectre pour savoir si l'on a produit l'ozone seul ou le mélange des deux gaz. En effet, tandis que pour l'ozone les bandes qui prennent tout d'abord naissance sont les deux caractéristiques qui entourent la raie D, pour l'acide hypoazotique, les premières bandes visibles se trouvent dans le bleu et le violet.

De tous ces faits, il résulte qu'on peut certainement avoir à observer, en même que l'ozone, l'acide pernitrique et l'acide hypoazotique; l'acide azotique anhydre se trouve aussi dans certaines circonstances mélangé à ce gaz. L'étude du spectre de l'acide pernitrique était indispensable à faire; je devais rechercher également si l'acide azotique anhydre donnait naissance à un spectre. Tous les autres composés oxygénés de l'azote pouvaient se trouver mélangés à ceux-là, ou d'une façon constante ou momentanément à la sortie de l'appareil à effluves, soit comme produits de décomposition, soit comme produits intermédiaires de réaction.

L'étude spectroscopique de tous ces composés présente en elle-même quelque intérêt; c'était un complément nécessaire à l'étude des spectres de l'ozone et de l'acide pernitrique, qui devait permettre de terminer l'étude de l'influence de l'azote sur la préparation de l'ozone.

Acide pernitrique.

Appareil et expérience.

La disposition employée pour l'étude du spectre de ce corps rappelait celle dont je m'étais servi pour l'ozone, mais considérablement

Digitized by Google

simplifiée. Il n'y avait plus ici aucune précaution à prendre pour débarrasser les appareils de l'air qu'ils renfermaient. Les dimensions de ces appareils pouvaient être fortement réduites, les bandes étaient en effet visibles facilement avec une épaisseur de gaz ne dépassant pas $0^m,10$, et devenaient très noires et plus larges avec un tube de 1^m de longueur, reproduisant le même phénomène signalé pour l'acide hypoazotique et que j'avais observé avec l'ozone.

Le mélange d'oxygène et d'azote était fait à l'avance, dans un appareil à déplacement, par une dissolution de soude. J'employais, de préférence, un mélange contenant 1^{vol} d'azote pour 3^{vol} à 4^{vol} d'oxygène, mélange qui avait paru le plus favorable à une grande production d'acide pernitrique. Le réservoir à gaz était muni d'un robinet et communiquait, par un tube de caoutchouc, avec un tube à cinq boules de M. Alvergniat contenant de l'acide sulfurique bien pur; cet appareil était soudé à un tube contenant des fragments aussi petits que possible de potasse fondue, maintenus entre deux tampons d'amiante. L'autre extrémité de ce dernier tube était soudée à l'appareil de M. Berthelot, qui communiquait, lui aussi, sans l'intermédiaire de bouchons ni de caoutchoucs, à l'ouverture pratiquée à l'une des extrémités d'un tube de 2^m, fermé, à ses deux extrémités rodées, par des glaces. Une précaution indispensable consiste à souder à l'ouverture située à l'autre extrémité du tube d'observation, ouverture par laquelle doivent sortir les gaz, un tube à potasse, destiné à empêcher l'air humide de rentrer dans l'appareil, quand on cesse d'y faire passer un courant gazeux.

Il faut respecter scrupuleusement tous ces détails d'expérience, sans lesquels toute observation devient impossible; nous avons reconnu, en effet, que des traces d'humidité suffisent pour arrêter la production de l'acide pernitrique. Si les gaz ou les appareils sont incomplètement desséchés, il devient impossible d'observer autre chose que les bandes de l'ozone.

Le spectroscope étant placé à l'une des extrémités du tube, on plaçait à l'autre ou la lampe Drummond, ou simplement la flamme d'un papillon, ou une lampe à gaz.

Digitized by Google

Résultats.

La Carte des bandes d'absorption de ce corps a été dressée avec le même spectroscope qui avait déjà servi à établir celle de l'ozone. La

Fig. 7.

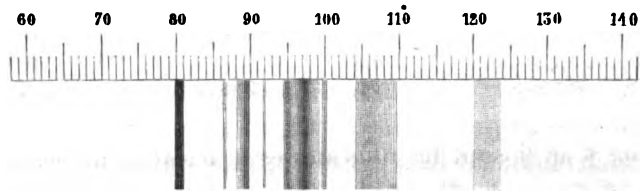
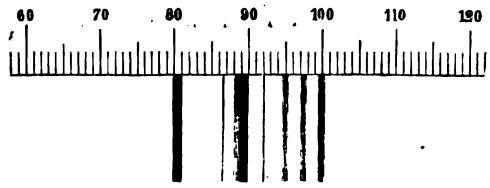


fig. 7 montre les bandes de l'acide pernitrique et celles de l'ozone superposées sur le même spectre telles qu'on les observe. La *fig.* 8

Fig. 8.



représente la partie de ce spectre qui est due à l'acide pernitrique. Les mesures micrométriques ont donné le Tableau suivant :

Numéros.	λ		Largeurs.
1.....	80	81	»
2.....	86,5	»	»
3.....	88	89,25	1,25
4.....	89,25	90	0,75
5.....	92	»	»
6.....	95	»	»
7.....	97,5	»	»
8.....	99,5	100,5	1

Digitized by Google

La position de ces bandes sur une Carte graduée (*fig.* 9) en longueurs d'ondes serait la suivante :

Numéros.	λ		Largeurs.
1.....	668	665	3
2.....	639	»	»
3.....	632	628	6
4.....	628	625	3
5.....	617	»	»
6.....	606	»	»
7.....	598	»	»
8.....	590	588,5	1,5

Les bandes 1 et 4 sont les plus nettes et les plus noires, ce sont les deux caractéristiques de l'acide pernitrique, on peut les retrouver en observant sous une épaisseur de $0^m,10$ seulement les gaz soumis à l'effluve, gaz dans lesquels la transformation en acide pernitrique est loin d'être totale.

Fig. 9.



La bande 3 est grise et ne semble pas séparée de la quatrième; elle n'est visible que quand la colonne gazeuse est plus longue.

Les bandes 6 et 7 sont superposées à la bande 2 de l'ozone, aussi leurs contours sont-ils mal définis; je n'ai noté que leur milieu; elles apparaissent en même temps que la bande 8, qui couvre exactement les deux raies D.

Les bandes 2 et 5 sont extrêmement fines et ne sont visibles qu'avec le tube de 2^m.

Acide azotique anhydre.

Quand on prépare, par la méthode de M. Weber et de M. Berthelot, l'acide azotique anhydre, l'observation spectroscopique des gaz qui remplissent la cornue de 1^{lit} où se fait la préparation permet d'af-

Digitized by Google

firmer qu'il n'y a, dans le spectre, aucune bande obscure que l'on ne doive attribuer à l'acide hypoazotique.

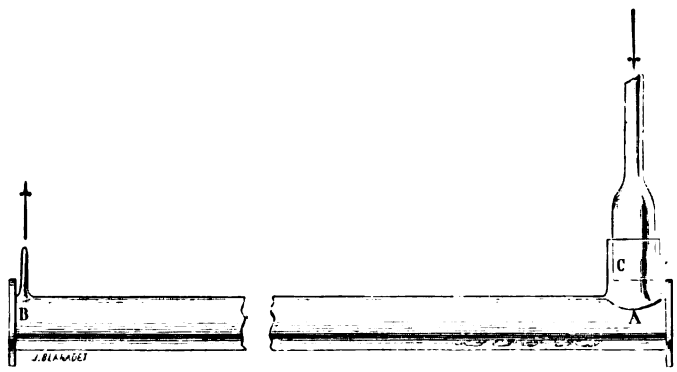
Cette observation est importante, parce qu'elle conduit à conclure, en premier lieu, que le spectre observé quand un mélage d'oxygène et d'azote a traversé l'appareil à effluves n'est pas dû à l'acide azotique anhydre; en deuxième lieu, que le gaz observable, lors de la décomposition de l'acide pernitrique, après la disparition de ce corps et avant l'apparition de l'acide hypoazotique, est bien probablement l'acide azotique anhydre.

L'acide pernitrique nous donne un exemple de décomposition lente, comparable à ces réactions limitées, non instantanées, signalées par M. Berthelot. Il y a, en quelque sorte, des échelons dans la décomposition.

Le gaz observé dans un tube de 2^m présente d'abord le spectre de l'acide pernitrique, mais, avant que l'on puisse constater l'apparition du produit ultime de la décomposition, l'acide hypoazotique, il s'écoule un temps notable où le spectre n'est traversé par aucune raie.

L'acide azotique anhydre présente ce caractère d'une décomposition lente, et aussi ce caractère spectroscopique, puisqu'il ne donne aucune bande, même quand le rayon lumineux a traversé un tube de plus de 2^m plein de la vapeur de ce corps.

Fig. 10.



Le tube (*fig.* 10) où j'ai fait l'observation ne différait des autres que parce qu'il présentait à une extrémité A un large tube soudé latéralement

Digitized by Google

en C, dans lequel entrait un tube usé à l'émeri, par lequel on faisait constamment passer un courant d'air bien sec. Les cristaux d'acide, préparés et séchés rapidement dans un courant d'air, étaient introduits par la tubulure latérale dans le tube d'expérience; le courant d'air, rapide d'abord, pour chasser l'acide hypoazotique inévitable au début, était ensuite ralenti et entraînait dans tout le tube la vapeur à étudier. Les cristaux étaient, au commencement, jaunis par l'acide hypoazotique, mais, quand la plus grande partie en avait passé à l'état de vapeur, ils étaient devenus parfaitement blancs; le tube alors ne renfermait plus que des traces d'acide hypoazotique qui déterminaient des raies dans le spectre, mais pas assez nombreuses pour qu'il n'ait été possible de remarquer les bandes nouvelles, s'il s'en était présenté.

L'acide azotique anhydre observé dans ces circonstances ne donne pas naissance à un spectre d'absorption.

Acide azoteux.

Conditions de l'observation.

Il est certainement impossible d'admettre que l'acide azoteux puisse exister en présence de l'ozone comme produit définitif de réaction, mais ce composé peut exister mélangé à l'ozone d'une façon passagère; la recherche d'un spectre d'absorption dû à ce corps, s'il en produit un, pouvait donc avoir un certain intérêt au point de vue de l'étude de la production de l'ozone et de l'acide pernitrique; d'ailleurs l'histoire de ce corps est encore assez peu avancée pour que toute observation soit intéressante à faire; aussi n'ai-je pas hésité à faire avec l'acide azoteux quelques expériences de spectroscopie.

Ce corps a pu être isolé à l'état liquide et conservé pendant quelque temps sous forme d'un liquide bleu foncé; mais on n'a pu se procurer l'acide azoteux à l'état de vapeur ou à l'état gazeux d'une façon permanente; on n'a guère disposé de ce gaz que mélangé aux produits de sa décomposition et aux gaz qui servaient à le former : bioxyde d'azote, acide hypoazotique et oxygène. Aussi l'observation spectroscopique de la vapeur qui surmonte l'acide azoteux anhydre liquide peut-elle con-

Digitized by Google

duire à attribuer à l'acide azoteux le spectre de l'acide hypoazotique; c'est ce qu'a fait Brewster.

Luck (1), qui a repris l'étude de cette question, dit qu'on peut interpréter cette observation de trois façons différentes : ou en attribuant la production du phénomène à l'acide azoteux, et admettant que l'acide hypoazotique gazeux est un mélange des acides azotique et azoteux, ou en attribuant la production du phénomène à l'acide hypoazotique, la vapeur d'acide azoteux ne pouvant exister et l'acide azoteux en vapeur étant alors un mélange d'acide hypoazotique et de bioxyde d'azote; ou en admettant enfin que les vapeurs des deux corps acide azoteux et acide hypoazotique produisent le même effet sur un rayon lumineux. Il semble difficile d'admettre que deux corps parfaitement différents puissent donner le même spectre d'absorption; de ces deux vapeurs, l'une provient d'un liquide jaune, l'autre d'un liquide bleu; la première est fortement colorée, tandis qu'on n'a jamais démontré que l'autre le fût. Nous écarterons donc cette dernière solution.

La question méritait évidemment d'être étudiée de près pour faire un choix entre les deux premières hypothèses.

Un passage du livre de M. Berthelot m'a semblé indiquer la marche à suivre pour arriver presque sûrement à une solution, et permettre de savoir si l'acide azoteux sous une faible épaisseur est coloré et présente un spectre d'absorption, comme cela a lieu pour l'acide hypoazotique.

« Les réactions (2) limitées ne sont pas d'habitude instantanées, dit M. Berthelot. Ainsi l'acide azoteux et l'oxygène ne s'unissent pas subitement de façon à former tout d'abord les systèmes en équilibre qui se manifestent au bout de quelques instants, lesquels renferment à la fois les trois gaz : bioxyde d'azote, gaz acide azoteux, gaz acide hypoazotique. Ce qui le prouve, c'est que l'oxygène et le bioxyde d'azote, mêlés à froid en proportions quelconques et agités dans l'instant même de leur mélange avec une solution alcaline concentrée, fournissent un azotite exempt d'azotate : ce résultat prouve que l'acide azoteux seul

(1) LUCK, *Ueber das Verhalten dampfförmigen salpetrigen Säure und Untersalpetersäure gegen durchfallendes Licht* (*Zeitschrift für analytische Chemie*, t. VIII, p. 406; 1869).

(2) BERTHELOT, *Essai de Mécanique chimique*, t. II, p. 92.

Digitized by Google

avait pris naissance à l'exclusion du gaz hypoazotique. » Il est donc possible, d'après cela, d'avoir de l'acide azoteux gazeux en l'absence de l'acide hypoazotique dont on lui attribue la couleur et le spectre; il est donc possible aussi de savoir s'il a une couleur et un spectre qui lui soient propres. Voyons quelles sont les précautions à prendre pour faire une semblable observation. Elles nous sont indiquées dans la suite de la même citation : « Mais un tel état de choses ne dure qu'un moment. Pour peu que la réaction ait lieu sans qu'on absorbe à mesure l'acide azoteux, l'acide hypoazotique apparaît bientôt, et l'analyse indique alors, dans tous les cas où l'oxygène fait défaut, un mélange de ces trois gaz : AzO^2, AzO^3, AzO^4. Il en est ainsi quel que soit l'excès relatif du bioxyde d'azote, c'est-à-dire que l'acide azoteux ne saurait subsister quelque temps sous la forme gazeuse à l'état pur, et autrement qu'en présence des produits de sa décomposition. C'est ce mélange complexe et variable avec les circonstances qui constitue le corps appelé *vapeur nitreuse*. Mais si l'on opère, au contraire, en présence d'un excès d'oxygène, il est clair qu'au bout de quelque temps il subsistera seulement du gaz hypoazotique. Tous ces effets sont extrêmement remarquables; mais ils se succèdent trop rapidement pour qu'on puisse faire autre chose que les constater sans les soumettre à des mesures quantitatives. »

Les conditions dans lesquelles on pourra observer l'acide azoteux gazeux sont donc parfaitement définies dans ce passage; il est clair qu'en faisant passer dans un tube froid un courant d'oxygène et de bioxyde d'azote, refroidis à l'avance, on pourra, en réglant la rapidité du courant du mélange gazeux d'après la longueur du tube d'observation, arriver à n'avoir dans ce tube que de l'acide azoteux. Il suffira, si la réaction se produit plus complètement, avec formation d'acide hypoazotique, d'augmenter la rapidité du courant pour entraîner ce gaz de façon qu'il ne commence à se produire qu'à la sortie du tube d'observation.

Expérience.

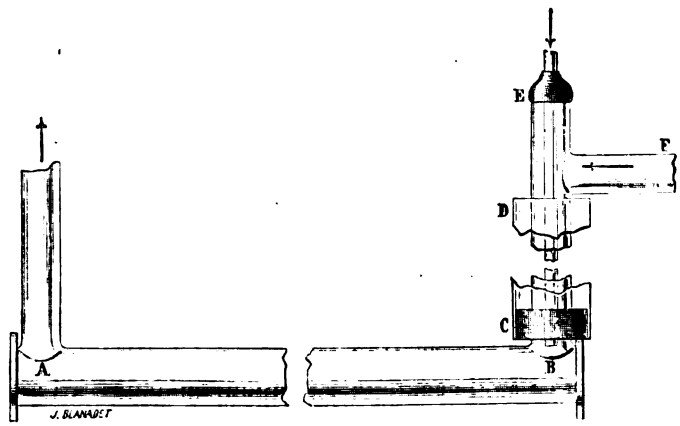
L'appareil destiné à réaliser ces diverses conditions était disposé de la façon suivante (*fig.* 11) :

Un tube AB de $0^m,20$ de longueur, de $0^m,02$ de diamètre, fermé à

Digitized by Google

ses deux extrémités par des glaces mastiquées, était placé horizontalement dans une cuve en fer-blanc qui pouvait recevoir un mélange réfrigérant ou du chlorure de méthyle. A l'une des extrémités A, et touchant la glace, était soudé un large tube permettant la sortie des gaz; à l'autre extrémité B, et contre la glace également, était soudé un tube CE placé verticalement, long de $0^m,30$, et présentant vers sa partie supérieure en D un tube DF soudé latéralement. Un tube de plus petit diamètre était mastiqué en E à la partie supérieure de celui-là et venait s'ouvrir, à la partie inférieure en C, à la soudure au tube d'observation.

Fig. 11.



En CD, on avait placé, avant de faire les soudures, un tube de verre plus large, soutenu en C par un bouchon, et qui était destiné à refroidir les gaz dans leur parcours de D en C avant leur introduction dans le tube d'observation. Le bioxyde d'azote, préparé à l'aide de l'acide azotique et du cuivre, traversait un flacon laveur, contenant une dissolution concentrée de potasse, puis un tube à acide sulfurique et un tube contenant des fragments de potasse, dans lesquels il se débarrassait de l'acide hypoazotique et se desséchait. Ces deux derniers tubes étaient refroidis dans un mélange de glace et de sel marin. Le gaz arrivait enfin par l'ouverture F et se répandait par l'espace annulaire jusque en AB.

L'oxygène, provenant d'un appareil à déplacement, traversait un tube

Digitized by Google

à acide sulfurique et un tube à potasse refroidis, avant d'arriver en E. Toutes les parties de l'appareil étant refroidies, on faisait passer un courant de bioxyde d'azote, et, l'appareil étant plein de ce gaz, on admettait l'oxygène. Avec un tube aussi long que celui que j'avais employé, il fallait une grande rapidité dans le courant gazeux et un excès de bioxyde d'azote, pour éviter la production d'acide hypoazotique; mais on pouvait, malgré la difficulté, maintenir pendant quelques instants le tube parfaitement incolore.

Le spectroscope ne permettait, dans ces moments, d'observer aucune des bandes caractéristiques de l'acide hypoazotique; en laissant ralentir le courant gazeux, on pouvait observer une absorption partielle et très faible de la lumière, s'étendant dans le spectre de la gauche jusqu'au vert, et de même vers la droite, de la fin du bleu aux limites visibles du spectre.

Ces deux régions du spectre semblaient légèrement voilées; les rayons verts et bleus paraissaient, au contraire, être transmis sans être aucunement absorbés. En général, au moment où cette observation était devenue possible, par suite du ralentissement du courant gazeux, les bandes de l'acide hypoazotique apparaissaient; on constatait aussi que, à ce même instant, il y avait condensation de traces d'acide azoteux dans le tube d'observation.

Il y avait alors de l'acide azoteux en vapeur mélangé à l'acide hypoazotique; si cette vapeur avait dû déterminer des bandes d'absorption on aurait pu les retrouver, superposées au spectre de l'acide hypoazotique; la comparaison à ce spectre, à l'aide d'un prisme à réflexion totale, ne m'a pas permis d'observer une seule bande nouvelle. L'acide azoteux n'a donc pas un spectre de bandes. On voyait cependant, dans le spectre de l'acide hypoazotique, cette absorption de tous les rayons lumineux, sauf le vert et le bleu, déjà observable avant la formation de l'acide azoteux liquide, absorption que l'on doit évidemment attribuer à la vapeur de ce corps.

Tant que le tube d'observation contenait des traces d'acide azoteux liquide, il était impossible d'éviter la présence de l'acide hypoazotique gazeux; en augmentant la rapidité du courant, on parvenait à entrainer l'acide azoteux en le volatilisant, mais ce n'est qu'après ce résultat obtenu que le tube pouvait de nouveau devenir incolore.

Digitized by Google

Une expérience faite par M. Gernez, dans le but d'obtenir le spectre de l'acide azoteux, l'a conduit à observer un fait analogue à celui que je signale. Une ampoule renfermant l'acide azoteux liquide était brisée dans un tube plein d'un gaz inerte et refroidi et à travers lequel passait un rayon de lumière analysé à sa sortie dans un spectroscope; il n'a pas été possible, dans ces conditions, d'observer un seul instant la vapeur d'acide azoteux, en l'absence de l'acide hypoazotique (1).

C'est pourtant ce que les expériences et les analyses de M. Berthelot démontrent être possible, et ce que mes propres expériences m'ont permis de faire, mais à cette condition seulement, de prendre la vapeur de ce corps avant sa condensation, pendant sa formation. Les analyses faites par M. Berthelot lui ont permis d'obtenir à ce moment un azotite sans azotate; d'un autre côté, j'observe un gaz qui paraît sous faible épaisseur incolore, qui présente au spectroscope une absorption toute différente de celle qui caractérise l'acide hypoazotique, et, au même moment, ce gaz condensé donne un liquide bleu, puis le phénomène cesse d'être observable.

Le fait signalé par M. Berthelot, comme se produisant momentanément pendant la formation de l'acide azoteux, et qui permet d'avoir en présence de ce gaz l'oxygène et le bioxyde d'azote seulement, paraît être un phénomène très particulier, puisqu'il ne semble pas y avoir, lors du passage à l'état de vapeur en présence de AzO^2 et O, un moment analogue à celui-là, où la vapeur existerait seule, en l'absence des produits de sa décomposition, puisqu'on ne peut pas non plus observer la vaporisation de l'acide azoteux dans un gaz inerte, sans constater en même temps la décomposition de cette vapeur.

J'ai d'ailleurs fait sur l'acide azoteux liquide une observation, que l'on peut considérer comme une confirmation des résultats obtenus avec l'acide azoteux gazeux. Le liquide produit sur la lumière un effet analogue à celui que donne le gaz, mais beaucoup plus facile à saisir. Cela semble être un fait général et qui présente quelque intérêt. Il a

(1) GERNEZ, *Note sur le prétendu spectre d'absorption spécial de l'acide azoteux* (*Bulletin de la Société philomathique* de Paris, 7e série, t. V; 1881).

Digitized by Google

déjà été observé sur l'acide hypoazotique; Kundt (1) a retrouvé, en observant ce corps à l'état liquide, quelques bandes, assez peu nettes d'ailleurs, mais correspondant aux groupes principaux de ce même corps à l'état gazeux. M. Gernez (2) a observé le même fait plus facilement et d'une façon plus nette en dissolvant l'acide liquide dans des liquides anhydres bien transparents. Je l'ai observé également avec le dispositif qui m'a servi pour l'acide azoteux, et que voici : l'acide azoteux était préparé à très basse température et versé dans une cuve en verre préalablement refroidie, placée devant la fente du spectroscope. L'observation en vase clos présente des difficultés : j'y avais renoncé; l'observation en vase ouvert n'a qu'un inconvénient : c'est que la quantité considérable de vapeurs nitreuses qui se dégagent sans cesse de la cuve gêne l'observateur, et, formant souvent une couche épaisse entre la source lumineuse et le spectroscope, y détermine l'apparition de bandes dues à ces gaz; j'y avais remédié en installant, à un pied de distance de la cuve, la large ouverture d'une soufflerie, qui, envoyant un rapide courant d'air, balayait incessamment l'espace traversé par les rayons lumineux. Pour toutes ces observations, une cuve d'épaisseur variable paraît indispensable; on retrouve, en effet, avec les liquides, le phénomène signalé pour les gaz : une variation dans la largeur et l'intensité des bandes obscures, ou d'une façon générale dans l'absorption, qui dépend de l'épaisseur du milieu traversé. J'avais préparé des lames de verre, d'épaisseurs variées, qui pouvaient entrer dans la cuve; elles étaient maintenues froides et l'on pouvait à volonté, en les introduisant dans la cuve pleine d'acide azoteux liquide, se procurer une lame liquide dont l'épaisseur variait entre $0^{mm},5$ et $0^{m},01$. On constate que l'acide azoteux ne laisse passer, sous une épaisseur, même la plus faible, que la lumière bleue; il éteint sous une épaisseur de $0^{m},01$ totalement les autres lumières, il les éteint partiellement sous les épaisseurs plus faibles. Il est impossible de voir aucune bande d'absorption.

L'acide azoteux, pas plus à l'état gazeux qu'à l'état liquide, ne pré-

(1) KUNDT, *Poggendorff's Annalen*, t. CXLI, p. 157; octobre 1870.
(2) GERNEZ, *Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 465; 1872.

Digitized by Google

sente donc de spectre de bandes, mais sous les deux états il absorbe partiellement la lumière de certaines régions étendues du spectre.

Azote, bioxyde et protoxyde d'azote.

Le bioxyde et le protoxyde ne déterminent ni l'un ni l'autre, étudiés sous une épaisseur aussi faible que celle qui permet d'observer les spectres de l'ozone ou de l'acide pernitrique, ni bandes d'absorption ni absorption quelconque de la lumière.

Le bioxyde, maintenu à 500^{atm} dans le tube de $0^{m},001$ de section de l'appareil de M. Cailletet, paraît tout à fait incolore; le protoxyde liquide ressemble à de l'eau. La lumière qui a traversé ces gaz ne paraît aucunement modifiée.

J'ai fait l'observation dans l'appareil Cailletet modifié, décrit à propos de l'ozone, et j'ai maintenu le bioxyde d'azote à 35^{atm}; la couche de gaz, étant de $0^{m},20$, équivalait à cette pression à une colonne de 7^{m}. A ces fortes pressions seulement, on commençait à apercevoir un voile sur le rouge et le violet, qui semblaient partiellement absorbés; le gaz, du reste, paraissait totalement incolore.

L'azote, soumis ou non à l'action des effluves, ne présente pas non plus de spectre d'absorption.

La description des spectres d'absorption de l'ozone et de l'acide pernitrique fournit des éléments indispensables à connaître pour la recherche spectroscopique des composés gazeux et des réactions qui peuvent se produire dans les mélanges de gaz, dont l'ozone et les composés oxygénés de l'azote font partie.

Cet examen optique constitue une méthode très sûre et très sensible; nous nous en sommes constamment servis, M. Hautefeuille et moi; il nous a permis, outre les observations que j'ai déjà signalées, d'étudier les produits obtenus par l'électrisation de l'acide carbonique et de reconnaître quelques-unes des propriétés de l'acide pernitrique.

Digitized by Google

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATIONS A LA PHYSIQUE DU GLOBE.

Raies telluriques.

Ce travail touche à une très grande et très intéressante question de la Physique cosmique, celle de la spectroscopie sidérale. Parmi les raies découvertes dans le spectre solaire, la plupart sont dues à l'absorption produite par l'atmosphère solaire; il en est, cependant, dont l'origine ne peut s'expliquer de cette façon. Celles-là sont dues à l'atmosphère terrestre; Brewster et Gladstone, qui les ont pour la première fois étudiées, leur ont donné, pour rappeler leur origine, le nom de *raies telluriques*.

La question qui se présente à propos de ces raies est double.

Le premier problème qui se pose est celui-ci : *Rechercher les raies telluriques et en dresser une Carte*. On peut dire qu'il n'est pas complètement résolu, quoique les plus grands savants s'en soient occupés.

Il existe une Carte des raies telluriques donnée par Brewster et Gladstone (1).

Postérieurement à ce travail parut celui d'Angström (2).

Ces savants ne sont pas d'accord; Angström déclare (p. 39) que les dessins qui accompagnent le Mémoire de Brewster et Gladstone sont assez peu satisfaisants; la Carte publiée par Angström est d'ailleurs fort incomplète, puisque l'auteur a borné ses études à l'extrémité rouge du spectre, région où se trouvent les raies telluriques les plus nombreuses et surtout les plus nettes.

---

(1) BREWSTER et GLADSTONE, *Étude du spectre solaire* (*Philosophical Transactions*, t. CL; London, 1860).

(2) ANGSTRÖM, *Spectre normal du Soleil*; 1869.

Digitized by Google

Le travail de M. Janssen (1) sur les raies telluriques n'indique pas la position des raies en longueur d'onde, et, de plus, se borne aussi à l'étude de la région CD, fait qui s'explique quand on sait que le but poursuivi par M. Janssen était la recherche des bandes dues à la vapeur d'eau, et quand on sait qu'une observation directe lui avait appris que la vapeur d'eau détermine la formation de bandes dans la région AD.

Cependant ce savant annonce que l'atmosphère produit une absorption du même ordre dans les autres régions du spectre, et qu'on remarque quelques autres bandes, en particulier, dans le bleu et le violet.

Il n'existe donc pas de Carte des raies telluriques à laquelle nous puissions comparer la Carte des bandes d'absorption de l'ozone, puisque la presque totalité des bandes dues à ce gaz se trouve dans la région non décrite du spectre des raies telluriques.

Le deuxième problème se pose tout aussi nettement : *A quelles matières contenues dans l'air atmosphérique doit-on attribuer la production des bandes telluriques?*

Angström voit toute la difficulté du problème; il se borne à indiquer la vapeur d'eau et l'acide carbonique comme devant être étudiés à ce point de vue, « et, dit-il en terminant (p. 41), on pourrait même supposer que l'ozone peut produire une action analogue ».

M. Janssen est le seul jusqu'ici qui ait étudié cette question avec tout le soin qu'elle mérite. Une étude attentive du spectre solaire lui a fait attribuer à la vapeur d'eau dissoute de notre atmosphère une part très importante dans la production du phénomène (2).

« Mais, dit-il (3), je suis loin d'attribuer à la vapeur d'eau l'universalité des raies telluriques du spectre solaire; j'ai toujours pensé, au contraire, que tous les gaz de notre atmosphère doivent avoir leur part dans le phénomène, part qui, pour certains d'entre eux, sera peut-être fort difficile à faire, mais qui doit exister en principe. »

---

(1) JANSSEN, *Études sur les raies telluriques du spectre solaire* (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIII, p. 274; 1871.

(2) JANSSEN, *Sur le spectre de la vapeur d'eau* (*Comptes rendus*, t. LXIII, p. 289; 1866).

(3) JANSSEN, *Remarques sur une récente Communication de M. Angström relative à quelques faits d'analyse spectrale* (*Comptes rendus*, t. LXIII, p. 728; 1868).

Digitized by Google

Cependant M. Janssen n'a pas publié de Cartes du spectre de la vapeur d'eau, document qui serait indispensable pour la discussion des résultats.

Il donne une figure (1) représentant les premiers résultats obtenus et sur laquelle sont dessinées, entre autres, deux bandes à droite et à gauche de D, et qui semblent, d'après lui, correspondre exactement à des bandes observées dans le spectre du Soleil vers l'horizon.

Ce seul fait suffit pour faire comprendre la complexité du problème, puisque, à gauche et à droite de D, outre les raies dues à l'atmosphère solaire, nous devons rechercher les bandes dues à la vapeur d'eau et celles dues à l'ozone, bandes qui sont partiellement ou peut-être totalement superposées.

Les recherches que j'ai faites pour savoir si certaines bandes telluriques doivent être attribuées à l'ozone me permettent d'affirmer la présence de trois bandes de l'ozone dans le spectre du Soleil vu à l'horizon. Ce sont les suivantes :

Numéros.	Position en longueur d'onde.	
2.....	609,5	593,5
3.....	577,0	560,5
5.....	535,0	527,0

Ces bandes sont celles qui apparaissent les premières dans une observation directe de l'ozone.

Pour les bandes 2 et 3, qui présentent une variation dans l'intensité d'un bord à l'autre, il n'y a pas correspondance entre leur maximum et celui observé directement dans les bandes correspondantes du spectre solaire. Ce résultat n'a rien qui doive nous surprendre, puisqu'en ces mêmes régions se trouvent superposées des bandes de la vapeur d'eau; mais on comprend, d'après cela, l'intérêt qu'il y aurait à pouvoir comparer, à une Carte exacte des bandes telluriques, deux Cartes superposées des bandes de la vapeur d'eau et des bandes de l'ozone.

---

(1) JANSSEN, *Sur le spectre de la vapeur d'eau* (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXIV, p. 215; 1871).

Digitized by Google

Bleu du ciel.

De ce seul fait, que dans le spectre solaire il est possible de retrouver les plus visibles parmi les bandes d'absorption dues à l'ozone, il résulte que l'on ne peut chercher à établir une théorie du bleu du ciel sans tenir compte de la présence de ce gaz; les rayons lumineux qui nous arrivent seront nécessairement colorés en bleu par leur transmission à travers l'ozone contenu dans l'atmosphère.

J'ai déjà annoncé ce résultat dans une Communication faite à l'Institut le 12 décembre 1880 (1), où je dis que, l'ozone étant un élément important des hautes régions atmosphériques, sa couleur bleue joue certainement un rôle dans la coloration du ciel.

Au mois de mars de l'année suivante parut un Mémoire de M. Hartley (2), dans lequel ce savant chimiste expose qu'il a été conduit, par des considérations toutes différentes des miennes, à des conclusions qu'il formule dans des termes presque identiques à ceux dont je me suis servi; il conclut, comme je l'ai fait, que l'ozone est un élément normal des hautes régions atmosphériques, et qu'il existe là en plus grande quantité qu'à la surface du sol.

Mais, au lieu de se borner à affirmer le rôle que l'ozone doit jouer dans la coloration du ciel, il attribue nettement cette coloration à la présence de ce gaz. Il faut bien reconnaître, cependant, que la théorie proposée par M. Lallemand (3) pour rendre compte du bleu du ciel, si elle détruit toutes les explications jusque-là proposées, résiste à toutes les objections et permet seule une assez bonne interprétation de tous les résultats observés.

Si la coloration était seulement due à la transmission à travers un gaz coloré, la portion bleue de la lumière émise par le ciel serait polarisée tout autant que la lumière blanche provenant du même point du ciel;

---

(1) *Spectre d'absorption de l'ozone* (*Comptes rendus*, t. XCI, p. 985; décembre 1880).

(2) HARTLEY, *On the absorption of solar rays by atmospheric ozone* (*Journal of the chemical Society*, n° CCXX, p. 111-128; march 1881).

(3) LALLEMAND, *Sur la polarisation et la fluorescence de l'atmosphère* (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 707; 1872).

Digitized by Google

or les expériences de M. Lallemand prouvent qu'il n'en est pas ainsi; et c'est sur ces expériences qu'il s'appuie pour attribuer la couleur bleue de l'atmosphère à un phénomène de fluorescence quinique; phénomène dans lequel les rayons ultra-violets et violets, partiellement absorbés, sont ensuite émis avec changement de réfrangibilité et en cessant d'être polarisés. Les faits sur lesquels s'appuie cette théorie semblent rigoureusement établis; et en particulier l'absorption des rayons ultra-violets par l'atmosphère vient d'être l'objet d'une étude des plus intéressantes de M. Cornu (1).

Il n'en est pas moins prouvé qu'une portion de la lumière bleue semble devoir être attribuée à la présence de l'ozone; c'est là un fait qui paraît parfaitement certain, et dont il y aura lieu de tenir compte pour expliquer en totalité la coloration bleue du ciel. Si une autre cause concourt à produire ce remarquable phénomène, il n'en reste pas moins établi que l'ozone participe à sa production.

---

(1) CORNU, *Sur l'absorption atmosphérique des raies ultra-violettes* (*Journal de Physique*, t. X, n° 109, p. 5; 1881).

Digitized by Google

SUR LES

SILICOMOLYBDATES,

PAR M. F. PARMENTIER,

Ancien Élève de l'École Normale, Sous-Directeur du Laboratoire d'Enseignement chimique de la Faculté des Sciences.

INTRODUCTION.

L'étude des principales combinaisons chimiques avait conduit, au commencement de ce siècle, les savants à admettre une grande simplicité pour les rapports des poids suivant lesquels les corps entrent en combinaison.

Les progrès de la Chimie organique ont démontré que ce caractère de simplicité n'existe pas toujours pour les corps qu'elle étudie. Si les rapports des poids suivant lesquels existent les éléments dans les corps organiques artificiels et naturels sont constants, ils sont souvent compliqués. Le carbone s'unit aux autres éléments d'une façon non seulement très variée, mais souvent compliquée; les matières ainsi produites, en se combinant entre elles, donnent, pour les composés organiques, une très grande variété et une très grande richesse.

Les composés minéraux ont longtemps semblé devoir présenter le caractère de simplicité précédemment admis, et les analyses nombreuses et délicates de Berzélius venaient confirmer cette façon de voir. Les métaux, en s'unissant avec les autres éléments, le font en général suivant des rapports de poids simples et peu nombreux; les corps ainsi produits semblent, en se combinant entre eux, suivre la même règle. De là, il est vrai, une netteté quelquefois très grande pour l'étude

Digitized by Google

des composés minéraux, mais aussi un nombre restreint de combinaisons, ce qui semblait même être le caractère distinctif de la Chimie minérale.

Et cependant, un certain nombre d'espèces minérales, parfaitement cristallisées, donnent à l'analyse des rapports souvent compliqués pour les éléments qu'elles renferment. Les lois de l'isomorphisme sont venues expliquer l'association, en apparence quelquefois anormale, de certains éléments, et ont permis d'assigner des formules simples à un grand nombre de minéraux.

Mais quand ces lois ne peuvent pas rendre compte des faits observés, n'a-t-on pas quelquefois considéré des éléments peu abondants comme des impuretés, comme des matières dues à des inclusions plus ou moins bien constatées?

L'existence de combinaisons complexes en Chimie minérale est maintenant admise comme certaine par la plupart des chimistes. Mais les recherches dans cette direction, toujours pénibles, sont encore peu nombreuses.

M. Marignac (1) le premier, en 1864, dans son remarquable Mémoire *Sur les silicotungstates*, a mis nettement ce fait en évidence. Il a fait voir que les tungstates peuvent dissoudre des quantités très petites de silice, et qu'il se forme des composés nouveaux, entièrement distincts des premiers par leurs propriétés et leur forme cristalline. Il a démontré qu'il se produit des composés parfaitement définis, en retirant de corps ainsi obtenus des acides nouveaux. Ces acides sont très solubles dans l'eau, cristallisent en conservant toujours la même composition, et reproduisent, par leurs combinaisons avec les bases, les sels dont on les a extraits. On est là en présence d'espèces chimiques nouvelles, et cependant la quantité de silice, dans ces combinaisons, est toujours très petite; le rapport de l'équivalent de ce corps à celui des autres est compliqué.

Pour ne citer que la série principale des combinaisons étudiées par M. Marignac, nous rappellerons que le rapport des équivalents de l'acide silicique et de l'acide tungstique y est 1 : 12, et que les sels de cette série contiennent $2^{éq}$ ou $4^{éq}$ de base.

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. III.

Digitized by Google

Quelque temps après, M. Debray (1), dans l'étude de l'acide molybdique, est également arrivé à des faits non moins inattendus.

On savait que l'acide molybdique se dissout, en présence de l'acide phosphorique, pour donner naissance à une liqueur jaune. On savait aussi que l'acide phosphorique et l'acide arsénique, en présence des molybdates alcalins dissous dans les acides, donnent naissance à des précipités jaunes, peu riches en acide phosphorique et en acide arsénique; on s'était même servi de ce fait pour rechercher et doser l'acide phosphorique, dans certains cas particuliers. Se trouvait-on là en présence de combinaisons bien définies? Les analyses de ces produits ne concordaient pas, l'obscurité régnait sur la question, et l'on n'était arrivé qu'à donner sur ce sujet des recettes empiriques. M. Debray a fait voir que l'on avait affaire à des combinaisons parfaitement définies. Par des artifices spéciaux, il est arrivé à reproduire les combinaisons précédentes à l'état cristallisé. Enfin, de ces substances amorphes, il a retiré un acide nouveau, l'acide phosphomolybdique, d'une grande stabilité, d'une beauté remarquable comme forme cristalline, d'une solubilité étonnante, reproduisant les combinaisons salines d'où on l'avait extrait, jouissant, en un mot, de propriétés complètement différentes de celles de l'acide molybdique. M. Debray, du même coup, élucidait une question de la plus haute importance au point de vue analytique et démontrait le fait de la combinaison possible, en proportions définies, de deux acides différents, combinaison se faisant dans le rapport de 1 à 20 pour les équivalents, et donnant des sels dans lesquels le rapport des équivalents des bases à celui des acides était 3:21, 7:21 et 2:21.

Les combinaisons de l'ordre de celles dont nous venons de parler sont peut-être fort nombreuses. Il y en a même de plus compliquées. M. Marignac et M. Debray ont en effet trouvé que les sels qu'ils ont étudiés peuvent se combiner à leur tour avec les azotates, pour donner naissance à de nouveaux sels.

Dans ce genre de recherches surgissent de grandes difficultés : il est difficile d'arriver à faire l'analyse complète et rigoureuse de pareils composés et de démontrer la constance des rapports des éléments. Il est souvent plus difficile encore d'en séparer des acides nouveaux, dont

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, 1868.

Digitized by Google

l'isolement est le critérium le plus certain de l'existence d'une classe nouvelle de sels.

C'est un travail de cet ordre que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui au jugement de la Faculté.

J'ai étudié l'action des molybdates sur la silice, et je suis arrivé à démontrer l'existence des silicomolybdates.

On sait les analogies de l'acide molybdique et de l'acide tungstique. Existe-t-il des combinaisons de silice et d'acide molybdique analogues aux silicotungstates? M. Marignac le pensait : différents essais ont même été faits dans cette direction ; ils sont restés sans résultat, parce que, pour trouver ces corps, on s'était placé dans les conditions de formation des silicotungstates, conditions incompatibles avec l'existence des silicomolybdates.

Nous avons dit que certains chimistes avaient trouvé des variations dans la composition des phosphomolybdates jaunes. Cela tenait à des causes complexes, mais le plus souvent à la précipitation simultanée des phosphomolybdates jaunes et de molybdates très acides, molybdates dont j'ai constaté l'existence, et que je n'ai trouvés signalés nulle part; ou encore, à l'existence simultanée, dans les précipités, de phosphomolybdates de bases différentes.

Un autre fait, dont l'étude fait partie de ce travail, pouvait amener des variations dans la composition des produits obtenus. L'acide silicique, dans les mêmes conditions que l'acide phosphorique, donne naissance à des précipités de même couleur, de même aspect extérieur que les phosphromolybdates.

Ces précipités ont été signalés, pour la première fois, en 1857 et 1858 par Knop (1) qui, à une époque antérieure aux travaux de M. Marignac et de M. Debray, ne fit que constater le fait de la production d'une matière jaune, insolublé dans le chlorhydrate d'ammoniaque.

Ce résultat fut contredit, d'abord par Habel, puis par Jenkins (2) et de nouveau confirmé par Atkinson (3). Les résultats contradictoires obtenus, dus à des modes différents d'opérer, laissaient la question

(1) Knop, *Chem. Cent. Blatt;* 1857 et 1858.
(2) *Zeitschrift der anal. Chem.*, 1876.
(3) *Chem. News*, t. XXXV, p. 127.

Digitized by Google

indécise, et j'ose espérer que ce travail jettera quelque lumière sur ce sujet si important en analyse.

La majeure partie de ce travail a été faite au laboratoire de recherches de l'École Normale. Qu'il me soit permis de remercier ici M. Debray, pour les bons conseils et la critique toujours bienveillante qu'il m'a prodigués dans le cours de ce travail.

Conditions de formation et propriétés générales des silicomolybdates.

Les analogies de l'acide molybdique et de l'acide tungstique permettaient, après les recherches de M. Marignac, de prévoir l'existence de silicomolybdates analogues aux silicotungstates. Toutefois, les travaux faits dans ce sens n'avaient pas abouti, et la remarque de Knop, qui devait mettre sur la voie de la découverte de ces corps, avait passé inaperçue.

On s'était placé, pour obtenir les silicomolybdates, dans les conditions qui avaient permis à M. Marignac de produire les silicotungstates, c'est-à-dire qu'on avait cherché à attaquer la silice gélatineuse par des molybdates voisins, comme composition, des paratungstates. La silice, dans ces conditions, n'est pas attaquée, comme je l'ai, du reste, vérifié moi-même. Bien plus, la présence simultanée de bimolybdates et de silicomolybdates produit la décomposition de ces derniers.

Il fallait attaquer la silice par des molybdates beaucoup plus acides, ou bien se mettre dans des conditions telles, que ces molybdates pussent prendre naissance et agir sur la silice. Ces conditions sont précisément celles de la production des phospho et arséniomolybdates jaunes, étudiés par M. Debray.

Quand, à une dissolution d'un molybdate alcalin dans les acides, on ajoute de l'acide orthophosphorique ou un orthophosphate, il se forme un phosphomolybdate correspondant à la base employée. Les silicomolybdates se produisent dans les mêmes circonstances. On les forme en ajoutant à la dissolution acide de molybdates de la silice dialysée ou un silicate dissous dans un acide.

On obtient ainsi des corps de forme cristalline, de composition par-

Digitized by Google

faitement définie et de propriétés spéciales. Ces corps présentent une stabilité assez grande en présence des acides, comme les phosphomolybdates; de plus, ils sont jaunes comme ces derniers.

Mais là s'arrête l'analogie de ces deux séries de corps. Les phosphomolybdates alcalins, sauf ceux de soude et de lithine, sont insolubles dans l'eau et les acides. Les silicomolybdates alcalins, sauf ceux de cœsium et de rubidium, sont plus ou moins solubles. Traités par l'ammoniaque ou les carbonates alcalins, les silicomolybdates abandonnent une portion de leur silice et régénèrent les molybdates ordinaires. Dans ces circonstances, les phosphomolybdates jaunes donnent, au contraire, naissance à la production simultanée de molybdates et de phosphomolybdates blancs, plus riches que les jaunes en acide phosphorique, et très bien cristallisés. De plus, le phosphomolybdate d'ammoniaque, traité par l'eau régale, qui détruit l'ammoniaque, donne naissance à l'acide phosphomolybdique jaune. Quand on traite le silicomolybdate d'ammoniaque par l'eau régale, on n'obtient pas l'acide de ce corps. On produit, en même temps que la destruction de l'ammoniaque, la précipitation d'une portion de la silice, et, pour isoler l'acide silicomolybdique, j'ai dû recourir à un autre procédé.

Avant d'entrer dans l'étude détaillée de ces corps, et pour ne pas interrompre cette étude, je crois devoir dire d'abord comment j'ai pu y doser la silice.

Dosage à l'état cristallisé de la silice dans l'acide silicomolybdique et ses composés.

Dans l'analyse des matières qui font l'objet de ce travail, se présentent de grandes difficultés. De tous les éléments de ces corps, le seul abondant est l'acide molybdique. Les bases et la silice s'y trouvent en quantités faibles.

On pouvait choisir les bases de façon que leur dosage fût sûr; on pouvait encore les choisir de façon que leur équivalent fût considérable. Dans ce dernier cas, la teneur en silice diminuait, et de toutes manières le dosage de ce corps, pour être effectué avec certitude, présentait des difficultés réelles.

Digitized by Google

On sait que, lors même qu'on est arrivé à séparer d'une façon sûre la silice des éléments qui l'accompagnent, comme dans le procédé de Henri Sainte-Claire Deville, on éprouve de grandes difficultés à peser ce corps. Pendant l'incinération des filtres, on risque de voir se perdre des quantités notables de silice; quand on ne prend de grandes précautions, ce corps est entraîné avec les fumées produites. Quand on veut peser cette silice, il faut le faire pendant le refroidissement de la matière, afin d'éviter une augmentation de poids due à l'absorption de la vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère.

Dans le cas des silicomolybdates, les procédés de séparation de la silice échouent. Quand on les évapore à siccité en présence des acides, la silice n'en est pas complètement séparée. Les attaquer par un excès de chaux ou de carbonates alcalins à haute température et les reprendre par un acide, c'est se placer dans les conditions mêmes de leur formation, et cependant, pour arriver à établir les formules des silicomolybdates, il faut pouvoir, non seulement déterminer d'une façon directe le poids de silice, mais le faire d'une façon sûre. Essayer de doser cet élément par différence, c'est-à-dire reporter sur lui la somme des erreurs faites dans le dosage des autres éléments, est s'exposer à être conduit, par l'interprétation rigoureuse des résultats, à des conséquences fort éloignées de la vérité.

Le seul procédé de séparation connu que je pouvais espérer utiliser était l'attaque de mes produits par les bisulfates alcalins à la température de décomposition de ces matières. Cette méthode, grâce à des précautions spéciales, avait été employée avec succès par M. Marignac, pour l'analyse des silicotungstates, et c'est d'elle que je me suis servi pour faire mes premières analyses. Mais je ne tardai pas à reconnaître que la quantité de silice précipitée variait, après fusion complète des matières, avec la durée de l'attaque ultérieure, c'est-à-dire avec la composition finale du mélange obtenu. De nombreuses analyses, faites par ce procédé, m'avaient cependant conduit à des formules très rapprochées de la vérité. Mais il me restait des doutes. Jamais, en effet, je n'étais arrivé à précipiter totalement la silice; j'en étais averti par ce fait que les liqueurs filtrées, additionnées d'un acide, reprenaient la teinte jaune, caractéristique de la présence, même de petites quantités de silice.

Digitized by Google

L'action des molybdates acides de soude ou de potasse sur la silice, à haute température, m'a mis sur la voie d'un procédé de dosage très rigoureux de la silice, procédé nouveau qui permet de doser ce corps à l'état cristallisé et qui pourra peut-être servir avantageusement à l'analyse d'un certain nombre d'autres substances silicatées.

M. Hautefeuille (1), en maintenant de la silice en présence de tungstates et de vanadates acides en fusion, avait obtenu, à haute température, de la tridymite; à température plus basse, du quartz.

En faisant fondre les silicomolybdates avec une quantité de carbonate alcalin inférieure à celle nécessaire pour la saturation complète de l'acide molybdique, je suis arrivé aux mêmes résultats. Par les pesées de la silice obtenue par ce procédé, je ne tardai pas à reconnaître que j'avais des quantités plus considérables, et surtout plus constantes que par l'attaque au bisulfate. De plus, la silice était cristallisée, à l'état de quartz quand l'expérience était faite à la plus basse température, à l'état de tridymite quand la fusion avait lieu à haute température; dans tous les cas, à raison de son état cristallin, le maniement de la silice devenait plus facile. Ainsi disparaissaient un certain nombre de causes d'erreur, dues à la facilité de l'entraînement de la silice dans les incinérations des filtres et à l'absorption de la vapeur d'eau quand elle est amorphe.

Mais, pour être complètement sûr de ce procédé, il fallait le vérifier par des expériences synthétiques; il fallait, par des poids déterminés de molybdates alcalins de composition déterminée, bien exempts de silice, attaquer des poids connus de silice jusqu'à complète cristallisation de ce corps, et étudier dans quelles conditions, s'il se produisait des pertes de silice, on pouvait arriver à une perte minima, et au besoin, si cette perte était faible, en tenir compte dans les analyses.

La perte en silice devait, à priori, varier avec un certain nombre de circonstances :

1° Elle devait dépendre, une fois la cristallisation produite, du mode de refroidissement;

---

(1) *Annales de l'Ecole Normale*, t. IX, 1880.

Digitized by Google

2° Varier avec la composition chimique du fondant;

3° Être, jusqu'à une certaine limite, proportionnelle au poids du fondant employé;

4° Être indépendante de la quantité absolue de silice attaquée.

Il fallait donc, par des essais comparatifs, étudier le rôle de chacune de ces variables.

C'est ce que j'ai fait dans une assez longue série d'expériences, dont je rapporterai les plus essentielles.

1° *Influence de la durée du refroidissement.* — C'était là le premier point à élucider. Pour reconnaître la part de cet élément, il fallait, toutes autres conditions égales d'ailleurs, chauffer de la même façon, pendant le même temps, à la même température, la même quantité de silice avec la même quantité de molybdate alcalin, et voir dans quelles circonstances on arriverait à une perte minima. Pour réaliser ces conditions, il fallait être en possession d'une enceinte dans laquelle on pût placer des creusets, les chauffer de la même façon, et faire varier facilement la température entre des limites assez étendues. Je me suis servi, dans ce but, d'un moufle de masse assez grande, chauffé au gaz, dans lequel je pouvais placer deux creusets l'un à côté de l'autre; en modifiant l'arrivée du gaz et de l'air dans les brûleurs, je pouvais aller depuis le bon rouge jusqu'à la température ordinaire. La masse du moufle étant assez considérable, la terre peu conductrice, il se produisait des abaissements de chaleur réguliers et lents, pendant les baisses successives et répétées du feu.

Une série d'expériences a été faite en plaçant dans le moufle deux creusets, l'un à côté de l'autre, et les chauffant pendant un temps plus long que celui déterminé d'avance comme nécessaire pour produire une cristallisation complète. L'un des creusets était, tantôt retiré brusquement du moufle et refroidi à l'extérieur, tantôt enlevé plus lentement, en le laissant refroidir préalablement quelque temps sur les bords. L'autre restait en place et était refroidi lentement pendant un temps variant de deux à trois heures, quelquefois plus.

On verra, d'après les résultats ci-joints, que la perte était la plus petite quand le refroidissement était le plus lent. De là la conclusion pratique, pour les expériences ultérieures, de la nécessité de refroidir la matière le plus lentement possible.

Digitized by Google

Refroidissement très lent :

I.	Bimolybdate employé.....	3gr,444
	Silice attaquée.....	0,091
	Silice retrouvée.....	0,088
	Perte.....	0,003

Creuset retiré brusquement du moufle :

II.	Bimolybdate de potasse.....	3gr,525
	Silice attaquée.....	0,0915
	Silice retrouvée.....	0,085
	Perte totale.....	0,0065

Refroidissement lent :

III.	Bimolybdate de potasse.....	3gr,545
	Silice attaquée.....	0,092
	Silice retrouvée.....	0,089
	Perte.....	0,003

Refroidissement plus lent que pour II, plus court que pour I et III :

IV.	Bimolybdate de potasse.....	3gr,532
	Silice attaquée.....	0,095
	Silice retrouvée.....	0,091
	Perte totale.....	0,004

Il convient de faire remarquer que la silice retrouvée après l'attaque, quoique cristallisée, ne doit être comptée que d'après la perte subie à la suite de l'attaque par l'acide fluorhydrique. Sans cette précaution, on pourrait être conduit à des résultats erronés. En effet, il se forme, entre les lamelles cristallines, des inclusions renfermant des molybdates alcalins que les lavages à l'eau, même rendue ammoniacale, n'enlèvent pas. Ainsi, dans des expériences analogues à celles I et III, en pesant directement la silice lavée, j'ai retrouvé exactement le poids de silice introduite : il y avait eu compensation entre la quantité de silice dissoute par le fondant et la quantité de molybdate inclus entre les lamelles cristallines.

2° *Influence de la composition chimique du molybdate employé.* — On voit, d'après les expériences précédentes, qu'avec un refroidissement lent, les pertes en silice sont faibles, mais qu'elles sont sen-

Digitized by Google

sibles. Les bimolybdates sont assez fusibles, et c'est à eux que je m'étais d'abord adressé. Il fallait voir si d'autres molybdates ne pourraient pas être employés plus avantageusement. Les molybdates sont fusibles dans une limite assez étendue, et on peut les chauffer en faisant varier le rapport de l'acide à la base, dans les limites de 4 à 1 pour le rapport des équivalents, sans produire de perte sensible d'acide molybdique. J'ai donc pu faire une série assez étendue de recherches en variant la composition chimique du fondant employé. C'est un certain nombre de ces expériences que je vais rapporter ici, non pas dans l'ordre où je les ai faites, c'est-à-dire en conservant l'une à côté de l'autre les expériences comparatives, mais en les classant d'après le degré d'acidité du fondant. Nous donnerons en même temps la perte par gramme de fondant, ou du moins cette perte approchée :

		gr
V.	Tétramolybdate de potasse	12,208
	Silice attaquée	0,9205
	Silice retrouvée	0,8030
	Perte totale	0,1175
	Perte par gramme de fondant	0,0097
VI.	Trimolybdate de potasse	10,828
	Silice attaquée	0,4635
	Silice retrouvée	0,4130
	Perte totale	0,0505
	Perte moyenne par gramme de fondant	0,0045
VII.	Bimolybdate	8,230
	Silice attaquée	0,585
	Silice retrouvée	0,577
	Perte totale	0,008
	Perte par gramme de fondant	0,001
VIII.	Bimolybdate	16,277
	Silice attaquée	0,4265
	Silice retrouvée	0,4105
	Perte totale	0,0160
	Perte par gramme de fondant	0,001
IX.	Bimolybdate	8,320
	Silice attaquée	0,370
	Silice retrouvée	0,361
	Perte totale	0,008
	Perte par gramme de fondant	0,001

Digitized by Google

		gr
X.	Molybdate légèrement acide, mais très voisin de la neutralité	8,685
	Silice employée	0,2695
	Silice retrouvée	0,2680
	Perte totale	0,0015
	Perte par gramme de fondant	0,0002
XI.	Même molybdate que dans X	2,3400
	Silice employée	0,2280
	Silice retrouvée	0,2275
	Perte totale	0,0005
	Perte par gramme de fondant	0,0002
XII.	Molybdate neutre	4,026
	Bimolybdate	1,10
	Silice attaquée	0,126
	Silice retrouvée	0,124
	Perte totale	0,002
	Perte pour le molybdate neutre	0,0008
	Perte pour le bimolybdate	0,0012
XIII.	Molybdate neutre	2,207
	Bimolybdate	2,40
	Silice attaquée	0,3165
	Silice retrouvée	0,3140
	Perte totale	0,0025
	Perte pour le molybdate neutre	0,0004
	» bimolybdate	0,0021

On voit, d'après le Tableau précédent, que la perte est d'autant plus petite que l'on se sert d'un molybdate plus voisin de la neutralité. Les pertes pour la silice retrouvée, pertes dues à une dissolution dans les sels employés comme fondants, sont assez considérables pour les molybdates très acides. Le fait qui se produit ici est d'accord avec ce qui se passe à basse température. La silice, dans les deux cas, se combine d'autant plus facilement aux molybdates qu'on se trouve dans un milieu plus acide.

Ce fait explique aussi la difficulté qu'on éprouve à séparer la silice des silicomolybdates par le bisulfate de potasse. On se trouve ici dans un milieu très acide. La quantité de silice précipitée est d'autant plus grande qu'on est en présence d'une matière plus décomposée, c'est-

Digitized by Google

à-dire moins acide. On arriverait probablement à une décomposition totale avec une matière voisine de la neutralité.

Il résulte aussi du Tableau précédent que la quantité de silice disparue est indépendante de la quantité de silice attaquée. C'est ce que prouvent les expériences VII et IX, dans lesquelles, les quantités de fondant étant restées constantes, les poids de silice ont varié dans une limite assez étendue. La perte totale est restée sensiblement la même; ce résultat était facile à prévoir.

De plus, la perte est, jusqu'à un certain point, proportionnelle au poids du molybdate employé. Nous avons, en effet, en même temps que la perte totale éprouvée dans chaque expérience, donné la perte par gramme de fondant employé; et l'on voit que, dans des limites assez étendues, cette perte, ainsi calculée, reste constante. Bien plus, en employant, comme dans les expériences XII et XIII, des mélanges de molybdates, et en calculant la perte produite pour chacun des sels employés, perte déterminée par d'autres expériences, on retrouve assez rigoureusement la perte totale. Enfin, et c'est là le point important à noter, quand on se met dans des conditions telles que le molybdate employé soit voisin de la neutralité, on trouve, en prenant les précautions convenables, que les pertes deviennent très petites. Elles n'atteignent pas la limite des erreurs que l'on commet généralement en analyse. De telle sorte que ce procédé d'analyse peut être employé pour doser d'une façon très rigoureuse la silice, dans les silicomolybdates, et peut-être dans d'autres matières.

Il était naturel de rechercher si l'on ne pourrait pas appliquer cette méthode à l'analyse des silicotungstates, d'autant plus que M. Hautefeuille, dans ses reproductions de quartz et de tridymite, avait déjà constaté que les tungstates acides qu'il employait ne retenaient en dissolution qu'une très petite quantité de silice. Sans reproduire les expériences que j'ai faites à ce sujet, je dirai que les résultats que j'ai obtenus me semblent permettre d'affirmer qu'on pourrait également employer dans ce cas mon procédé de dosage de la silice. Les quantités de silice perdues sont toujours très faibles; de plus, elles paraissent diminuer quand le degré d'acidité du fondant augmente. Mais la faible fusibilité des tungstates très acides ne permet pas d'étendre aussi loin que pour les molybdates la vérification de ce fait.

Digitized by Google

Conclusion. — En résumé, pour faire l'analyse des silicomolybdates ou d'autres substances par ce procédé, il faut se mettre dans des conditions telles, que l'on se trouve en présence d'un molybdate voisin de la neutralité. Un essai préliminaire est donc toujours nécessaire. Cet essai donnera des indications suffisantes comme précision, pour qu'on puisse ensuite opérer avec certitude. Ainsi, en ajoutant à la matière à analyser un poids d'un carbonate alcalin quelconque, mais tel qu'on soit sûr de ne pas produire de perte d'acide molybdique par la calcination de la matière et de ne pas atteindre la neutralité du molybdate produit, on aura des résultats qui permettront d'opérer dans les conditions voulues.

De plus, la matière une fois fondue pendant un temps suffisant pour être sûr de la cristallisation, il faudra la refroidir aussi lentement que possible. Sans cette précaution, on serait exposé à des écarts assez sensibles.

Remarque. — Je pense qu'il est à peine nécessaire d'ajouter que toutes les expériences précédentes et les opérations nécessaires pour avoir les molybdates fondus ont été faites dans des vases de platine. Les molybdates attaquent en général les vases en porcelaine, et, en se servant de produits préparés dans des vases pareils, on s'exposerait à introduire dans les molybdates des matières dont la présence troublerait considérablement les résultats obtenus.

Étude de l'acide silicomolybdique et de ses principales combinaisons.

Acide silicomolybdique.

$SiO^3, 12MoO^3, 26HO.$

Nous avons vu que le silicomolybdate d'ammoniaque prend naissance quand on met une dissolution de molybdate d'ammoniaque dans l'acide nitrique en présence de silice soluble. Le sel qui s'est précipité est redissous dans l'eau et additionné de nitrate de sous-oxyde de mercure. Par double décomposition, il se produit du silicomolybdate de sous-oxyde de mercure dont la formule a été établie par une analyse préliminaire. Ce corps, mis en suspension dans l'eau, est traité par

Digitized by Google

une dissolution titrée ou une dissolution étendue quelconque, d'acide chlorhydrique, qu'on ajoute par petites portions. On reconnaît que l'opération est terminée quand le précipité blanc de sous-chlorure de mercure abandonne nettement la liqueur jaune qui le surnage. Il faut éviter d'introduire une quantité trop grande d'acide chlorhydrique. Le silicomolybdate de sous-oxyde de mercure retient toujours, en effet, des traces de nitrate de sous-oxyde, et il se formerait alors de l'eau régale qui, à un moment donné, pourrait détruire l'acide silicomolybdique.

Dans cette opération, il reste toujours, dans la liqueur, des traces de sel de mercure. Pour l'en débarrasser, il suffit d'y faire passer, en l'agitant constamment, quelques bulles d'hydrogène sulfuré. Il se produit alors un léger précipité de sulfure de mercure, en même temps que le liquide verdit, et même bleuit, par suite d'une faible réduction. L'évaporation à l'air libre suffit, en général, pour produire la réoxydation de la matière. En tout cas, quelques bulles de chlore ramènent la liqueur à sa couleur jaune primitive.

Cette préparation donne l'acide très étendu. On peut le faire cristalliser, soit en l'abandonnant à l'air libre à l'abri des poussières atmosphériques, soit en hâtant l'évaporation par une faible élévation de la température. Une brusque élévation de température en quelques points produirait une décomposition partielle de l'acide. En plaçant le liquide sur un bain-marie maintenu vers 50°, j'ai pu l'amener à un degré de concentration suffisant pour obtenir rapidement des cristaux, en utilisant ensuite le vide de la machine pneumatique en présence de l'acide sulfurique.

On obtient de cette façon des cristaux jaunâtres, translucides, semblables par leur grosseur et leur éclat aux cristaux d'alun. Ces cristaux appartiennent au système cubique. L'action de la lumière polarisée sur eux n'est pas sensible. Ce sont des cubes modifiés par les faces de l'octaèdre. Les angles que j'ai mesurés et les angles calculés se correspondent.

Chauffés, ils fondent vers 45° dans leur eau de cristallisation, et se décomposent au-dessous de 100°. Quand on continue à élever la température, la matière perd son eau, puis l'acide molybdique se volatilise, et il reste finalement un résidu de silice.

Digitized by Google

Ces cristaux sont très solubles dans l'eau, qui en dissout environ trois fois son poids, à la température ordinaire, en donnant un liquide jaune, sirupeux; l'évaporation de ce liquide reproduit les mêmes cristaux.

Les acides étendus et froids les dissolvent également. Une élévation de température amène une décomposition de l'acide. Ce fait est surtout sensible pour l'eau régale et l'acide sulfurique : ce dernier décolore complètement la liqueur, et donne un précipité abondant de silice gélatineuse.

Les bases produisent également un phénomène de décomposition, et, en essayant de reproduire un certain nombre de silicomolybdates par le mélange direct des bases et de l'acide, j'ai toujours observé une décomposition plus ou moins compliquée, suivant la nature des bases employées.

Pour obtenir les silicomolybdates, le seul moyen qui m'ait réussi a été l'action de l'acide sur un sel soluble de la base qu'on veut faire entrer en combinaison, ou la méthode de double décomposition. On se trouve ainsi dans un milieu acide, seul convenable pour la reproduction de ces matières.

L'ammoniaque en excès, ainsi que les carbonates alcalins, précipite la majeure partie de la silice et décolore la matière. Les liqueurs, filtrées et traitées par un acide, redeviennent jaunes. Quand on les abandonne à elles-mêmes, elles reproduisent les molybdates ordinaires; mais ces corps retiennent de la silice dont on ne peut les débarrasser que par cristallisations successives.

L'acide silicomolybdique ne donne à froid aucun précipité avec les sels métalliques et alcalino-terreux, sauf les sels d'oxyde de thallium et de sous-oxyde de mercure, dont les silicomolybdates sont peu solubles.

Les sels d'ammoniaque, en dissolution concentrée, donnent naissance à un précipité de silicomolybdate d'ammoniaque, totalement insoluble dans ce milieu.

Les alcaloïdes ou leurs combinaisons salines (quinine, morphine, cinchonine, etc...), les ammoniaques composées ou leurs sels (aniline, rosaniline, naphtylamine, éthylamine, etc...), même en liqueur étendue, sont précipités.

Les silicomolybdates de potasse, de soude, de lithine, sont solubles. Ceux de cœsium et de rubidium, au contraire, le sont peu.

Digitized by Google

Pour analyser l'acide silicomolybdique, j'ai mis sa dissolution dans l'eau en présence d'une quantité de carbonate alcalin telle, que le molybdate formé fût très voisin de la neutralité. Après expulsion de l'acide carbonique, la matière a été desséchée, puis fondue à température élevée. La perte de poids éprouvée correspondait au poids de l'acide du carbonate employé, et au poids de l'eau de l'acide silicomolybdique. En reprenant la matière par l'eau, on dissolvait le molybdate. La silice restait à l'état cristallisé. Son poids était déterminé, et l'on en retranchait le résidu léger que laissait le traitement à l'acide fluorhydrique. L'acide molybdique se trouvait dans la liqueur filtrée.

Les chimistes qui ont étudié le molybdène savent combien le dosage de ce corps est délicat. J'aurais cependant voulu doser cet élément directement et sûrement, comme les autres, et j'ai fait dans ce but de longues et patientes recherches. Un procédé qui m'a donné des résultats un peu précis a été de doser ce corps à l'état de bisulfure, en modifiant un peu la méthode classique. Les molybdates, mis en digestion avec le sulfhydrate d'ammoniaque, donnent naissance à des sulfomolybdates qui, traités par l'acide chlorhydrique, abandonnent le molybdène à l'état de trisulfure mélangé de soufre. En général, ce mélange est jeté sur un filtre taré, puis desséché; on en prend une portion que l'on ramène, à haute température, dans un courant d'hydrogène, à l'état de bisulfure. Du poids de cette portion, on déduit le poids que l'on aurait trouvé si l'on avait employé la totalité du produit.

Cette méthode est sujette à deux graves objections : le filtre lavé à l'acide chlorhydrique varie de poids; la matière sur laquelle on opère n'est pas homogène, et le résidu qu'on laisse sur le filtre est surtout formé de soufre qui, plus léger que le sulfure de molybdène, tombe le premier sur le filtre et y reste attaché. J'ai donc cherché à opérer sur la totalité du sulfure. Pour cela, je redissolvais le résidu attaché au filtre, dans du sulfhydrate d'ammoniaque, et j'évaporais doucement la liqueur jusqu'à siccité. Je détachais de la capsule où s'était faite l'évaporation le résidu solide produit, en enlevant les dernières traces avec un peu de soufre en poudre. Cette portion était ajoutée au reste de la matière.

Par ce procédé, je suis arrivé à doser le molybdène avec une assez

Digitized by Google

grande approximation. Mais cette approximation n'est pas plus considérable que celle qu'on obtient en reportant sur l'acide molybdique, dans le cas des silicomolybdates, la somme des erreurs, faibles toujours, que l'on commet dans le dosage des autres éléments. L'acide molybdique étant en grande quantité dans ces corps, son équivalent étant élevé, l'erreur relative, qui seule est à considérer, est toujours très petite.

En employant ce procédé, j'ai trouvé les quantités suivantes :

		Trouvé.			
	Calculé.	I.	II.	III.	IV.
SiO^2.....	2,6	2,4	2,6	2,5	2,6
HO.....	20,8	20,8	20,9	20,7	20,8
MoO^3.....	77,6	77,8	77,5	77,8	77,6

La formule de l'acide silicomolybdique est, d'après ces résultats,

$$SiO^2, 12MoO^3, 26HO.$$

L'analyse I, que j'ai conservée ici, n'est que l'essai préliminaire que j'ai fait pour avoir une première approximation. Je l'ai indiquée pour donner un exemple du degré de précision auquel on peut arriver par une première analyse qui doit servir de guide pour les analyses ultérieures.

Silicomolybdate d'ammoniaque,

$$2AzH^4O, SiO^2, 12MoO^3, 8HO.$$

Ce sel est le point de départ de tous les autres, et, par conséquent, de l'acide silicomolybdique lui-même. C'est lui qu'on obtient le plus facilement à l'état de pureté. Sa faible solubilité en présence des sels ammoniacaux permet de l'avoir cristallisé au sein des liqueurs où il prend naissance, et sa solubilité relative dans l'eau et dans les acides permet de le faire cristalliser un certain nombre de fois, et de le débarrasser des impuretés qu'il pourrait contenir.

Pour le préparer, le moyen le plus simple consiste dans l'addition, à une dissolution de molybdate d'ammoniaque dans l'acide chlorhydrique ou mieux dans l'acide azotique, de silice dialysée ou d'un

Digitized by Google

silicate alcalin dissous dans le même acide. La liqueur, d'abord incolore, devient d'un beau jaune, surtout si l'on élève sa température vers 70°; et, en la laissant refroidir, il se forme une cristallisation d'un sel jaune dont la quantité augmente quand on abandonne la dissolution à elle-même. Le sel obtenu est le silicomolybdate d'ammoniaque.

Dans cette préparation, tout l'acide molybdique employé n'entre jamais, en une seule opération, en combinaison avec la silice. Il ne se forme qu'une quantité limitée de matière. Mais, par des opérations successives, on arrive à une transformation complète de tout l'acide molybdique employé en silicomolybdate.

Le sel ainsi obtenu est jaune. Il est cristallisé en petits octaèdres n'appartenant pas au système cubique : la lumière polarisée agit en effet énergiquement sur ces cristaux. Il est soluble dans l'eau à froid, et plus encore à chaud. Chauffée en tube scellé, sa dissolution se décolore et se décompose en produits assez complexes, qui sont tous blancs : ces produits contiennent en particulier des silicomolybdates dont la composition diffère de celle des sels jaunes.

Les acides étendus et froids les dissolvent également; mais une élévation de température amène une décomposition. L'acide sulfurique décolore complètement la liqueur et donne un précipité abondant de silice gélatineuse. L'eau régale produit le même effet. On obtient facilement l'acide phosphomolybdique en traitant par l'eau régale le phosphomolybdate d'ammoniaque. Il n'est pas possible d'extraire l'acide silicomolybdique en traitant de la même manière le silicomolybdate d'ammoniaque. Il y a, en même temps que décomposition de l'ammoniaque, précipitation d'une faible quantité de silice, et, par cristallisation, on n'obtient qu'un mélange de silice et d'acide molybdique.

L'ammoniaque en excès et les carbonates alcalins le dissolvent avec précipitation de silice et formation de molybdates blancs, retenant une notable portion de silice, qu'on peut enlever par cristallisations successives.

Une propriété importante à noter est l'insolubilité de ce sel en présence des sels ammoniacaux. Si, à une dissolution, même très étendue, de silicomolybdate d'ammoniaque, on ajoute du chlorhydrate d'ammoniaque ou de l'azotate d'ammoniaque en cristaux, on voit le sel jaune

Digitized by Google

se précipiter peu à peu, et la liqueur devenir incolore, quand elle est saturée de sels ammoniacaux.

Le silicomolybdate d'ammoniaque ne précipite de leurs liqueurs étendues que les oxydes de thallium, de cœsium et de rubidium, le sous-oxyde de mercure, les alcaloïdes et les ammoniaques composées. Ce sont là les propriétés de l'acide lui-même.

Pour faire l'analyse de ce sel, il faut diviser la matière en deux : une portion sert au dosage de l'ammoniaque, une autre à celui des autres éléments. Pour doser l'ammoniaque, je me suis servi de l'appareil de M. Schlœsing. Le liquide distillé a été recueilli, tantôt dans une dissolution titrée d'un acide quelconque qu'on achevait de saturer par une liqueur alcaline titrée, tantôt dans de l'acide chlorhydrique étendu; on le dosait, dans ce cas, à l'état de chloroplatinate d'ammoniaque. Ce dernier procédé est plus long, mais plus sûr. Pour déterminer les autres éléments, je faisais fondre le sel, après un essai préliminaire, avec un poids calculé de carbonate alcalin. La perte de poids correspondait à l'acide du carbonate employé, à l'ammoniaque et à l'eau du sel. En reprenant la matière par l'eau, j'obtenais la silice. L'acide molybdique se trouvait dans la liqueur.

J'ai trouvé ainsi :

		Trouvé.			
	Calculé.	I.	II.	III.	IV.
AzH^4O.....	5,1	4,9	5	4,8	4,9
SiO^2.....	2,9	2,8	2,7	2,9	2,8
HO.....	7,05	7,2	7,1	6,9	7,2
MoO^3.....	84,95	85,1	85,2	85,4	85,1

D'après ces résultats, la formule du silicomolybdate d'ammoniaque est

$$2AzH^4O, SiO^2, 12MoO^3, 8HO.$$

La quantité d'ammoniaque trouvée est légèrement plus faible que celle qu'exige la formule, mais l'écart obtenu est dans le sens voulu, et est inhérent au procédé de dosage de cet élément.

Digitized by Google

Silicomolybdate de potasse,

$$2KO,\ SiO^2,\ 12MoO^3 + 14HO.$$

Ce sel a été obtenu par l'action de l'acide silicomolybdique sur le chlorure de potassium. En faisant évaporer le mélange de ces deux corps, on obtient par refroidissement de longues aiguilles flexibles, d'un beau jaune, que l'on peut purifier par cristallisations successives. Ce sel est très efflorescent.

Je n'ai pu obtenir directement les sels de potasse et de soude, par l'action de la silice sur les molybdates correspondants dissous dans l'acide nitrique. Quand on mélange les deux dissolutions, il se produit, comme dans la préparation du silicomolybdate d'ammoniaque, un phénomène de coloration de la liqueur; mais ici les sels jaunes formés, en raison de leur grande solubilité, ne peuvent pas être séparés de la même façon des autres matières qui tendent à se produire.

Quand on élève la température du mélange, il se produit un précipité blanc abondant, sur la nature duquel nous reviendrons, et il se forme une liqueur jaune composée d'un mélange de nitrates alcalins et d'un sel jaune. On peut séparer les deux matières, grâce à leur différence de solubilité à chaud, et l'on arrive à isoler des sels jaunes bien cristallisés; mais ces corps ne sont pas des silicomolybdates proprement dits : ce sont des combinaisons de ces sels avec les nitrates, combinaisons analogues à celles obtenues par M. Marignac avec les silicotungstates, par M. Debray avec les phosphomolybdates. Le silicomolybdate d'ammoniaque, chauffé avec du nitrate d'ammoniaque, se combine également avec ce corps, et donne naissance à de petits cristaux rhomboédriques renfermant de l'acide nitrique.

L'analyse du silicomolybdate de potasse exige deux opérations : dans la première, on dose la potasse; dans la seconde, on dose les autres éléments.

Pour doser la potasse, on traite une portion du sel par l'ammoniaque en excès qui précipite une partie de la silice, puis par le sulfhydrate d'ammoniaque, et enfin par l'acide chlorhydrique. Sur le filtre reste le sulfure de molybdène. La liqueur contient les sels ammoniacaux intro-

Digitized by Google

duits, une partie de la silice du sel, et la potasse. En la traitant par l'eau régale, on détruit les sels ammoniacaux, et par des traitements successifs à l'acide chlorhydrique, on chasse l'excès d'acide azotique; en amenant à siccité, on rend les dernières traces de silice insolubles. Le chlorure de potassium est ensuite traité par le chlorure de platine ou par l'acide sulfurique, suivant qu'on veut doser la potasse à l'état de chloroplatinate ou à l'état de sulfate. On obtient toujours, de cette façon, un excès de potasse dû à l'attaque des vases où l'on a fait les diverses opérations nécessaires pour isoler la potasse.

Une autre portion de silicomolybdate de potasse est fondue avec une quantité convenable de carbonate de potasse. La perte en poids, diminuée de celle correspondant à l'acide carbonique expulsé, donne le poids de l'eau, et la silice reste insoluble.

Nous avons trouvé, par ce procédé d'analyse, les résultats suivants :

		Trouvé.		
	Calculé.	I.	II.	III.
KO.....	8,4	8,9	8,7	9
SiO^2.....	2,6	2,6	2,5	2,5
HO.....	11,3	11,4	11,3	11,2
MoO^3.....	77,7	77,3	77,5	77,3

La formule du silicomolybdate de potasse est donc

$$2KO, SiO^2, 12MoO^3 + 14HO.$$

Silicomolybdate d'argent,

$$2AgO, SiO^2, 12MoO^3.$$

Ce sel a été obtenu en mélangeant des dissolutions étendues de nitrate d'argent et d'acide silicomolybdique. La liqueur évaporée donne naissance à des cristaux jaunes, de forme prismatique, et toujours très petits. Le silicomolybdate d'argent est moins soluble que l'azotate d'argent. En effet, quand à une dissolution concentrée d'azotate d'argent on ajoute une dissolution concentrée d'acide molybdique, on obtient un précipité.

Le sel d'argent est anhydre. Il ne perd que difficilement une portion

Digitized by Google

de son acide molybdique quand on le chauffe. Traité par l'ammoniaque étendue, il donne naissance à un précipité gélatineux abondant, qui est détruit par l'ébullition, et donne un précipité de silice gélatineuse.

L'analyse de ce sel a été faite en traitant le sel dissous dans l'eau, par l'acide chlorhydrique, jusqu'à précipitation totale du chlorure d'argent. La liqueur contenant l'acide et un petit excès d'acide chlorhydrique, on la traite comme si l'on avait affaire à l'acide isolé.

		Trouvé.		
	Calculé.	I.	II.	III.
AgO.....	20,7	20,8	20,7	20,6
SiO^2.....	2,65	2,6	2,7	2,6
MoO^3.....	76,65	76,6	76,6	76,8

D'après ces résultats, la formule du silicomolybdate d'argent est

$$2AgO, SiO^2, 12MoO^3.$$

Silicomolybdate de thallium,

$$2ThO, SiO^2, 12MoO^3, 10HO.$$

Ce sel peut se préparer directement. Quand, à du molybdate de thallium mis en suspension dans de l'eau chargée d'acide nitrique, on ajoute une dissolution d'un silicate, on voit, surtout si l'on élève la température, la matière blanche se transformer rapidement en un précipité jaunâtre. La transformation paraît ici totale, et elle est assez rapide.

Pour préparer ce sel d'une façon plus sûre et à un plus grand état de pureté, il vaut mieux, à une dissolution étendue d'un sel de thallium, ajouter une dissolution, également étendue, de silicomolybdate d'ammoniaque ou d'acide silicomolybdique. Dans ces conditions, il se forme un précipité gélatineux jaunâtre, qui bientôt se transforme en une poudre cristalline ressemblant un peu à l'iodure de thallium. On peut laver cette poudre, par décantation, avec une dissolution étendue d'un sel de thallium. Quand on l'abandonne à elle-même, en présence de l'eau, elle se transforme à la longue en cristaux un peu plus gros, qui

Digitized by Google

présentent des faces assez nettes au microscope, et qui, dans la lumière polarisée, donnent naissance à des phénomènes de lumière ne permettant pas de douter de leur nature cristalline. J'ai obtenu également des cristaux sensibles, en soumettant ce sel, en tube scellé, à une série alternative d'échauffements et de refroidissements.

Ce sel, en tube scellé, en présence de l'eau, se décompose vers 300° en donnant un précipité blanc d'acide molybdique, de molybdate de thallium et d'autres produits. Il est décomposé par l'ammoniaque et les carbonates alcalins, avec précipitation de silice.

Un fait intéressant à noter est l'action du sulfhydrate d'ammoniaque sur ce sel. Quand on met ces deux corps ensemble en digestion, même pendant un temps assez long, on voit se produire un précipité noir à reflets bleuâtres, tandis que la liqueur surnageante reste d'un beau jaune et ne renferme pas trace d'acide molybdique. Le précipité noir, formé d'un sulfhydrate très acide, reproduit le sel primitif, quand on le traite par l'acide azotique. Cette expérience permet peut-être de conclure à l'existence de sulfomolybdates contenant de la silice.

Pour faire l'analyse de ce sel, on peut employer la méthode générale, c'est-à-dire l'attaquer par un carbonate alcalin, qui donne, par perte de poids, l'eau du sel. La silice reste insoluble, et la liqueur obtenue par lavage permet de doser le thallium à l'état d'iodure. Mais ici l'on obtient du molybdate de thallium difficilement soluble. Il vaut mieux, pour doser le thallium, recourir à l'attaque préalable par le bisulfate de potasse. Les deux méthodes combinées m'ont conduit aux résultats suivants :

		Trouvé.		
	Calculé.	I.	II.	III.
HO.....	6,30	6,20	6,30	6,40
SiO^2.....	2,10	2,00	1,95	2,10
ThO.....	30,10	29,50	30,00	30,05
MoO^3.....	61,50	62,30	61,85	61,45

La formule du sel de thallium correspond donc à

$$2ThO, SiO^2, 12MoO^3 + 10HO.$$

Digitized by Google

Silicomolybdate de sous-oxyde de mercure,

$4Hg^2O, SiO^2, 12MoO^3$.

Ce sel s'obtient, par double décomposition, avec l'acide silicomolybdique ou le sel d'ammoniaque, et le nitrate de sous-oxyde de mercure. Quand on verse une dissolution de silicomolybdate d'ammoniaque dans du nitrate de sous-oxyde de mercure, il se produit une masse gélatineuse jaunâtre qui, peu à peu, se transforme en une poudre cristalline jaune, ressemblant, à première vue, à du bioxyde de mercure obtenu par précipitation. Ce sel peut aussi être obtenu directement en ajoutant à du molybdate de mercure un silicate soluble en présence de l'acide nitrique. Il vaut cependant mieux employer le premier procédé de préparation. On obtient ainsi de petits cristaux, sur lesquels agit la lumière polarisée. Si l'on dissout dans l'acide nitrique le précipité précédent, et qu'on réduise ensuite la dissolution par du mercure métallique, on obtient des cristaux plus nets, quoique toujours microscopiques. L'eau seule décompose ce produit, et il faut, pour le laver par décantation, se servir d'une dissolution étendue de sous-nitrate de mercure. Après un certain nombre de lavages, on le fait tomber, comme tous les autres silicomolybdates, sur de la porcelaine dégourdie, qui absorbe rapidement l'eau et les matières solubles qui l'imbibent : on ne peut mettre ces matières sur du papier, car les substances organiques les réduisent. Les alcalis noircissent ce produit comme tous les sels de sous-oxyde de mercure. L'acide chlorhydrique le décompose, en mettant l'acide en liberté. Le sulfhydrate d'ammoniaque donne avec lui un précipité de silice et de sulfure de mercure, et dissout l'acide molybdique.

Pour faire l'analyse de ce corps, on partage encore la matière en deux parties : la première sert au dosage du mercure; la seconde, à la recherche de la silice et de l'acide molybdique.

Pour doser le mercure, on décompose le sel par la chaleur dans un courant lent d'hydrogène pur. La matière, placée dans une nacelle de porcelaine, est introduite dans un tube de verre, terminé par deux ampoules et parcouru par un courant d'hydrogène. On élève peu à peu la température du tube, et il se produit d'abord de l'eau due à la

Digitized by Google

réduction de l'acide molybdique. Bientôt, la distillation du mercure commence, et elle est assez tumultueuse pour produire des projections de la matière hors de la nacelle. On remédie à cet inconvénient en saupoudrant le sel, de carbonate de soude desséché. Dans ces conditions, le mercure distille d'une façon régulière et avec des précautions convenables; on peut l'amener dans la première des ampoules, d'où l'eau amassée d'abord peut être expulsée. On détache et l'on pèse ensuite cette ampoule qui contient le mercure. On la pèse vide : la différence de poids donne le poids de mercure, d'où l'on déduit le poids d'oxyde contenu dans le sel analysé.

Une deuxième portion du sel est traitée par le carbonate de soude. Le poids de mercure expulsé, ou plutôt du sous-oxyde de mercure qui disparaît, correspond, à quelques millièmes près, au poids précédemment trouvé. On peut alors doser la silice et l'acide molybdique, comme dans toutes les autres analyses.

Par ce procédé, on trouve une quantité plus forte de mercure que celle qui correspond à la formule vraie du sel. Le même fait avait été constaté par M. Marignac dans les analyses du silicotungstate de sous-oxyde de mercure, analyses dans lesquelles le mercure était toujours dosé par un procédé donnant un minimum. C'est que le sel de mercure retient toujours un peu de sous-nitrate; la présence de ce corps donne un excès de sous-oxyde de mercure dans le dosage de cet élément et une légère perte dans la calcination du mélange de silicomolybdate et de carbonate alcalin. Les différences trouvées sont d'ailleurs variables d'après le mode plus ou moins parfait de lavage du sel, et ne correspondent pas à l'existence d'un produit triple, contenant en proportion définie de l'acide azotique.

Voici, d'ailleurs, le résultat de quelques-unes de mes analyses; je ne rapporte pas les légères différences de poids produites pendant la calcination destinée à déterminer la silice et dues à la présence de nitrate de sous-oxyde de mercure.

		Trouvé.				
	Calculé.	I.	II.	III.	IV.	V.
Hg^2O.....	48,2	51	51	50,5	50	49,5
SiO^2.....	1,6	1,5	1,4	1,6	1,5	1,45
MoO^3.....	50,2				48,5	49,05

Digitized by Google

D'après ces résultats, il faut assigner au sel de mercure la formule

$$4Hg^2O, SiO^2, 12MoO^3.$$

Silicomolybdates blancs.

La silice, d'après ce que nous venons de dire, se combine à l'acide molybdique, pour donner naissance à un acide jaune, parfaitement cristallisé, jouissant de propriétés spéciales, donnant naissance à des sels définis et cristallisés. Dans ces combinaisons, le rapport de la silice à l'acide molybdique est de 1 à 12, comme pour l'acide silicotungstique de M. Marignac.

Ce n'est pas là le seul rapport suivant lequel la silice et l'acide molybdique se combinent. Il existe, en effet, d'autres séries de silicomolybdates se produisant dans un certain nombre de circonstances. Leur production est en général accompagnée de celle des sels jaunes.

En particulier, on obtient des silicomolybdates blancs, peu solubles, quand on attaque la silice gélatineuse par des molybdates très acides, comme par exemple les octomolybdates qui se produisent par l'action de l'acide nitrique en excès sur les molybdates ordinaires. Il se produit des composés blancs, différents de ceux qui leur ont donné naissance. Ils renferment de la silice combinée, que l'attaque à l'acide fluorhydrique étendu n'enlève pas.

Il y a également combinaison de la silice et des molybdates, quand on met en digestion, au-dessus de 100°, de la silice gélatineuse avec les molybdates précipités par les acides à l'ébullition. On obtient des silicomolybdates blancs, dont la forme cristalline n'est plus celle des corps qui les ont produits. Ces corps renferment de la silice à l'état de combinaison, et le traitement à l'acide fluorhydrique étendu, destiné à enlever la silice libre, laisse des corps desquels l'ammoniaque et les carbonates alcalins précipitent une notable quantité de silice. La décomposition des silicomolybdates jaunes, sous différentes influences, donne également naissance à des silicomolybdates blancs.

Tous ces corps sont peu solubles. D'où une grande difficulté de les séparer sûrement des matières qui leur ont donné naissance, et aussi de les séparer les uns des autres, de façon à ne pas avoir affaire à des mélanges.

Digitized by Google

J'ai fait un certain nombre d'analyses de ces silicomolybdates blancs, et les résultats obtenus ne sont pas encore suffisamment concordants pour que je puisse actuellement en donner la composition. Je poursuis leur étude et j'espère pouvoir bientôt donner leur formule.

Dans l'étude de ces corps, on est arrêté par des difficultés tenant à la multiplicité des combinaisons que peut donner l'acide molybdique. La connaissance des molybdates est loin d'être complète, et, dans le cours de mes recherches, j'en ai trouvé, outre ceux étudiés et décrits, un grand nombre dont l'existence n'est signalée nulle part.

D'autre part, pour être sûr de transformer les molybdates en silicomolybdates, on est obligé d'employer un excès de silice. Pour se débarrasser de cet excès, il faut recourir à un traitement à l'acide fluorhydrique. M. Delafontaine a fait voir que ce corps agit sur les molybdates, pour donner naissance à des fluoxymolybdates. L'étude de ces derniers corps est loin d'être achevée, et je serai peut-être obligé de la reprendre, avant de pouvoir terminer ce travail et donner la formule définitive des silicomolybdates blancs que j'ai obtenus. J'ai cru devoir seulement signaler l'existence de ces composés.

Application de l'acide silicomolybdique à la recherche du cœsium contenu dans certaines matières.

Nous avons vu que l'acide silicomolybdique donne, avec les sels de cœsium et de rubidium, des combinaisons peu solubles. Nous croyons devoir insister sur ce fait, qui pourra trouver son application en analyse.

On sait les difficultés que l'on éprouve à caractériser, par une réaction chimique, la présence de ces derniers corps, quand ils se trouvent, comme cela a lieu presque toujours, en présence des sels de potasse. L'acide silicomolybdique ne précipitant, parmi les bases alcalines, que le cœsium et le rubidium, on se trouve en possession d'un réactif précieux pour déceler ces corps, lors même qu'ils sont en petite quantité dans une matière. L'équivalent de cet acide étant élevé, on a, pour peu de base, un précipité abondant. De plus, le silicomolybdate de rubidium étant soluble, quoique faiblement, on pourra le séparer de celui de cœsium, qui paraît totalement insoluble à froid et en présence des acides.

Digitized by Google

Jusqu'ici, le réactif le plus sensible du cœsium était le bichlorure d'étain, qui donne, avec le chlorure de cœsium, un chlorure double peu soluble. L'acide silicomolybdique est plus sensible encore : il décompose en effet le sel précédent, et donne du silicomolybdate de cœsium.

Le cœsium se trouve dans un grand nombre de roches, en faible proportion, sauf quelques rares exceptions, et il est en général associé à la potasse. Il faut des opérations fort longues pour le reconnaître, et, le plus souvent, on n'a d'autre guide sûr que le spectroscope. Le lépidolite, en particulier, en renferme de petites quantités, et j'ai pu déceler sa présence d'une façon très nette, dans ce minerai.

A cet effet, j'ai traité 10^{gr} de cette matière par un mélange d'acide fluorhydrique et d'acide sulfurique, dans lequel le minerai s'est dissous. La liqueur, évaporée à siccité, a été ensuite calcinée, pour rendre la majeure partie de l'alumine insoluble.

J'ai ensuite repris la matière par l'eau, et partagé la liqueur en deux portions que j'ai traitées différemment, afin d'en enlever par des méthodes différentes la petite quantité d'acide phosphorique qui existe dans le lépidolite, comme dans un grand nombre de silicates naturels, et dont la présence aurait pu venir troubler les résultats de l'expérience. Une première portion, rendue ammoniacale, a été additionnée du mélange ammoniaco-magnésien; le liquide filtré a été traité par l'eau régale à chaud pour détruire les sels ammoniacaux introduits. A la deuxième portion, j'ai ajouté un excès d'eau de baryte; après filtration, l'excès de baryte a été enlevé par un courant d'acide carbonique, et les carbonates produits ont été transformés en chlorures. Chacune de ces liqueurs, ainsi débarrassée d'acide phosphorique, a été amenée au volume de 100^{cc}, puis additionnée d'acide silicomolybdique : dans chacune, il s'est produit un précipité jaune assez abondant.

Le précipité, lavé et recueilli, a été traité successivement par le sulfhydrate d'ammoniaque et l'acide chlorhydrique, pour le débarrasser de l'acide molybdique et de la silice : le cœsium qui reste dans la liqueur obtenue en reprenant par l'eau la matière amenée d'abord à siccité, a été caractérisé au spectroscope. Le sel obtenu était bien du silicomolybdate de cœsium, avec des traces de rubidium qu'il était facile d'enlever par des lavages.

Il est bien évident, et je l'ai constaté, qu'il n'est pas indispensable,

Digitized by Google

pour ce genre de recherches, de se servir de l'acide silicomolybdique dont la préparation est longue et délicate. Le silicomolybdate d'ammoniaque, ou même le mélange employé pour produire ce corps, peuvent servir également.

De la confusion possible de la silice et de l'acide phosphorique dans la recherche des corps par la liqueur molybdique.

Nous avons déjà dit que Knop avait vu la production d'une coloration jaune quand on met de la silice en présence de molybdate d'ammoniaque en solution acide, et la formation dans ce milieu d'une matière jaune, insoluble dans le chlorhydrate d'ammoniaque. La remarque de Knop a été constatée par Habel d'abord, puis plus tard par Jenkins. Sans vouloir ici entrer dans une discussion étendue pour expliquer la diversité des résultats obtenus, nous croyons que le plus simple est de faire un rapide parallèle entre les propriétés du phosphomolybdate et du silicomolybdate d'ammoniaque, et de déduire de faits nets et précis une conclusion pratique sur cet important sujet.

D'abord, le phosphomolybdate et le silicomolybdate d'ammoniaque se produisent dans les mêmes conditions, conditions où l'on se place d'habitude pour rechercher et doser l'acide phosphorique. Les deux sels ont la même couleur : ils sont jaunes tous les deux, et il est bien difficile de les distinguer à leur aspect extérieur, bien que le premier soit, en général, à l'état amorphe, le deuxième, à l'état cristallisé. Mais c'est une différence qui ne peut être constatée qu'avec un microscope assez puissant.

La silice et l'acide phosphorique en petite quantité, mis en présence de la liqueur molybdique généralement employée, commencent par donner naissance tous deux à une coloration jaune. Le phosphomolybdate d'ammoniaque, complètement insoluble dans l'eau et dans les acides, se dépose à froid, au bout d'un temps plus ou moins court. Le silicomolybdate, soluble, au contraire, dans l'eau et dans les acides, mais insoluble dans les sels ammoniacaux en solution concentrée, se dépose, seulement en partie, par le refroidissement de la liqueur, et met plus de temps à se déposer totalement dans les conditions de l'expérience.

Digitized by Google

Quelle est la méthode suivie pour faire la liqueur molybdique? On dissout l'acide molybdique dans l'ammoniaque, et la dissolution ainsi obtenue est versée dans un acide, en ayant soin d'éviter la précipitation de molybdates acides; puis, à cette liqueur, on ajoute la matière qui est censée renfermer l'acide phosphorique. Or, dans cette opération, il se produit de grandes quantités de sels ammoniacaux rendant insoluble le silicomolybdate d'ammoniaque qui a pu se produire. De plus, si les matières qu'on analyse contiennent du cœsium et du rubidium, on obtient un précipité immédiat des silicomolybdates de ces bases, qui pourrait faire croire à la présence du phosphore, lors même qu'il n'y en aurait pas de traces.

On conseille en général, pour éviter les erreurs dues à la précipitation simultanée du phosphomolybdate avec d'autres substances, de reprendre par l'ammoniaque le précipité obtenu, et de doser l'acide phosphorique à l'état de phosphate ammoniaco-magnésien.

Est-on par cette nouvelle opération à l'abri des erreurs provenant de la production de silicomolybdate?

Nous avons dit que ce dernier corps, traité par l'ammoniaque, produit un précipité de silice; mais une notable portion de la silice reste en dissolution, et la liqueur filtrée, traitée par la dissolution ammoniaco-magnésienne, donne naissance à un précipité blanc gélatineux de silicate de magnésie qui, par son aspect et quelques-unes de ses propriétés, peut être confondu avec le phosphate ammoniaco-magnésien.

On pèsera donc du silicate de magnésie à la place de phosphate de magnésie, et l'erreur commise d'abord se poursuivra jusqu'au bout.

Nous conclurons donc que le dosage de l'acide phosphorique en présence de silicates solubles peut entraîner à des erreurs de toutes sortes, et qu'il ne faut rechercher l'acide phosphorique dans une telle matière qu'après en avoir séparé la silice.

M. Henri Sainte-Claire Deville, dans ses leçons de Chimie analytique faites à l'École Normale, a donné un procédé qui permet de faire cette séparation. Ce procédé consiste à reprendre par l'acide nitrique la matière soluble dans l'eau, ou rendue préalablement soluble par l'attaque au carbonate de chaux, et à évaporer jusqu'à siccité la dissolution ainsi obtenue. Dans ces conditions, la silice se précipite et devient insoluble dans les acides. Une nouvelle digestion avec l'acide

Digitized by Google

nitrique permettra de redissoudre les matières autres que la silice, et en particulier les phosphates. C'est dans cette liqueur qu'il faudra rechercher l'acide phosphorique, et l'on pourra alors se servir avec sécurité de la solution molybdique pour doser l'acide phosphorique, à la condition, toutefois, d'employer les précautions convenables.

CONCLUSION.

Nous avons fait voir dans ce travail :

1° Qu'il existe des silicomolybdates ; nous avons en particulier étudié les silicomolybdates jaunes, dont nous avons isolé un acide parfaitement cristallisé. Outre l'intérêt théorique que présente la découverte de ces corps, la question a de l'importance au point de vue analytique, à cause de certaines analogies des silicomolybdates et des phosphomolybdates jaunes.

2° Nous avons indiqué un nouveau procédé de dosage de la silice à l'état cristallisé, procédé qui nous a donné, dans le cas particulier de l'analyse des silicomolybdates, des résultats d'une grande rigueur, et qui pourra peut-être s'appliquer au dosage de la silice contenue dans un certain nombre d'autres matières silicatées.

3° Nous avons donné un réactif très sensible du cœsium, réactif qui pourra rendre des services dans la recherche si difficile de ce corps.

4° Nous pensons avoir élucidé la question, si importante en analyse, de la recherche de l'acide phosphorique par la liqueur molybdique en présence de silicates solubles, et fait voir la confusion possible de la silice et de l'acide phosphorique, quand ces deux corps se trouvent ensemble à l'état soluble.

Digitized by Google

SUR LES

PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES

DE L'ESPACE RÉGLÉ,

PAR M. G. KOENIGS,

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

On pourrait faire remonter les premières recherches sur l'espace réglé au jour où l'on entreprit l'étude des surfaces engendrées par une ligne droite; mais, en réalité, c'est Monge qui, vers la fin du siècle dernier, inventa les systèmes doublement indéterminés.

On lui doit la proposition fondamentale de la théorie des congruences (1), ainsi que l'étude spéciale du système des normales à une surface (2).

C'est à Malus que l'on doit l'idée des systèmes triplement indéterminés, appelés depuis par Plücker *complexes*. Dans son *Traité d'Optique*, puis au Tome XIV du *Journal de l'École Polytechnique*, Malus étudie les systèmes généraux de droites, dans lesquels tout point de l'espace sert de départ à l'une d'elles : il y découvre le cône du deuxième degré, qui joue un rôle si important et qui nous a conduit à la conception de la forme fondamentale.

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1781, p. 666.

(2) *Application de l'Analyse à la Géométrie.*

Digitized by Google

Les progrès incessants de l'Optique entraînaient cependant les savants à poursuivre l'étude des systèmes doublement indéterminés inaugurée par Monge; et Malus (1) découvrit en 1807 le célèbre théorème que Dupin généralisa (2).

Plus tard, M. Bertrand (3) trouva sa belle proposition relative aux propriétés angulaires des pinceaux de normales, proposition qui fut peu après généralisée par Sturm (4), et puis diversement exprimée par M. Bertrand (5) lui-même et par M. Ossian Bonnet (6).

Hamilton (7), en Angleterre, et vers 1830, s'était occupé des systèmes généraux doublement indéterminés.

En 1860, M. Kummer (8) résuma et compléta les travaux antérieurs. On trouve dans son Mémoire les propriétés fondamentales des *surfaces focales*, qui conduisent à des résultats si importants dans la recherche des lignes asymptotiques des surfaces.

On y trouve également développée la théorie de la *densité* des pinceaux, dont la première idée est due à Hamilton, et qui constitue une belle généralisation des propriétés des systèmes de normales.

Nous ne croyons pas qu'on ait encore cherché à rapprocher la proposition fondamentale de cette théorie de la belle propriété due à Sturm sur les systèmes généraux. Ce rapprochement nous a conduit à un résultat assez simple, que nous donnons au cours de ce travail.

Dans son admirable *Aperçu historique* (9), qui contient le germe de tant de découvertes modernes, Chasles avait développé un mode de correspondance dualistique dans lequel tout point de l'espace était situé dans le plan correspondant. C'était, sauf le nom, la découverte du *complexe linéaire*.

---

(1) *Traité d'Optique*, inséré au t. II des *Mémoires des Savants étrangers*.

(2) *Mémoires sur les routes de la lumière, dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction*, 1816.

(3) *Journal de Liouville*, t. IX, p. 133; 1844.

(4) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XX; 1845.

(5) *Journal de Liouville*, t. XII, p. 343; 1847.

(6) *Comptes rendus*, t. LII, p. 1081.

(7) *Theory of systems of rays* (*Irish Acad. Transact.*, t. XV, XVI, XVII).

(8) *Théorie générale des rayons rectilignes* (*Nouvelles Annales de Math.*, 1860-61-62).

(9) Page 674.

Digitized by Google

Mais c'est Plücker (1), qui avait déjà érigé en corps de doctrine la théorie des systèmes tangentiels, qui devait encore doter la théorie des systèmes de droites des méthodes fécondes de la Géométrie moderne.

En passant par ses mains, cette théorie prit une forme toute nouvelle. La ligne droite devint un *élément de l'espace*, et entre l'espace ponctuel et l'espace tangentiel vint naturellement se placer l'*espace réglé*. Une transformation homographique laissait les deux premiers invariables; mais la dualité les permutait l'un dans l'autre.

L'espace réglé, au contraire, se présentait comme homographique et dualistique à lui-même.

C'est à ce point de vue fécond que Plücker s'est attaché (2).

La difficulté de cette étude était évidemment de n'y introduire que des éléments dualistiques par eux-mêmes, ou de ne jamais y séparer un élément de l'élément réciproque. Aussi Plücker, qui ne voulut pas s'affranchir de la double notion d'espace ponctuel et d'espace tangentiel, fut-il contraint d'employer un double système de coordonnées, répondant chacun à une définition de la ligne droite : les deux définitions étant, du reste, réciproques l'une de l'autre. En 1869, M. Klein (3), élève et disciple de Plücker, reprit la méthode du grand géomètre et entra franchement dans l'étude de l'espace réglé en n'y introduisant que des éléments dualistiques en eux-mêmes.

L'élément qu'il emploie exclusivement, c'est le complexe linéaire que Plücker lui-même avait indiqué.

M. Klein a fondé toutes ses recherches sur la transformation linéaire des six coordonnées homogènes de la ligne droite liées par une équation quadratique; et c'est dans la forme que ces coordonnées attribuent au premier membre de cette équation qu'il cherche leur interprétation.

Les résultats des recherches de M. Klein se rapportent surtout aux surfaces du quatrième ordre que l'on rencontre dans la théorie des

---

(1) *Sur une nouvelle Géométrie de l'espace* (*Journal de Liouville*, t. XI, 2e série, p. 337; 1866).

(2) L'œuvre de Plücker est exposée dans l'ouvrage intitulé : *Neue Geometrie des Raumes*, Leipsick, 1869.

(3) *Mathematische Annalen*, t. II et V.

Digitized by Google

complexes du second degré, et aux surfaces que M. Kümmer (1) a découvertes.

En 1872, dans un Mémoire important publié au Tome V des *Mathematische Annalen*, M. Lie (2) a fait voir le lien étroit qui existait entre la théorie profonde des équations différentielles et les principes de réciprocité développés par Plücker. Il a montré la théorie de la ligne droite sous un point de vue encore plus élevé que ce géomètre ne l'avait fait en rattachant l'existence d'un complexe à celle d'une équation aux dérivées partielles.

C'est dans ce même Mémoire qu'il a déduit de ses principes et développé une correspondance entre la géométrie des lignes droites et celle des sphères, sur laquelle M. Darboux avait publié des travaux bien connus. La théorie de l'espace réglé se trouva ainsi dotée d'un coup de tous les résultats auxquels avait conduit l'étude des systèmes de sphères.

Peu après, M. Klein (3), cherchant au cœur même de la Géométrie la raison de cette correspondance, développa cette idée, que *la géométrie de l'espace réglé est comme la géométrie d'un point sur une quadrique à quatre dimensions dans un espace linéaire à cinq dimensions*. Puis, remarquant que la projection stéréographique ramène la géométrie sur une quadrique à la géométrie sur un plan, et qu'un complexe linéaire se comporte comme une section plane d'une quadrique, il parvient par analogie à ce résultat, qu'il existe trois complexes linéaires tangents stationnaires d'un complexe donné suivant une droite donnée.

Nous avons insisté sur ce dernier point, qui intéresse notre travail.

Les travaux ultérieurs (4) sont dus à MM. Zeuthen, Weiler, Pasch, Voss, Battaglini, etc.; ils sont pour la plupart fondés sur l'emploi des coordonnées de M. Klein.

En France, Painvin (5) a écrit deux Mémoires sur certains complexes

---

(1) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme* (*Math. Abhand. der Kön. Akademie der Wiss. zu Berlin*, 1866).

(2) *Ueber complexe insbesondere, etc.* (*Mathematische Annalen*, t. V).

(3) *Math. Annalen*, t. V.

(4) *Ibid.*, t. I, II, V et suivants.

(5) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II; *Journal de Liouville*.

Digitized by Google

du second ordre. M. Darboux (¹) a étudié le complexe des normales à une série de surfaces du second degré homothétiques ou homofocales. M. Mannheim, qui s'est beaucoup occupé des propriétés des surfaces réglées, a aussi publié dans le *Journal de Liouville*, t. XVII, une exposition élémentaire des propriétés des pinceaux. Nous pourrons faire voir un jour que la même méthode s'applique fort élégamment aux complexes.

Enfin M. Picard, dans une Thèse, a fait voir la fécondité de la théorie des complexes appliquée à celle des surfaces.

Là se bornent les travaux des savants français sur cette partie de la Géométrie, du moins à notre connaissance (²).

Nous devons actuellement parler de l'objet et du plan de ces essais.

Le complexe linéaire est un élément algébrique dont l'usage est d'une utilité incontestable quand il s'agit de développer la théorie de l'espace réglé faite au point de vue plückérien, c'est-à-dire en le considérant comme un être dualistique en soi.

Mais M. Lie nous a appris, par l'introduction de ses éléments de contact, à nous élever au-dessus de cette conception algébrique, et, pour se placer à ce point de vue général dans l'étude des propriétés infinitésimales, il est nécessaire de n'introduire que des éléments dualistiques *dérivant uniquement du déplacement de la ligne droite quand on s'écarte d'une position initiale*.

Nous avons remarqué que dans l'espace ponctuel la notion de direction et celle de distance élémentaire suffisaient pour établir toutes les propriétés infinitésimales; c'est ainsi que nous avons été conduits à nous demander s'il n'en serait pas de même dans le cas de l'espace réglé. Voici les résultats que nous avons obtenus.

Sous le nom de *couple* nous introduisons le système d'un plan et d'un point dans ce plan. Une *corrélation* n'est autre chose qu'une correspondance entre les points et les plans d'un couple sur une droite, le point et le plan appartenant à cette droite.

Un déplacement infinitésimal d'une droite engendre sur la position initiale de la droite une *corrélation anharmonique*.

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 40 et 301.

(²) Nous pouvons encore citer M. Halphen, qui a publié plusieurs Notes sur ce sujet (*Comptes rendus* et *Bull. de la Soc. Math.*).

Digitized by Google

Ces corrélations s'offrent ainsi comme analogues des directions.

Une considération géométrique nous permet de définir et de donner un sens concret de l'*angle de deux corrélations* destiné à jouer le rôle de l'angle de deux directions.

Enfin, pour ce qui concerne le carré de la distance élémentaire, nous trouvons qu'une certaine forme quadratique des différentielles des coordonnées, qu'on peut prendre égale au *moment* de deux droites successives, se présente naturellement pour le remplacer.

Cette forme fondamentale, ainsi que l'expression de ds^2, suffit pour définir les angles, et montre l'orthogonalité comme un cas d'involution.

Les corrélations anharmoniques sur une droite qui vérifient une ou deux conditions forment des *réseaux* et des *séries* de corrélations qui jouent le même rôle que les cônes de directions élémentaires.

Dans la première Partie du travail nous développons les propriétés des corrélations et de leurs systèmes, et faisons voir que, grâce à l'existence de la forme fondamentale, ces propriétés trouvent une image commode dans la Géométrie non euclidienne telle qu'elle a été définie par M. Klein (1).

La seconde Partie est consacrée au développement systématique, et suivant ces principes, des propriétés infinitésimales du premier ordre de l'espace réglé. Nous faisons voir que ces propriétés se rattachent naturellement à l'existence de la forme quadratique des différentielles des coordonnées dont nous avons déjà parlé.

Le fait que nous mettons ainsi en évidence se rattache à un ordre d'idées beaucoup plus général, car si l'on prend pour élément de l'espace un être géométrique (courbe ou surface) dépendant de plusieurs paramètres, il existe une forme, en général non quadratique, des différentielles des coordonnées, et qui nous a paru également intimement liée aux propriétés infinitésimales des systèmes formés avec ces éléments.

Cette forme est quadratique dans le cas du point, de la droite et de la sphère : peut-être ne sont-ce pas les seuls cas.

Dans deux derniers paragraphes nous montrons comment la particularisation des coordonnées, jusque-là supposées quelconques, permet

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 341.

Digitized by Google

de donner aux résultats généraux des formes diverses, et nous faisons voir comment à cet égard la transformation d'Ampère peut être rattachée à ces principes : nous disons quelques mots d'une représentation linéaire des surfaces, sur laquelle notre plan ne nous a pas permis d'insister comme elle le méritait.

Nous terminons cette Partie par l'étude d'un système de coordonnées quadruplement orthogonal qui permet de montrer d'une façon élémentaire la correspondance entre les complexes linéaires et les sphères dans un espace à quatre dimensions. Cela nous permet encore de rendre frappante l'analogie entre les coordonnées de M. Klein et les coordonnées pentasphériques.

La dernière Partie est consacrée aux propriétés du second ordre.

Les propositions du premier ordre sont indépendantes de la variation de la forme quadratique. Celles du second, au contraire, lui sont essentiellement liées. Il résulte de là que l'introduction d'un facteur indépendant des différentielles dans la forme quadratique n'altère pas les premières propriétés, au lieu que les secondes en sont profondément modifiées.

Or, le choix qui a été fait du moment pour la forme quadratique offre un certain arbitraire, car les premières propriétés subsistent si on la multiplie par un facteur indépendant des différentielles. Il résulte de là une infinité de manières de concevoir les propriétés du second ordre. Cette indétermination est analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie de l'espace ponctuel, ainsi que l'a fait voir Riemann.

Et, à cet égard, le choix du moment pour forme fondamentale ne paraît pas plus arbitraire que celui qu'on fait de $dx^2 + dy^2 + dz^2$ pour le carré de la distance de deux points.

Néanmoins, la gravité de cette question nous a arrêtés quand il s'est agi de définir la courbure par des formations covariantes déduites du moment. Nous nous sommes contentés pour ce premier essai de résoudre le problème analogue de celui des géodésiques; et, mettant en usage de beaux travaux de M. Lipschitz (1) sur les formes des différentielles, nous arrivons à démontrer que, la forme fondamentale étant prise égale au moment, il est impossible qu'un changement de variables

(1) *Bulletin des Sciences mathematiques*, t. IV, p. 97.

Digitized by Google

la réduise à une forme à coefficients constants. Nous devons signaler ce résultat curieux, que les hélicoïdes gauches se sont offerts à nous comme les surfaces géodésiques de l'espace réglé.

Dans tout ce qui suit, nous développons les propriétés du second ordre fondées sur la remarque de l'analogie entre les complexes linéaires et les sphères.

Nous retrouvons l'hyperboloïde osculateur dans le cas des surfaces réglées.

Dans le cas des congruences, nous trouvons une correspondance entre les congruences osculatrices et les droites infiniment voisines d'une droite fixe de la congruence. Cette correspondance permet d'étendre aux congruences les théorèmes de Meusnier et d'Euler.

Nous parvenons à ce résultat, que les génératrices des hyperboloïdes osculateurs des surfaces réglées d'une congruence relatifs à une droite fixe du système forment un complexe du second degré.

Nous trouvons dans le cas des complexes une correspondance analogue, qui nous conduit aux mêmes résultats et nous permet de définir les surfaces principales de M. Klein. Le rôle du cône de Malus dans cette question paraît intéressant.

Nos recherches sur ce vaste sujet sont, du reste, loin d'être terminées, et le cadre que nous nous étions imposé nous a contraint d'omettre bien des résultats.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES CORRÉLATIONS.

I. — Des couples et des corrélations en général.

1. Nous appelons *couple* un système formé par l'ensemble d'un point et d'un plan mené par ce point. Nous désignons un couple par la notation (a, α), où a désigne le point et α le plan du couple. Un couple

Digitized by Google

sera dit situé sur une droite A, ou bien la droite A sera dite appartenir au couple, si cette droite est dans le plan α du couple et passe par le point a de ce couple.

Deux couples (a, α) et (b, β) étant situés sur une même droite, nous dirons que les couples (a, β), (b, α) obtenus en échangeant les points et les plans sont les *inverses* des deux premiers. Quatre couples (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) étant situés sur une même droite, nous dirons que ces couples sont en *relation anharmonique*, s'il y a égalité entre les deux rapports anharmoniques

$$(a, b, c, d) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Si ces deux rapports sont tous deux harmoniques, nous dirons que les couples sont en *relation harmonique*.

2. Pour définir un couple sur une droite A, on doit se servir de deux coordonnées z et u, définissant l'une le point et l'autre le plan. Un couple sur une droite donnée dépend donc de deux conditions : on peut assujettir un couple à une condition, se traduisant par une équation entre z et u; l'ensemble des couples, satisfaisant ainsi à une même condition, forme une *corrélation*.

Une nouvelle condition suffit évidemment pour définir un couple d'une corrélation. Donnons-nous, par exemple, le plan du couple : il se peut qu'il corresponde m couples de la corrélation; de même, donnons-nous le point du couple; il se peut qu'il corresponde μ couples. Nous dirons alors que la corrélation est du $m^{ième}$ *ordre* et de la $\mu^{ième}$ *classe;* nous la désignerons par le symbole Γ_μ^m. On voit qu'une corrélation Γ_μ^m n'est autre chose qu'une correspondance, entre les points et les plans d'une droite A, en vertu de laquelle m points correspondent à un plan, μ plans correspondent à un point.

Nous citerons d'abord le théorème suivant, qui est fondamental et qui résulte immédiatement du principe de correspondance :

Quatre couples d'une même corrélation Γ_1^1 *du premier ordre et de la première classe sont en relation anharmonique;* et réciproquement *les couples qui, situés sur une droite, sont en relation anharmonique avec trois couples fixes situés sur cette droite, engendrent une corrélation* Γ_1^1 *du premier ordre et de la première classe.*

Digitized by Google

Nous appellerons, pour cette raison, la corrélation du premier ordre et de la première classe une *corrélation anharmonique*.

Nous emploierons aussi souvent le mot de *corrélation* simplement; mais l'ambiguïté ne sera pas possible, car, en parlant des corrélations supérieures, nous aurons toujours soin d'énoncer l'ordre et la classe de la corrélation.

Le principe de correspondance, déjà invoqué, nous apprend que deux corrélations

$$\Gamma_{\mu}^{m} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mu'}^{m}$$

ont en commun un nombre de couples égal à

$$m\mu' + m'\mu.$$

II. — Des corrélations anharmoniques.

3. En particulier, deux corrélations anharmoniques ont en commun deux couples (a, α) et (b, β). Les points a et b de ces couples sont les foyers de l'homographie qui relie les points correspondant aux mêmes plans dans les deux corrélations. Si p et q sont deux points correspondants de l'homographie, il existe un plan ϖ, tel que les couples $(p\varpi)$ et $(q\varpi)$ appartiennent aux corrélations Γ et Γ' proposées. On sait que le rapport anharmonique

$$\rho = (a, b, p, q)$$

est constant.

De même, α et β sont les plans doubles de l'homographie des plans qui, dans les deux corrélations, répondent aux mêmes points. Si ϖ et $\varkappa$ sont deux plans correspondants de cette homographie, il existe un point p, tel que $(p\varpi)$ et $(p\varkappa)$ soient deux couples des corrélations Γ et Γ' respectivement. Le rapport anharmonique

$$\rho' = (\alpha, \beta, \varkappa, \varpi)$$

est pareillement constant; j'ajoute que :

Les rapports anharmoniques constants ρ et ρ' sont égaux.

Conservons, en effet, aux lettres a, b, p, q et $\alpha, \beta, \varpi, \varkappa$ leur signification précédente.

Digitized by Google

Les couples

$$(a, \alpha),\ (b, \beta),\ (p, \varkappa),\ (q, \varpi)$$

appartiennent à la corrélation anharmonique Γ'. On a donc

$$(a, b, p, q) = (\alpha, \beta, \varkappa, \varpi),$$

c'est-à-dire

$$\rho = \rho'.$$

Ce théorème montre que le rapport anharmonique ρ est un élément dualistique, puisqu'il se déduit indifféremment des points ou des plans des couples des corrélations proposées. On voit aussi que ce rapport est un invariant simultané du système des deux corrélations.

Nous appellerons *angle des deux corrélations* la quantité H définie par l'équation

$$e^{2iH} = \rho.$$

Deux corrélations anharmoniques étant données sur une même droite, leur rapport anharmonique ρ a deux valeurs inverses l'une de l'autre; car, dans l'équation

$$\rho = (a, b, p, q),$$

rien ne distingue le point p du point q. On en conclut que, si H_0 est une valeur de l'angle de deux corrélations, toutes les autres valeurs sont comprises dans la formule

$$H = k\pi \pm H_0.$$

On a, en effet,

$$H = \frac{1}{2i} L\rho.$$

Ce fait est tout à fait analogue à celui qui se présente, pour l'angle de deux droites, dans l'espace ponctuel.

4. Lorsque l'une des deux homographies qui nous ont précédemment occupé est une involution, l'autre est également involutive, car ρ et ρ' sont alors égaux à -1.

L'angle des deux corrélations est droit; nous exprimerons ce fait en disant que les deux corrélations sont *en involution* ou *orthogonales*.

Si (a, α) et (b, β) sont deux couples d'une corrélation, (a, β) étant un couple d'une autre, on exprime évidemment leur involution en

Digitized by Google

exprimant que le couple (b, α) appartient également à cette dernière; ainsi :

Pour que deux corrélations anharmoniques soient en involution, il faut et il suffit que l'une d'elles admette les couples inverses de deux couples de l'autre.

5. Il est facile d'exprimer analytiquement les résultats qui précèdent. Supposons que z soit la distance d'un point de la droite fondamentale A à une origine fixe, et u la tangente de l'angle que fait avec un plan fixe un plan mené par la même droite. Deux corrélations anharmoniques seront définies par les équations

$$a_1 z u - b_1 z + p_1 u - q_1 = 0,$$
$$a_2 z u - b_2 z + p_2 u - q_2 = 0,$$

où $a_1, b_1, p_1, q_1, a_2, b_2, p_2, q_2$ sont des constantes. L'équation

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) zz' + (a_1 q_2 - b_1 p_2) z + (b_2 p_1 - q_1 a_2) z' + (p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0$$

définit l'homographie des points qui correspondent aux mêmes plans dans les deux corrélations; on l'obtient en faisant $z = z'$ dans l'équation de la seconde corrélation, et éliminant u entre les équations des deux corrélations. Il est, dès lors, bien facile de calculer la valeur de ρ; c'est là une question élémentaire d'homographie; on trouve l'expression

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1 - b_1 p_2 - b_2 p_1}{\sqrt{(a_1 q_1 - b_1 p_1)(a_2 q_2 - b_2 p_2)}};$$

mais on a aussi

$$\rho = e^{2iH},$$

d'où

$$\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = e^{iH} + e^{-iH} = 2\cos H,$$

c'est-à-dire

$$\cos H = \frac{1}{2} \frac{a_1 q_2 + a_2 q_1 - b_1 p_2 - b_2 p_1}{\sqrt{a_1 q_1 - b_1 p_1}\sqrt{a_2 q_2 - b_2 p_2}}.$$

Posons

$$\varphi(a, b, p, q) = aq - bp;$$

Digitized by Google

on a

$$\cos H = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}a_2+\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}b_2+\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}p_2+\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q_2}{\sqrt{\varphi(a_1,b_1,p_1,q_1)}\sqrt{\varphi(a_2,b_2,p_2,q_2)}}.$$

Cette dernière forme nous sera très utile.

III. — Rôle des corrélations anharmoniques dans les propriétés infinitésimales de l'espace réglé.

6. Supposons qu'une droite donnée A dans l'espace appartienne à une surface réglée : pour étudier la surface autour de la droite, prenons cette droite pour axe Oz, les coordonnées étant rectangulaires. Les équations de la génératrice de la surface réglée seront

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

et a, b, p, q sont des fonctions d'une même variable λ, s'annulant simultanément avec la variable. Le développement en série donne

$$\begin{aligned} a &= a_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha'_1\lambda^3 + \dots, \\ b &= b_1\lambda + \beta_1\lambda^2 + \beta'_1\lambda^3 + \dots, \\ p &= p_1\lambda + \varpi_1\lambda^2 + \varpi'_1\lambda^3 + \dots, \\ q &= q_1\lambda + \varkappa_1\lambda^2 + \varkappa'_1\lambda^3 + \dots. \end{aligned}$$

Ceci posé, si l'on cherche le point $(x = 0, y = 0, z = \zeta)$ où le plan $y = ux$ touche la surface, on tombe sur l'équation

$$a_1\zeta u - b_1\zeta + p_1 u - q_1 = 0, \tag{1}$$

ce qui démontre le théorème bien connu de Chasles sur la distribution des plans tangents à une surface gauche le long d'une génératrice. Ainsi : *les couples formés par un point d'une surface gauche et le plan tangent en ce point, et qui sont situés sur une même génératrice rectiligne, engendrent une corrélation anharmonique.*

7. Considérons une autre surface réglée passant aussi par la droite A; elle donnera lieu à d'autres développements et à une autre corrélation

Digitized by Google

anharmonique. On aura, par exemple, les développements

$$\begin{aligned} a &= a_2\lambda + \alpha_2\lambda_2 + \alpha'_2\lambda^3 + \dots, \\ b &= b_2\lambda + \beta_2\lambda_2 + \beta'_2\lambda^3 + \dots, \\ p &= p_2\lambda + \varpi_2\lambda_2 + \varpi'_2\lambda^3 + \dots, \\ q &= q_2\lambda + \varkappa_2\lambda_2 + \varkappa'_2\lambda^3 + \dots, \end{aligned}$$

et la corrélation

$$a_2\zeta' u' - b_2\zeta' + p_2 u' - q_2 = 0. \tag{2}$$

Les couples communs aux corrélations (1) et (2) sont, comme l'on sait, les couples de raccordement des deux surfaces.

Mais si tous les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix}$$

sont nuls, ces deux corrélations coïncident : les deux surfaces sont tangentes tout du long de la droite A.

On voit ainsi que, si on laisse a_1, b_1, p_1, q_1 invariables, et que l'on attribue aux constantes $\alpha, \alpha', \dots, \beta, \beta', \dots, \varpi, \varpi', \dots, \varkappa, \varkappa', \dots$ telles valeurs qu'on voudra, les développements suivants, où λ est une variable indépendante, conviendront à toutes les surfaces réglées tangentes entre elles tout du long de Oz.

$$\begin{aligned} a &= a_1\lambda + \alpha\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \dots, \\ b &= b_1\lambda + \beta\lambda^2 + \beta_1\lambda^3 + \dots, \\ p &= p_1\lambda + \varpi\lambda^2 + \varpi_1\lambda^3 + \dots, \\ q &= q_1\lambda + \varkappa\lambda^2 + \varkappa_1\lambda^3 + \dots. \end{aligned}$$

Or, attribuons à λ une valeur infiniment petite ε, en négligeant les termes du second ordre, on a

$$a = a_1\varepsilon, \quad b = b_1\varepsilon, \quad p = p_1\varepsilon, \quad q = q_1\varepsilon.$$

La droite correspondante est infiniment voisine de la droite Oz ou A; et, comme elle est indépendante de $\alpha, \alpha', \dots, \beta, \beta', \dots, \varpi, \varpi', \dots, \varkappa, \varkappa', \dots$, on en conclut qu'elle est commune à toutes les surfaces réglées qui définissent la corrélation (1) sur la droite A.

Digitized by Google

C'est ce que nous voudrons exprimer quand nous dirons qu'une corrélation anharmonique sur une droite A correspond à une droite de l'espace infiniment voisine de la droite A.

Ainsi, de même qu'un point de l'espace infiniment voisin d'un point fixe définit une direction issue de ce point, et inversement, que dans une foule de questions la considération de cette direction peut être substituée à celle du point voisin, de même, dans l'espace réglé, une droite infiniment voisine d'une droite définit sur elle une corrélation anharmonique dont l'usage peut réciproquement être substitué à celui de la droite infiniment voisine, au moins dans certaines questions (¹).

8. Ce point éclairci, nous allons passer à la représentation analytique des droites et des corrélations anharmoniques.

Les droites de l'espace forment un système quadruplement indéterminé. Chaque droite dépend donc de quatre paramètres

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4,$$

que nous ne spécifions pas : nous désignerons cette droite par la notation (u).

Une droite infiniment voisine de la droite (u) a pour coordonnées

$$u_i + \Delta u_i,$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$u_i + du_i.$$

On peut la désigner par le symbole $(u + du)$. Chaque système de valeurs des rapports

$$du_1 : du_2 : du_3 : du_4$$

définit une droite infiniment voisine de la droite (u), et par suite une

(¹) Ce qui précède permet de donner une représentation fort simple de l'angle de deux corrélations. Considérons deux surfaces réglées S et S′ définissant sur la droite A deux corrélations Γ et Γ′, ainsi que nous venons de le voir; puis transformons homographiquement de sorte que les plans des couples de raccordement deviennent des plans isotropes. En tous les points de la droite A, transformée de A, les surfaces S_1 et S'_1 transformées de S et S′ se coupent sous un angle constant H, qui est l'angle des deux corrélations.

Digitized by Google

corrélation anharmonique sur cette droite. Ainsi, en appelant t_1, t_2, t_3, t_4 des quantités *finies* proportionnelles à du_1, du_2, du_3, du_4. On pourra dire que les quantités t sont les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur la droite (u). On peut désigner cette corrélation par le symbole (u, t) ou simplement (t).

Les corrélations anharmoniques sur une droite donnée (u) forment une triple infinité. Soit $\theta(t)$ une forme homogène des variables t, l'équation

$$\theta(t) = 0$$

définit l'ensemble des corrélations anharmoniques qui sur la droite (u) satisfont à une condition.

Nous appelons *réseau* un tel ensemble. Les corrélations communes à deux réseaux forment ce que nous appellerons une série de corrélations.

Puisque les corrélations anharmoniques sur une droite jouent le rôle des directions issues d'un point, les *réseaux* et les *séries* de corrélations remplacent les cônes de directions dont l'usage est si fécond dans l'espace ponctuel.

IV. — Forme quadratique fondamentale.

9. Il existe une forme quadratique des différentielles des coordonnées, ou des coordonnées d'une corrélation qui joue un rôle fondamental dans la géométrie de l'espace réglé; nous allons la définir.

Si nous prenons pour coordonnées de la ligne droite les coefficients a, b, p, q dans les équations

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

de la ligne droite rapportée à trois axes de coordonnées, la condition de rencontre des droites infiniment voisines

$$(a, b, p, q), \quad (a + da, b + db, p + dp, q + dq)$$

s'exprime par l'évanouissement de la forme quadratique

$$da\,dq - db\,dp. \tag{1}$$

Si maintenant on prend des coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 quelconques

Digitized by Google

pour la ligne droite dans l'espace, la forme quadratique (1) va se transformer en une forme quadratique des différentielles du_1, du_2, du_3, du_4 que nous désignerons par $N(du)$.

On aura

$$N(du) = da\,dq - db\,dp,$$

et si l'on désigne par K une expression indépendante des différentielles des coordonnées, l'évanouissement de la forme quadratique

$$KN(du) = M(du) = \Sigma M_{ij}\,du_i\,du_j$$

exprime généralement la rencontre des droites infiniment voisines (u_1, u_2, u_3, u_4), $(u_1 + du_1, \ldots)$.

La forme $M(du)$ est celle dont nous voulions parler.

10. D'après notre définition, la forme $M(du)$ n'est déterminée qu'à un facteur près K qui est indépendant des différentielles.

Par un choix convenable de ce facteur, on peut donner à la forme $M(du)$ une expression qui rende concrète l'interprétation de $M(du)$ même pour des valeurs des différentielles qui ne l'annulent pas.

Prenons

$$K = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1},$$

on a

$$M(du) = \frac{da\,dq - db\,dp}{a^2 + b^2 + 1},$$

c'est-à-dire que, si h est la plus courte distance des deux droites (u) et $(u + du)$, ε leur angle infiniment petit, on a

$$M(du) = h \sin\varepsilon.$$

On appelle *moment de deux droites* le moment par rapport à l'une d'un segment égal à l'unité ayant l'autre pour ligne d'action. En désignant par h et ε la plus courte distance et l'angle des deux droites, l'expression de leur moment est justement $h \sin\varepsilon$. Ainsi nous pouvons dire que :

La forme quadratique fondamentale peut être considérée comme représentée par le moment de deux droites infiniment voisines de l'espace.

Digitized by Google

On reconnaîtra par la suite que les propriétés que nous développons sont (sauf celles développées dans la IIIe Partie, § I) indépendantes d'une telle particularisation de la forme quadratique fondamentale; nous ne portons donc pas atteinte à la généralité en faisant ce choix, et l'interprétation concrète nous éclaire sur le rôle géométrique de cette forme.

11. Nous allons montrer comment la forme $M(du)$ s'offre comme l'analogue du carré de la distance de deux points infiniment voisins dans l'espace ponctuel.

Nous ferons voir successivement qu'elle suffit pour définir l'angle de deux corrélations, et qu'elle offre l'orthogonalité comme un cas d'involution.

Soit A une droite de l'espace, et désignons par u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'une droite quelconque.

Si nous rapportons l'espace à des axes rectangulaires, et que A soit l'axe Oz, une droite infiniment voisine de Oz (ou de A) aura pour équations

$$x = z\,da + dp, \quad y = z\,db + dq,$$

et, puisque pour Oz on a $a = b = 0$,

$$M(du) = da\,dq - db\,dp.$$

Désignons par a_1, b_1, p_1, q_1 des quantités finies proportionnelles à da, db, dp, dq; on pourra regarder ces quantités comme les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur A. Et ces quantités sont liées aux coordonnées t_1, t_2, t_3, t_4, déjà définies, par les mêmes équations linéaires qui relient les différentielles da, db, dp, dq aux différentielles du_1, du_2, du_3, du_4.

Or, l'équation de la corrélation dont a_1, b_1, p_1, q_1 sont les coordonnées s'écrit (voir n° 6)

$$a_1 \zeta u - b_1 \zeta + p_1 u - q_1 = 0.$$

Une seconde corrélation dont a'_1, b'_1, p'_1, q'_1 (ou, dans le second système, dont t'_1, t'_2, t'_3, t'_4) seraient les coordonnées homogènes, aura pour équation

$$a'_1 \zeta u - b'_1 \zeta + p'_1 u - q'_1 = 0.$$

Digitized by Google

Mais posant

$$\varphi(a, b, p, q) = aq - bp,$$

nous avons trouvé pour le cosinus de l'angle de deux corrélations

$$\cos H = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} b'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} p'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1}{\sqrt{\varphi(a_1, b_1, p_1, q_1)\varphi(a'_1, b'_1, p'_1, q'_1)}};$$

et, de même qu'on a

$$M(du) = \varphi(da, db, dp, dq),$$

on a

$$M(t) = \varphi(a_1, b_1, p_1, q_1); \quad M(t') = \varphi(a'_1, b'_1, p'_1, q'_1),$$

$$\sum_1^4 \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} a'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} b'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} p'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1.$$

Nous parvenons ainsi à définir l'angle de deux corrélations (t) et (t') sur une droite quelconque A à l'aide de la seule forme fondamentale; on a, en effet,

$$\cos H = \frac{1}{2} \frac{\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i}{\sqrt{M(t) M(t')}}.$$

L'orthogonalité s'exprime par l'équation

$$\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i = 0,$$

qui est symétrique en t et t' : la relation d'orthogonalité est donc involutive. Ce qui est conforme à la définition géométrique que nous avons donnée de l'orthogonalité.

12. Comme analogie curieuse entre le moment élémentaire et le carré de la distance élémentaire, nous citerons les résultats suivants, dont la démonstration est des plus aisées.

Soient trois droites infiniment voisines A, B, C, et désignons par (BC), (CA), (AB) les moments de ces droites prises deux à deux; désignons aussi par $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les angles que font entre elles les deux corré-

Digitized by Google

lations que B et C déterminent sur A, C et A sur B, A et B sur C. On a

$$(1) \qquad (BC) = (AB) + (CA) - 2\sqrt{(AB)(CA)}\cos\hat{A},$$

analogue de la formule

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ca}^2 - 2\sqrt{\overline{ab}^2\,\overline{ca}^2}\cos\hat{A},$$

relative aux triangles dans l'espace ponctuel.

A l'équation (1), on peut en joindre deux autres analogues, et on en déduit

$$\frac{\sin\hat{A}}{\sqrt{(BC)}} = \frac{\sin\hat{B}}{\sqrt{(CA)}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sqrt{(AB)}},$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi,$$

et ainsi de suite.

Citons encore le cas ou $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(BC) = (AB) + (CA) :$$

c'est le carré de l'hypoténuse pour l'espace réglé.

13. En résumant et complétant les résultats de ce paragraphe, nous voyons que :

1° Toute corrélation anharmonique sur une droite a un invariant $M(t)$; et l'évanouissement de l'invariant exprime que la corrélation est *singulière,* c'est-à-dire, que la droite $(u + du)$ qui la détermine sur la droite (u) rencontre cette droite.

Les droites (u) et $(u + du)$ ont ainsi un couple commun (a, α). Ce couple est le *couple singulier* de la corrélation singulière.

Tout couple d'une corrélation singulière admet pour un de ses deux éléments (point ou plan) au moins un des éléments du couple singulier.

2° Deux corrélations anharmoniques, sur une même droite A, ont un invariant simultané

$$\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i.$$

Digitized by Google

L'évanouissement de cet invariant exprime l'orthogonalité (ou l'involution) des deux corrélations.

Pour qu'une corrélation singulière soit en involution avec une corrélation donnée, il faut et il suffit que son couple singulier appartienne à cette corrélation.

Ou encore :

Une corrélation anharmonique est le lieu des couples singuliers des corrélations anharmoniques singulières avec lesquelles elle est en involution.

Pour que deux corrélations singulières soient en involution, il faut et il suffit que leurs couples singuliers aient un élément (point ou plan) commun.

Il est bien facile de démontrer ces propositions, à l'aide des équations (1) et (2) du n° 6.

V. — Représentation des corrélations par l'espace non euclidien.

14. Nous venons de ramener aux propriétés des formes quadratiques quaternaires la théorie des corrélations. Cela va nous permettre d'introduire une représentation géométrique, qui nous montrera cette même théorie comme une image de l'espace *non euclidien*, tel que M. Klein l'a défini au Tome II du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Considérons les t comme les coordonnées d'un plan dans l'espace à trois dimensions. Nous faisons correspondre à ce plan la corrélation anharmonique (t). De la sorte, une surface représente par ses plans tangents un réseau de corrélations anharmoniques, et une développable représente une série de ces corrélations.

En particulier, le réseau quadratique des corrélations singulières est représenté par une quadrique, qui a pour équation

$$\mathrm{M}(t) = 0.$$

Nous prendrons cette quadrique M pour quadrique fondamentale.

La première remarque qui s'offre, c'est que *l'angle de deux corrélations anharmoniques égale l'angle (sens non euclidien) des deux plans qui les représentent.*

Les corrélations orthogonales sont donc représentées par des plans

Digitized by Google

orthogonaux (sens non euclidien), c'est-à-dire conjugués par rapport à la quadrique fondamentale.

Comme chaque plan tangent de la quadrique M représente une corrélation singulière, on peut prendre le point de contact pour en représenter le couple singulier. Tous les couples de la droite fondamentale sont alors représentés par tous les points de la quadrique.

Nous avons vu que la condition d'involution de deux corrélations singulières était que les couples singuliers eussent un élément commun (point ou plan). Si A et B sont les points de la quadrique M qui représentent ces couples, il faut, d'après la condition d'orthogonalité déjà énoncée, que le plan tangent en A contienne le point B, ou que A et B soient sur une même génératrice rectiligne de la surface. On voit ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour que deux couples, situés sur la droite fondamentale, aient un élément commun, c'est que les points A et B, qui les représentent, soient sur une même génératrice rectiligne de la surface M. On en conclut que les couples de la droite fondamentale, qui ont un élément commun, sont représentés par les points d'une génératrice rectiligne et réciproquement.

Si les génératrices rectilignes G et G′ représentent les couples qui ont les uns le même point a, les autres le même point a', il est bien évident que G et G′ ne peuvent se couper; car, si ces droites se coupaient en un point A, le couple représenté par ce point aurait à la fois les points a et a', ce qui n'a aucun sens. On est ainsi conduit à dire que :

Les génératrices rectilignes G *d'un mode de génération de la quadrique fondamentale représentent chacune un point a de la droite fondamentale.*

C'est-à-dire que chacune représente, par ses points, les couples qui admettent un même point a de la droite fondamentale.

Les génératrices rectilignes Φ *du second mode de génération représentent, au contraire, les plans menés par la même droite.*

En sorte que :

Tout point A *de la quadrique* M *représente un couple; les génératrices* G *et* Φ *du premier et du deuxième mode de génération qui se croisent en ce point représentent, l'une le point, l'autre le plan du couple.*

Digitized by Google

15. M. Chasles, dans le mois de décembre 1861, a présenté à l'Académie des Sciences une théorie de courbes tracées sur les quadriques; il les classe d'après le nombre de fois que ces courbes sont coupées par les génératrices de l'un et de l'autre système. Désignons par C_μ^m une courbe coupée en m points par les génératrices Φ et en μ points par les génératrices G. Dans l'état actuel, comme toute courbe C_μ^m tracée sur la surface M fait correspondre m génératrices G à une génératrice Φ, et μ génératrices Φ à une génératrice G, on en conclut qu'une courbe C_μ^m représente par ses points les couples d'une corrélation supérieure Γ_μ^m de l'ordre m et de la classe μ.

En particulier, toute conique tracée sur la quadrique représente, par ses points, les couples de la corrélation anharmonique représentée par le plan qui la contient.

En effet, un plan tangent à la surface M en un point de cette conique passe au pôle du plan représentatif de la corrélation; ce plan tangent représente donc une corrélation anharmonique singulière en involution avec la proposée; et, d'après une proposition déjà énoncée, le couple singulier, qui est ici représenté par le point pris sur la conique, appartient à la corrélation anharmonique proposée.

16. Nous venons de voir comment se représentaient les corrélations supérieures, il reste à établir la représentation des réseaux et des séries de corrélations anharmoniques et d'en déduire des propriétés.

Représentation des réseaux. — Une surface R_p de la classe p représente un réseau d'ordre p. La développable D_{2p} de la classe $2p$ circonscrite à R_p et à M représente la série d'ordre $2p$, formée par les corrélations singulières du réseau. La courbe de contact de D_{2p} avec M est de l'ordre $2p$; d'après nos notations, elle doit être désignée par C_p^p. Cette courbe représente une corrélation supérieure Γ_p^p d'ordre et de classe p, engendrée par les couples singuliers des corrélations singulières du réseau. Cette corrélation, nous l'appelons la corrélation *focale* du réseau.

Il y a une infinité de réseaux d'ordre p admettant la même corrélation focale; ils sont représentés par des surfaces de la classe p homofocales, c'est-à-dire inscrites dans une même développable circonscrite à la quadrique M.

Digitized by Google

Représentation des séries. — Considérons une série définie par deux réseaux d'ordres p et q, représentés par deux surfaces R_p et R_q des classes p et q. La série, dont on peut dire qu'elle est de l'ordre pq, est représentée par la développable $S_{(p,q)}$, circonscrite à la fois aux surfaces R_p et R_q et qui est de la classe pq. Les $2pq$ plans tangents communs à la développable et à la surface M représentent les $2pq$ corrélations singulières de la série. Les points de contact de ces plans avec M représentent les $2pq$ couples singuliers de ces corrélations singulières. Nous appelons ces couples les *couples focaux;* ce qui n'est que l'extension d'une dénomination déjà en usage pour le cas de $p = q = 1$. Les séries ayant les mêmes couples focaux sont représentées par des développables homofocales, c'est-à-dire ayant avec la quadrique M les mêmes plans tangents communs.

Il faut remarquer que les couples focaux d'une série donnée appartiennent aux corrélations focales de tous les réseaux qui comprennent ces séries; de là le nom de *corrélations focales* que nous avons adopté.

17. *Réseaux linéaires.* — Un réseau linéaire est représenté par un point R_1. La série focale est représentée par le cône ayant ce point pour sommet et circonscrit à M. Le plan polaire du point R_1 est celui de la courbe de contact; il représente la corrélation focale du réseau; car ici cette corrélation est anharmonique. On arrive ainsi à ce résultat important :

Les corrélations d'un réseau linéaire sont définies géométriquement par la condition d'être en involution avec une corrélation fixe, qui est la corrélation du réseau.

Quand la corrélation focale d'un réseau linéaire est singulière, le réseau est également singulier. La condition d'involution précédemment énoncée, et ce fait, que l'involution de deux corrélations, dont l'une est singulière, s'exprime en écrivant que le couple singulier appartient à l'autre corrélation, conduisent à cette proposition :

Pour que des corrélations anharmoniques forment un réseau linéaire singulier, il faut et il suffit qu'elles admettent un couple fixe.

On exprime encore qu'un réseau linéaire est singulier en disant qu'il comprend sa corrélation focale, car les corrélations singulières jouissent

Digitized by Google

seules de la condition d'être en involution avec elles-mêmes ; on voit l'analogie avec les directions isotropes.

18. *Séries linéaires.* — Deux réseaux linéaires ont en commun une série linéaire. Une telle série est représentée par une droite S_{11}. La droite Σ_{11}, polaire de la droite S_{11}, représente une seconde série linéaire dont on peut dire qu'elle est conjuguée de la première.

Deux séries linéaires conjuguées jouissent de la propriété suivante :

Deux corrélations prises arbitrairement chacune dans l'une d'elles sont en involution.

Les plans tangents issus de S_{11} à la quadrique M représentent les corrélations singulières de l'une des séries. Les points de contact, qui représentent les couples focaux, sont à l'intersection de la droite Σ_{11} avec la surface fondamentale. Au contraire, la droite S_{11} coupe cette surface aux points qui représentent les couples focaux de l'autre série. En ayant égard aux résultats du n° 14, on voit que les deux systèmes de couples focaux de deux séries linéaires conjuguées sont inverses l'un de l'autre, car les points qui les représentent sont les sommets d'un quadrilatère gauche formé par quatre génératrices de la surface M.

La propriété d'involution de deux corrélations quelconques, prises chacune dans une des deux séries, appliquée aux corrélations singulières de ces séries eût conduit aux mêmes résultats.

De la même manière, en appliquant cette propriété d'involution à une corrélation de la première série et à l'une des deux corrélations singulières de la seconde, on arrive à cette définition géométrique des series linéaires.

Une série linéaire se compose de toutes les corrélations qui admettent deux couples fixes. Ces couples fixes sont les inverses des couples focaux, ou les couples focaux de la série conjuguée.

Nous nous contenterons d'énoncer les résultats suivants que le mode de représentation rend intuitifs :

Pour qu'une série linéaire appartienne à un réseau linéaire, il faut et il suffit que ses couples focaux appartiennent à la corrélation focale du réseau.

Digitized by Google

Les séries singulières, c'est-à-dire dont les couples focaux coïncident, ont chacune pour conjuguée une série singulière; donc le couple focal double se confond avec le couple focal double de la première série.

On exprime qu'une série est singulière en écrivant que la droite S_{11} *qui la représente touche la quadrique* M.

Les séries linéaires singulières qui appartiennent à un réseau linéaire représenté par un point R_1 sont représentées par les génératrices du cône qui représente la série focale du réseau. Ainsi ce cône représente :

Par ses plans tangents, les corrélations singulières du réseau;

Par ses génératrices, les séries linéaires singulières de ce même réseau.

Nous retrouverons cette propriété dans l'étude du cône de Malus.

19. *Réseaux quadratiques.* — Un réseau quadratique de corrélation anharmonique est représenté par une équation du second degré $\theta(t)=0$. Dans l'espace, il est représenté par une quadrique R_2.

La série des corrélations singulières est du quatrième degré; la corrélation focale est d'ordre et de classe 2. La série des corrélations singulières est représentée par une développable D_{22} de la quatrième classe, circonscrite à la fois aux quadriques R_2 et M.

Si le discriminant de la forme θ est nul, la quadrique R_2 est infiniment aplatie; mais cela n'influe en rien sur la nature de la corrélation focale, attendu que parmi les quadriques inscrites dans une même développable D_{22}, il y en a toujours au moins une infiniment aplatie.

Si tous les mineurs du discriminant de θ sont nuls, la développable D_{22} se décompose en deux cônes de seconde classe, car la quadrique R_2 se décompose en deux points. Plus généralement, chaque fois que les quadriques R_2 et M sont bi-tangentes, la développable D_{22} se décompose en deux cônes. La corrélation focale se décompose alors en deux corrélations anharmoniques.

Enfin les surfaces R_2 et M peuvent être circonscrites l'une à l'autre; dans ce cas, on a un réseau linéaire double, et la corrélation focale se compose d'une corrélation anharmonique prise deux fois.

20. *Séries quadratiques.* — Deux réseaux, l'un linéaire, l'autre quadratique, ont en commun une série quadratique. Une série quadratique

Digitized by Google

est représentée par un cône de seconde classe. Il existe quatre couples focaux : ces couples focaux sont toujours en relation anharmonique.

Nous n'entrerons pas dans le détail des singularités que peuvent offrir les séries quadratiques, et que le mode de représentation permettrait de définir et d'étudier très simplement.

Nous réservons pour un autre moment diverses autres propriétés des corrélations qui nous seront utiles et conduisent à de nouvelles analogies entre le moment de deux droites infiniment voisines et le carré de la distance de deux points infiniment voisins.

DEUXIÈME PARTIE.

LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DU PREMIER ORDRE.

---

21. Nous allons d'abord montrer comment les propriétés du premier ordre des systèmes de droites peuvent être rattachées à l'existence de la forme fondamentale.

I. — Propriétés des surfaces réglées.

Si une surface réglée est représentée par les trois équations

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad \psi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

et que l'on pose

$$U_i = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad V_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad W_i = \frac{\partial \psi}{\partial u_i};$$

une droite $(u + du)$ infiniment voisine d'une droite (u) de la surface et appartenant à cette surface vérifie les équations

$$\Sigma U_i\, du_i = 0, \quad \Sigma V_i\, du_i = 0, \quad \Sigma W_i\, du_i = 0.$$

Digitized by Google

Appelons Δ_α le déterminant obtenu en retranchant la colonne d'indice α dans le tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{vmatrix}.$$

On déduit des équations précédentes

$$\frac{du_1}{\Delta_1} = \frac{du_2}{\Delta_2} = \frac{du_3}{\Delta_3} = \frac{du_4}{\Delta_4}.$$

On peut envisager les Δ comme les coordonnées homogènes de la corrélation de Chasles, relative à la droite (u), c'est-à-dire de la corrélation anharmonique que la surface définit sur cette droite en vertu du théorème de M. Chasles, sur la distribution des plans tangents.

22. L'invariant $M(\Delta)$ de cette corrélation se met sous la forme

$$I = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & U_1 & V_1 & W_1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & U_2 & V_2 & W_2 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & U_3 & V_3 & W_3 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & U_4 & V_4 & W_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & 0 & 0 & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & 0 & 0 & 0 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut appeler *singulières* toutes les droites de la surface pour lesquelles I est nul. On a $I = 0$ quand tous les Δ sont nuls; mais en remettant à plus tard l'examen de ce cas, l'équation $I = 0$ exprime qu'autour de la droite (u) la surface réglée se comporte comme une surface développable; ainsi le plan tangent est le même pour tous les points de la droite (u), etc.

On voit en même temps que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit développable, c'est que l'équation*

$$I = 0$$

soit vérifiée pour toutes ses droites sans que les déterminants Δ soient tous et toujours nuls.

Digitized by Google

23. Deux surfaces réglées qui sur une droite définissent la même corrélation de Chasles se raccordent suivant cette droite. Parmi les surfaces qui, suivant une droite, se raccordent avec une surface réglée donnée, on peut distinguer les *hyperboloïdes de raccordement*. Voici comment on les obtient.

Soient (a, α), (b, β), (c, γ) trois couples de la corrélation de Chasles relative à une droite (u) d'une surface réglée, soient A, B, C trois droites appartenant respectivement à ces couples : l'hyperboloïde dont ces droites sont les directrices est de raccordement.

On voit ainsi que ces hyperboloïdes sont triplement indéterminés. On peut, en effet, les envisager comme des quadriques passant par deux droites (u) et $(u + du)$ infiniment voisines.

II. — Propriétés des congruences.

24. Deux équations

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

suffisent pour définir une congruence. Si (u) et $(u + du)$ sont deux droites infiniment voisines de la congruence, en conservant les notations précédentes, on a

$$\Sigma U_i du_i = 0, \quad \Sigma V_i du_i = 0,$$

ou, en introduisant les coordonnées t d'une corrélation,

$$\Sigma U_i t_i = 0, \quad \Sigma V_i t_i = 0.$$

Les corrélations sur une droite d'une congruence qui appartiennent à la congruence forment donc une série linéaire.

On en déduit, par les propriétés déjà exposées des séries linéaires, les résultats suivants :

Les corrélations qui appartiennent à une congruence sur une de ses droites admettent deux couples fixes (b, α) *et* (a, β). Les inverses de ces couples sont les *couples focaux* de la série linéaire.

L'existence de ces deux couples focaux montre que, parmi les corré-

Digitized by Google

lations qui appartiennent à la congruence, il y en a deux singulières dont ils sont les couples singuliers : de là ce théorème dû à Monge :

Étant donnée une droite d'une congruence, il existe deux droites de la congruence infiniment voisines de la première et la rencontrant.

Les points a et b, les plans α et β, sont les *foyers* et les plans *focaux* de la droite (u).

25. Les foyers ne dépendent que des deux coordonnées, ainsi que les plans focaux. Ils engendrent donc des surfaces. Soient A et B les deux surfaces lieux des points a et b, et qu'on appelle les *surfaces focales* de la congruence. Nous remarquons deux choses : d'abord, si l'on envisage une développable de la congruence et une de ses génératrices (u), le plan tangent à cette développable et le point de l'arête de rebroussement relatifs à cette génératrice forment un couple focal (a, α) de cette droite; en second lieu, puisqu'il correspond deux couples focaux à chaque droite d'une congruence, toute droite du système appartient à deux développables de cette congruence. On en conclut que les surfaces focales A et B sont respectivement le lieu des deux séries d'arêtes de rebroussement des développables de la congruence, et, par suite, que :

Les droites de la congruence sont tangentes aux surfaces focales.

Une développable de la congruence a son arête de rebroussement R_a sur la surface A, par exemple, et est circonscrite à la surface B, suivant une courbe S_b. Le plan α, étant tangent à la surface développable, est donc tangent en b à la surface B. Ainsi :

Les plans focaux touchent les surfaces focales.

En résumé, si l'on envisage les arêtes de rebroussement des développables de la congruence, elles forment deux séries de courbes R_a, R_b sur les surfaces focales A et B. Les plans osculateurs de ces courbes sont respectivement tangents aux surfaces B et A, et les points de contact décrivent respectivement sur ces surfaces deux séries de courbes S_b et S_a.

26. Nous sommes naturellement amenés à nous demander ce qui

Digitized by Google

arriverait dans le cas où les couples focaux coïncideraient. Si cela avait lieu et que (a, α) fût le couple de coïncidence, les surfaces focales se toucheraient en a, et α serait leur plan tangent commun. Mais alors la courbe R_a admettrait (aussi bien que R_b) pour plan osculateur le plan tangent à la surface A (ou B), sur laquelle elle est tracée; la tangente (u) à cette courbe serait donc une tangente asymptotique de la surface focale au point a.

Si les couples focaux coïncident pour toutes les droites de la congruence, les deux surfaces focales coïncident, et il est visible, d'après ce qui précède, que, dans ce cas, les droites du système se composent des *tangentes asymptotiques* d'une série de la surface suivant laquelle coïncident les deux surfaces focales.

La réciproque est vraie. Considérons, en effet, le système des tangentes asymptotiques d'une série d'une surface A donnée : soient a un point de la surface et (u) la tangente asymptotique du système considéré, relative à ce point. Le plan osculateur α à la ligne asymptotique, c'est-à-dire le plan tangent en a, à la surface focale A, doit toucher la seconde surface focale B, ainsi que nous l'avons vu. Donc, tout plan tangent à A est tangent à B, donc A et B coïncident.

Cette propriété des surfaces focales peut se déduire d'une autre plus générale, qu'il serait facile de démontrer ici en quelques mots ; mais cette proposition trouve sa place parmi les propriétés du second ordre, et nous l'y retrouverons.

Il est facile d'exprimer, à l'aide de la forme fondamentale, la coïncidence des couples focaux relatifs à une droite (u) de la congruence. Il suffit d'annuler l'expression

$$J = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & U_1 & V_1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & U_2 & V_2 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & U_3 & V_3 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & U_4 & V_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & 0 & 0 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

dont on peut rapprocher la forme de l'expression de I. Désignons par $\Delta_{\alpha,\beta}$ le déterminant obtenu, en retranchant les colonnes d'indice

Digitized by Google

α et β dans le Tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix}.$$

L'équation $J = 0$ exprime la coïncidence des couples focaux, pourvu que les déterminants $\Delta_{\alpha,\beta}$ ne soient pas tous nuls, cas que nous examinerons plus tard. Ainsi :

L'équation $J = 0$ *caractérise les congruences formées par les tangentes inflexionnelles d'une surface.*

De même que l'équation $I = 0$ caractérisait les surfaces réglées formées des tangentes à une courbe.

27. Les droites d'une congruence dépendent de deux paramètres; désignons-les par p et q. L'introduction de ces deux paramètres attribue à la forme fondamentale l'expression

$$M(du) = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2.$$

Les diverses formes qu'on peut faire prendre au second membre conduisent à des interprétations différentes des mêmes faits analytiques, qui jouent un rôle si important dans la théorie des surfaces, lorsque l'on envisage la valeur de ds^2.

Les équations $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ représentent deux séries de surfaces réglées de la congruence, et l'équation

$$F = 0$$

exprime l'involution des deux corrélations de Chasles que définissent sur une droite quelconque de la congruence les deux surfaces de chaque série qui y passent. Ainsi, la forme

$$M(du) = E\,dp^2 + G\,dq^2$$

signifie que les surfaces $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ forment deux systèmes orthogonaux, au sens que nous attribuons à ce mot.

Pour obtenir les développables de la congruence, il suffit d'intégrer l'équation

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = 0.$$

Digitized by Google

Par exemple, si l'on a mis la forme $M(du)$ sous la forme

$$M(du) = \lambda\, dp\, dq,$$

les équations $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ représentent les deux séries de développables de la congruence.

Ainsi, *ces développables s'offrent comme les analogues des courbes isotropes sur une surface.*

Supposons que les deux séries de développables de la congruence coïncident. Il faut et il suffit pour cela que l'expression

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

soit un carré parfait, ou que

$$EG - F^2 = 0.$$

La coïncidence des deux séries de développables entraîne celle des surfaces focales ; donc :

L'équation différentielle des congruences à surfaces focales coïncidentes est précisément

$$EG - F^2 = 0.$$

C'est une autre forme de l'équation $J = 0$, d'où l'on peut d'ailleurs la déduire.

Mais cette forme d'équation offre cet intérêt de nous montrer cette catégorie de congruences comme analogue des développables circonscrites au cercle de l'infini.

Les développements dans lesquels nous pourrions entrer encore nous entraîneraient sur le domaine du second ordre : nous y reviendrons dans la troisième partie.

28. Pour terminer ce qui a trait aux propriétés du premier ordre des congruences, il nous reste à parler du rôle des couples focaux dans l'étude des surfaces réglées qui appartiennent au système.

D'abord, *les surfaces réglées d'une congruence qui ont une génératrice (u) commune, se raccordent toutes suivant les couples inverses des couples focaux.*

En effet, ces surfaces sont toutes circonscrites aux surfaces focales.

Digitized by Google

Il est dès lors bien facile d'obtenir la série des *hyperboloïdes de raccordement* pour toutes ces surfaces.

Appelons, comme toujours, a et b les foyers de la droite (u), et en ces points, dans les plans tangents α et β aux surfaces focales $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, menons les tangentes A et B à ces surfaces. Tous les hyperboloïdes qui admettent A et B pour directrices sont de raccordement pour une surface réglée du système.

On voit ainsi que ces hyperboloïdes sont quadruplement indéterminés.

Si l'on envisage deux congruences, qui sur une droite commune (u) définissent les mêmes couples focaux (a, α) et (b, β) (auquel cas les surfaces focales $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ des deux systèmes sont tangentes en a et b), on peut dire que ces deux congruences sont tangentes suivant cette droite. Le système des hyperboloïdes de raccordement est le même pour les deux congruences, et toute corrélation anharmonique qui appartient à l'une appartient à l'autre.

Parmi les congruences tangentes, on peut distinguer les *congruences linéaires tangentes*.

En désignant par A et B les mêmes droites que plus haut, la congruence linéaire dont A et B seraient les directrices est une congruence tangente.

On voit ainsi que ces congruences sont doublement indéterminées.

En particulier, si l'on prend A et B perpendiculaires à la droite (u), on obtient une certaine congruence linéaire tangente dont la découverte est due, croyons-nous, à Sturm.

III. — Propriétés des complexes.

29. Soit l'équation d'un complexe

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0.$$

Si (u) et $(u+du)$ sont deux droites du système infiniment voisines, l'équation suivante, où l'on conserve les notations précédentes,

$$\Sigma U_i du_i = 0$$

doit être vérifiée. L'introduction des coordonnées des corrélations an-

Digitized by Google

harmoniques donne

$$\Sigma U_i t_i = 0,$$

qui exprime que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur une droite d'un complexe qui appartiennent à ce complexe forment un réseau linéaire.

Une propriété fondamentale du réseau nous apprend que :

Toutes les corrélations anharmoniques sur une droite d'un complexe qui appartiennent à ce complexe sont définies par la condition d'être en involution ou orthogonales avec une corrélation fixe.

Ce résultat offre une analogie réelle avec le suivant, qui est fondamental dans la théorie des surfaces.

Toutes les directions issues d'un point d'une surface et qui appartiennent (tangentes) à la surface sont définies par la condition d'être orthogonales à une direction fixe, la direction normale.

A cause de cette analogie, nous appelons *corrélation normale* la corrélation focale du réseau linéaire ci-dessus considéré.

Les coordonnées de la corrélation normale sont données par les équations

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial t_1}}{U_1} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t_2}}{U_2} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t_3}}{U_3} = \frac{\frac{\partial M}{\partial t_4}}{U_4}.$$

L'invariant K a une forme symétrique qui le rapproche des invariants I et J déjà trouvés; on a

$$K = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & U_1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & U_2 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & U_3 \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & U_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

30. On peut, d'une manière générale, appeler *droites singulières* du complexe toutes celles pour lesquelles a lieu l'équation $K = 0$. Écartons jusqu'à nouvel ordre l'hypothèse où tous les U seraient nuls. L'évanouissement de l'invariant exprime que la corrélation normale est singulière, ainsi que le réseau qu'elle définit.

Digitized by Google

Lorsqu'une droite (u) est ainsi singulière, toutes les corrélations sur cette droite qui appartiennent au complexe admettent un couple fixe (a, α), à savoir le couple singulier de la corrélation normale.

L'équation $K=0$ définit dans le complexe une congruence, celle des droites singulières. Le point a décrit une surface $[f]$ qu'on appelle la *surface de singularité* du complexe $f=0$.

Dans la congruence des droites singulières, a est un foyer de la la droite (u) et α est un plan focal; mais, le couple (a, α) n'est pas un couple focal. On en déduit que $[f]$ est une nappe de la surface focale de la congruence des droites singulières, et que α est le plan tangent à cette surface en ce point. Ainsi, en disant, selon l'usage, qu'un couple appartient à une surface quand le point étant sur la surface le plan touche la surface en ce point, on peut dire que :

Les couples singuliers des corrélations normales singulières d'un complexe appartiennent à la surface de singularités.

Ce théorème a été énoncé pour la première fois sous une forme un peu différente par M. Pasch.

31. On peut se proposer de savoir s'il est possible que l'équation $K=0$ soit vérifiée identiquement pour toutes les droites du complexe.

Pour étudier cette question, prenons pour coordonnées les coefficients a, b, p, q dans les équations de la droite rapportée à trois axes rectangulaires; soit

$$q=f(a, b, p)$$

l'équation du complexe; on en déduit, par différentiation,

$$f'_a\,da+f'_b\,db+f'_p\,dp-dq=0,$$

de sorte que les coordonnées de la corrélation normale ont pour expressions

$$1,\ f'_p,\ f'_b,\ -f'_a;$$

ce qui signifie que la droite dont les coordonnées sont

$$a+\varepsilon,\quad b+f'_p\varepsilon,\quad p+f'_b\varepsilon,\quad q-f'_a\varepsilon$$

définit, sur la droite

$$a,\ b,\ p,\ q,$$

la corrélation normale du complexe.

Digitized by Google

Ces deux droites ont un point m et un plan μ communs chaque fois que la corrélation normale est singulière; et (m, μ) est alors le couple singulier. La condition de rencontre s'écrit

$$-f'_b = \frac{f'_a}{f'_p};$$

de sorte que, dans notre système de coordonnées, l'équation $K = 0$ s'écrit

$$\frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial p} = 0.$$

Le point m a pour coordonnées

$$(m) \qquad x_0 = az_0 + p, \quad y_0 = bz_0 + q, \quad z_0 = -f'_b = \frac{f'_a}{f'_p},$$

le plan μ a pour équation

$$(\mu) \qquad -xf'_p + y + (af'_p - b)z + (pf'_p - q) = 0.$$

Différentions les deux premières équations (m) et ajoutons les différentielles membre à membre, les deux membres de la première étant multipliés par $-f'_p$, il vient

$$-f'_p dx_0 + dy_0 + (af'_p - b)dz_0 = -z_0 f'_p da + z_0 db - f'_p dp + dq;$$

mais on a

$$z_0 f'_p = f'_a, \quad z_0 = -f'_b,$$

donc, le second membre de la relation précédente devient

$$-f'_a da - f'_b db - f'_p dp + dq,$$

c'est-à-dire zéro; on a donc la relation

$$(r) \qquad -f'_p dx_0 + dy_0 + (af'_p - b)dz_0 = 0.$$

Cette équation prouve que le point m décrit une surface S, et en la rapprochant de l'équation (μ), on voit que le plan (μ) est le plan tangent en m à la surface de singularités.

Nous avons ainsi démontré une seconde fois le théorème de Pasch, qui consiste en ce que :

Les couples singuliers des corrélations normales singulières d'un complexe appartiennent à une surface.

Digitized by Google

Si l'on suppose actuellement que l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial a}+\frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial p}=0$$

ait lieu pour toutes les droites du complexe, les raisonnements et les calculs précédents subsistent, et l'on voit que toutes les droites du complexe sont alors tangentes à la surface S. De là ce théorème dû à M. Klein, et énoncé par lui sous une autre forme :

Un complexe dont toutes les corrélations normales sont singulières se compose des tangentes à une même surface.

Réciproquement, les tangentes d'une surface forment un complexe qui vérifie l'équation $K=0$.

Il est facile de le voir directement. Mais voici une démonstration analytique de ce fait. Soit l'équation de la surface

$$F(x,y,z)=0.$$

Si entre l'équation

$$F(az+p,\quad bz+q,z)=0$$

et sa dérivée par rapport à z.

$$aF'_x+bF'_y+F'_z=0,$$

nous éliminons z, l'équation obtenue entre a,b,p,q est celle du complexe des tangentes de la surface proposée. Différentions totalement F, en tenant compte de l'équation

$$\frac{dF}{dz}=0;$$

il vient

$$zF'_x da+zF'_y db+F'_x dp+F'_y dq=0.$$

Cette équation définit le réseau linéaire engendré par les droites du complexe infiniment voisines de la droite (a,b,p,q). La corrélation normale du réseau a donc pour coordonnées

$$F'_y,\ -F'_x,\ -zF'_y,\ zF'_x,$$

c'est-à-dire qu'elle est définie sur la droite

$$a,\ b,\ p,\ q$$

Digitized by Google

par la droite infiniment voisine

$$a + F'_y\varepsilon, \quad b - F'_x\varepsilon, \quad p - zF'_y\varepsilon, \quad q + zF'_x\varepsilon.$$

Mais il est facile de voir que ces deux droites se coupent au point (x, y, z) de la surface, et que leur plan commun est précisément le plan tangent à la même surface en ce point. La corrélation normale est donc singulière, et, par suite, l'équation $K = 0$ est satisfaite.

En résumé :

L'équation $K = 0$ *est l'équation différentielle des complexes des droites ayant avec une surface un simple contact.*

De même que l'équation $J = 0$ était l'équation différentielle des congruences des droites ayant avec une surface un contact du *deuxième* ordre.

De même, enfin, que l'équation $I = 0$ était l'équation des surfaces engendrées par les droites tangentes à une courbe, ou, si l'on veut, ayant avec une surface un contact du *troisième* ordre.

23. Avant de développer plus longuement les propriétés des droites singulières, il convient de montrer le rôle de la corrélation normale dans l'étude des surfaces réglées et des congruences formées des droites du complexe.

D'abord, le théorème d'involution qui définit la corrélation normale montre que *toutes les surfaces réglées d'un complexe déterminent, sur leurs génératrices, des corrélations de Chasles respectivement orthogonales aux corrélations normales.*

La définition des *hyperboloïdes de raccordement* des surfaces réglées d'un complexe dérive immédiatement de cette remarque. Si (a, α) et (b, β) sont deux couples quelconques de la corrélation normale relative à une droite (a), et si A et B sont deux droites appartenant aux couples (a, β) et (b, α) inverses des premiers, tout hyperboloïde admettant A et B pour directrices est un hyperboloïde de raccordement pour une surface réglée du complexe. Ces hyperboloïdes sont, on le voit, quintuplement indéterminés.

Digitized by Google

33. Considérons une développable formée des droites d'un complexe; soient (u) une de ses génératrices, a le point où elle touche l'arête de rebroussement et α le plan tangent tout du long de cette génératrice. La développable définit sur la droite (u) une corrélation singulière dont (a, α) est le couple singulier; et, comme une corrélation anharmonique est le lieu des couples singuliers des corrélations singulières avec lesquelles elle est en involution, on en conclut que le couple (a, α) appartient à la corrélation normale.

Ainsi :

Toute développable formée des droites d'un complexe définit sur chaque génératrice un couple de la corrélation normale; le point est le point de contact avec l'arête de rebroussement, le plan est le plan tangent tout du long de la génératrice.

On peut en particulier prendre, soit le cône du complexe de sommet a, et α est alors le plan tangent suivant la génératrice (u), soit la courbe enveloppe du complexe dans le plan α, et a est alors le point de contact de la génératrice (u) avec cette courbe.

34. La corrélation normale définit également les congruences du complexe. En effet, une congruence étant donnée dans un complexe, les couples focaux appartiennent respectivement aux corrélations normales.

De là la possibilité de définir les *congruences linéaires tangentes* à un complexe. En effet, si (u) est une droite du complexe et A, B deux droites comme nous les avons définies à propos des hyperboloïdes de raccordement, on voit que la congruence linéaire dont elles sont les directrices est tangente à une congruence du complexe; ces congruences tangentes sont quadruplement indéterminées.

35. Considérons une congruence à couples focaux coïncidents du complexe; d'après ce qu'on sait sur ces congruences, si (a, α) est le couple de coïncidence relatif à une droite (u) de la congruence, ce couple appartient à la surface focale unique du système; il appartient aussi à la corrélation normale du complexe.

Un couple (point et plan mené par ce point) dépend dans l'espace de cinq paramètres; mais on voit que les couples des corrélations normales

Digitized by Google

d'un complexe ne dépendent que de quatre paramètres; ces couples sont donc assujettis à une condition. Or on sait que les couples de l'espace assujettis à une condition correspondent à une équation aux dérivées partielles; on conclut donc que tout complexe de droites dans l'espace équivaut à une équation aux dérivées partielles entre les coordonnées d'un espace soit ponctuel, soit planaire.

Il résulte de ce qui précède que les surfaces focales des congruences à couples focaux coïncidents du complexe sont les surfaces intégrales de cette équation aux dérivées partielles, tandis que les développables du complexe et leurs arêtes de rebroussement en sont les développables et les courbes intégrales.

Ces résultats sont bien connus; nous les citons simplement parce qu'ils nous seront utiles pour l'exposition des propriétés du second ordre.

36. On peut se proposer de chercher en coordonnées lignes les équations des développables, ou des congruences singulières (à couples focaux coïncidents) du complexe.

Supposons que l'on exprime en fonction de trois paramètres p, q, r les coordonnées des droites du complexe, la forme fondamentale deviendra

$$\mathrm{M}(du) = \mathrm{P}\,dp^2 + \mathrm{Q}\,dq^2 + \mathrm{R}\,dr^2 + 2\mathrm{P}'\,dq\,dr + 2\mathrm{Q}'\,dr\,dp + 2\mathrm{R}'\,dp\,dq.$$

On peut, dans ce cas, faire usage d'un espace représentatif (ponctuel ou planaire). Supposons, par exemple, que p, q, r soient les coordonnées d'un point rapporté à trois axes rectangulaires. Il y aura correspondance entre les points de l'espace et les droites du complexe, entre les directions issues d'un point et les corrélations qui appartiennent au complexe sur la droite correspondante. Il correspondra à une surface une congruence, à une courbe une surface réglée. Tout plan mené par un point représentera une congruence élémentaire (*un pinceau*) du complexe sur la droite représentée par ce point. Un cône ayant son sommet en un point p représentera, par ses génératrices, une série de corrélations anharmoniques du complexe, et par ses plans tangents une famille de pinceaux sur la droite que son sommet p représente.

Digitized by Google

Ainsi, les corrélations singulières du complexe sur une droite (p, q, r) seront représentées par un cône du second degré ayant son sommet au point (p, q, r), et dont l'équation s'écrit

$$P\,dp^2 + Q\,dq^2 + R\,dr^2 + \ldots = 0.$$

Lorsque le point représentatif appartient à la droite représentée, on reconnaît dans ce cône du second degré le cône découvert par Malus, pour les complexes définis par des points de départ.

Nous conserverons, dans le cas général, le nom de *cône de Malus* à ce cône du second ordre. On voit sans peine que, si l'on mène un plan par un point (p, q, r) qui coupe suivant deux génératrices le cône de Malus, ces deux génératrices représentent, par leurs directions, chacune une corrélation singulière du pinceau que le plan représente.

Pour que les couples focaux coïncident, il faut et il suffit par conséquent que ces deux génératrices coïncident, ou que le plan touche le cône de Malus. Ainsi :

Par ses plans tangents, le cône de Malus représente les pinceaux à couples focaux coïncidents du complexe.

En résumé, on voit, en se reportant à l'espace représentatif, que l'équation aux dérivées partielles entre p, q, r, qui provient de l'équation

$$P\,dp^2 + k\,dq^2 + R\,dr^2 + 2R'\,dq\,dr + \ldots = 0,$$

admet, pour intégrale générale, les surfaces représentatrices des congruences singulières du complexe, et pour courbes intégrales les courbes représentatrices des développables du complexe.

37. Cette interprétation du cône de Malus n'est peut-être pas dépourvue d'intérêt; mais voici une proposition générale qui découle immédiatement de la considération de la forme fondamentale et fait ressortir encore mieux son utilité.

Considérons deux droites

$$p + dp, \quad q + dq, \quad r + dr$$

et

$$p + \delta p, \quad q + \delta q, \quad r + \delta r,$$

Digitized by Google

infiniment voisins de la droite p, q, r. Elles définissent sur cette droite deux corrélations anharmoniques dont *l'involution s'exprime en écrivant que les directions représentatrices correspondantes sont conjuguées par rapport au cône de Malus.*

De même, deux pinceaux dont les couples focaux sont en relation harmonique, et que nous pouvons appeler *pinceaux en involution,* sont représentés par deux plans conjugués par rapport au cône de Malus.

Ainsi :

Pour qu'un pinceausoit en involution avec un pinceau fixe, c'est-à-dire pour que les couples d'un pinceau soient en relation harmonique avec deux couples fixes de la corrélation normale, il faut et il suffit que le plan représentatif du pinceau contienne une droite déterminée.

Proposons-nous dès lors le problème général suivant :

Sur chaque droite d'un complexe on détermine a priori *deux couples de la corrélation normale suivant une loi continue : trouver les congruences du complexe dont les couples focaux sont en relation harmonique avec ces deux couples.*

Puisque le plan représentatif du pinceau doit être assujetti seulement à passer par une droite fixe, on en conclut que le problème dépend d'une équation aux dérivées partielles du *premier ordre* et *linéaire* entre p, q, r, et, réciproquement, que toute équation aux dérivées partielles du *premier ordre* et *linéaire* entre p, q, r admet comme intégrales générales les surfaces représentatrices des congruences du complexe dont les couples focaux sont en relation harmonique avec deux couples de la corrélation normale connus *a priori*.

Un premier exemple est fourni par le problème d'Abel Transon.

Transon, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1861, et qui a été l'objet d'un Rapport de M. Chasles le 20 mai de la même année, se proposait de décomposer un complexe en congruences de normales à une même surface, c'est-à-dire en congruences dont les plans focaux fussent rectangulaires. Il trouva que la question dépendait d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire.

Il suffit de mener par chaque droite du complexe les plans isotropes

Digitized by Google

i et i' : il est clair que les couples (m, i), (m', i') appartenant à la corrélation normale sont bien déterminés sur chaque droite du complexe. Cela étant, les congruences dont il s'agit sont définies par la condition que leurs couples focaux soient en relation harmonique avec les couples définis *a priori* (m, i) et (m', i').

Ce problème est donc un cas particulier de celui qui précède.

Un second exemple est donné par la recherche des congruences qui ont pour couple focal un couple de la corrélation normale connu *a priori*. La droite enveloppe est alors une génératrice du cône de Malus.

On pourrait, dans la représentation des droites d'un complexe, faire usage d'un espace planaire; on arriverait ainsi à concevoir une conique remplaçant le cône de Malus. Mais nous n'insisterons pas davantage.

38. Quand deux complexes sur une droite commune définissent la même corrélation normale, on peut dire qu'ils sont *tangents* suivant cette droite. Parmi les complexes tangents, on peut distinguer les complexes linéaires tangents. Ces complexes sont définis par l'unique condition de contenir la congruence linéaire singulière formée par les droites qui appartiennent aux couples de la corrélation normale. Ils forment donc un faisceau. On peut remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyperboloïde soit de raccordement, ou qu'une congruence linéaire soit tangente, c'est qu'ils appartiennent à un complexe linéaire tangent.

39. Il nous reste, pour compléter ce que nous voulions dire sur les propriétés du premier ordre des complexes, à donner quelques propriétés des droites singulières que nous ne pouvions exposer qu'après ce qui précède.

Nous avons vu que, si (a, α) est un couple de la corrélation normale d'un complexe, la courbe enveloppe du complexe dans le plan α touche en a la droite du complexe considérée, et que le plan α touche tout du long de cette droite le cône du complexe dont a est le sommet. Nous avons vu également que le couple (a, α) appartenait à une surface focale d'une congruence singulière du complexe. Il y a lieu de voir ce que deviennent ces propriétés dans le cas des droites singulières.

Digitized by Google

Le théorème d'involution qui définit la corrélation normale prouve d'abord que :

Toutes les surfaces réglées du complexe qui ne sont pas développables, et qui passent par une droite singulière de ce complexe, ont un même couple de raccordement.

Mais si la droite singulière du complexe que l'on considère est aussi singulière dans la surface (ce qui aura toujours lieu si elle est développable), on voit que le théorème d'involution exige seulement que l'un des éléments du couple singulier de la corrélation normale singulière du complexe coïncide avec l'un des éléments du couple singulier de la corrélation singulière relative à la surface.

Comme, d'ailleurs, l'équation $K = o$ n'entraîne pas en général l'équation $I = o$, on voit que, en général, une surface réglée non développable du complexe touche en un nombre limité de points la surface de singularités.

En effet, toute surface réglée d'un complexe contient un nombre limité de droites singulières de ce complexe.

Si l'on envisage également une congruence appartenant au complexe et une droite A singulière dans le complexe et appartenant à la congruence, en désignant par (m, μ) le couple singulier de la corrélation normale singulière sur A, et (a, α), (b, β) les couples focaux sur A dans la congruence, il faut que ces couples appartiennent à la corrélation normale singulière. Supposons qu'ils ne coïncident pas, ce qui est permis, puisque, en général, l'équation $K = o$ n'entraîne pas $J = o$. Il faudra, par exemple, que m coïncide avec a, et μ avec β.

Autrement dit, le couple (m, μ) appartient à la surface focale, qui se trouve ainsi être tangente en m à la surface de singularités.

Ceci est applicable à toutes les droites de la surface formée dans la congruence proposée par les droites singulières du complexe; donc :

Une des nappes de la surface focale de toute congruence non singulière d'un complexe est circonscrite à la surface de singularités.

Ou encore :

La surface focale d'une congruence est une enveloppe des surfaces de singularités des complexes qui contiennent cette congruence.

Digitized by Google

40. Lorsque l'on envisage des développables d'un complexe et des droites singulières d'un complexe sur ces développables, on se trouve en présence d'un cas particulier que nous allons étudier de plus près.

D'abord, il est clair que, lorsqu'une droite d'un complexe est singulière à la fois dans ce complexe et dans une surface réglée formée des droites du complexe, il faut que le point central sur cette génératrice coïncide avec le point du couple singulier de la corrélation normale, ou que le plan tangent, tout au long de cette droite à la surface, coïncide avec le plan du même couple singulier.

Nous allons, d'ailleurs, établir ce résultat par l'analyse.

En prenant une droite d'un complexe pour axe Oz, zOx étant le plan central et O le point central de la corrélation normale, on peut écrire son équation

$$(1) \qquad p = kb + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{Q}q^2 + 2\mathrm{A}'bq + 2\mathrm{B}'qa + 2\mathrm{Q}'ab + \ldots,$$

et la corrélation normale a pour équation

$$\zeta \cot\theta = \mathrm{K}.$$

Si la droite considérée est singulière, K est nul, et le couple singulier de la corrélation normale est formé du point O et du plan zOy. L'équation du complexe est alors

$$(2) \qquad p = \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{Q}q^2 + 2\mathrm{A}'bq + 2\mathrm{B}'qa + 2\mathrm{Q}'ab + \ldots.$$

Une surface réglée représentée par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} a = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \ldots, \\ b = b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 + \ldots, \\ p = p_1\lambda + p_2\lambda^2 + p_3\lambda^3 + \ldots, \\ q = q_1\lambda + q_2\lambda^2 + q_3\lambda^3 + \ldots \end{cases}$$

appartient au complexe sous les conditions suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = \mathrm{A}a_1^2 + \mathrm{B}b_1^2 + \mathrm{Q}q_1^2 + 2\mathrm{A}'b_1q_1 + 2\mathrm{B}'q_1a_1 + 2\mathrm{Q}'a_1b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Elle est développable si l'on a

$$\frac{da}{d\lambda}\frac{dq}{d\lambda} - \frac{db}{d\lambda}\frac{dp}{d\lambda} = 0,$$

Digitized by Google

quel que soit λ; on trouve ainsi, en ayant égard à la condition $p_1 = 0$,

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1 q_1 = 0, \\ a_1 q_2 + a_2 p_1 - b_1 p_2 = 0, \\ 2(a_2 q_2 - b_2 p_2) + 3(a_1 q_3 + a_3 q_1 - b_3 p_3) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les rapports $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{a}$ déterminent, par leurs limites t et ζ, la position du plan tangent suivant Oz, et celle du point central sur cette droite.

Mais l'équation $a_1 q_1 = 0$ se décompose en deux : l'une, $a_1 = 0$, conduit aux valeurs

$$t = 0, \quad \zeta = \frac{p_2}{a_2};$$

l'autre, $q_1 = 0$, donne

$$t = \frac{p_2}{q_2}, \quad \zeta = 0.$$

Cela fait bien voir l'exactitude de la proposition que nous avions déduite des principes exposés ci-dessus.

Mais nous allons tirer de ces calculs d'autres conséquences.

Cherchons l'enveloppe des droites du complexe dans le plan zOy, on a

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad \dots, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad \dots;$$

les équations (5) sont satisfaites, mais la seconde des équations (4) devient

$$(6)\qquad 0 = \mathrm{B} b_1^2 + \mathrm{Q} q_1^2 + 2\mathrm{A}' b_1 q_1;$$

or la limite de $\frac{q}{b}$ définit le point de contact de Oz avec l'enveloppe : cette limite est $\frac{q_1}{b_1}$, et, comme l'équation (6) fournit deux racines pour ce rapport, on en conclut que :

Toute droite singulière est tangente double de la courbe enveloppe du complexe relative au plan du couple singulier.

Cherchons de même le plan tangent suivant Oz au cône du complexe dont l'origine est le sommet : une marche analogue, consistant à poser

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad \dots, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0, \quad \dots,$$

Digitized by Google

conduirait à l'équation

$$0 = A a_1^2 + B b_1^2 + 2 Q' a_1 b_1,$$

qui donne deux valeurs pour $\frac{b_1}{a_1}$, limite du rapport $\frac{b}{a}$, qui définit le plan tangent. Il y a donc deux plans tangents au cône suivant Oz; donc :

Toute droite singulière d'un complexe est génératrice double du cône de ce complexe dont le sommet est au point du couple correspondant.

La surface de singularités d'un complexe s'offre ainsi :

1° Comme l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe enveloppe du complexe a une tangente double;

2° Comme lieu des points pour lesquels le cône du complexe a une génératrice double.

IV. — Sur les singularités supérieures des systèmes de droites.

41. Les systèmes de lignes droites offrent des singularités d'un tout autre ordre que celles qui ont été étudiées plus haut.

Prenons, par exemple, le cas d'un complexe, et supposons que, pour une droite (u) du complexe, on ait $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $U_4 = 0$. Le déterminant K sera nul et la droite (u) s'offrira comme singulière.

Plus généralement, considérons le cas où, pour une droite (u) du complexe, toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à p du premier membre de son équation sont nulles et où l'une au moins des dérivées partielles de l'ordre p n'est pas nulle.

En différentiant p fois l'équation

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

les différentielles d'ordre supérieur au premier disparaîtront, en vertu des hypothèses, et il restera

$$d^p f = F_p(du) = 0,$$

où $F_p(du)$ est une fonction homogène de degré p des différentielles.

Digitized by Google

Cette dernière équation exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $(u + du)$ appartienne au complexe. Ainsi :

Dans le cas qui nous occupe, les corrélations anharmoniques qui appartiennent au complexe forment sur la droite (u) un réseau de l'ordre p.

La série focale de ce réseau est de l'ordre $2p$, et la corrélation focale est de degré et de classe p.

On en conclut tout de suite que, dans le cas qui nous occupe :

1° La droite (u) est tangente multiple d'ordre p de toutes les courbes enveloppes du complexe relatives à des plans passant par cette droite ;

2° La droite (u) est arête multiple d'ordre p de tout cône du complexe qui a sur elle son sommet.

On peut dire d'une telle droite qu'elle est multiple d'ordre p dans le complexe.

Ainsi, outre les droites singulières, c'est-à-dire à corrélation normale singulière, qui sont chacune tangente double d'une courbe du complexe, et arête double d'un cône du complexe, il peut y avoir d'autres droites qui soient tangentes doubles pour *toutes* les courbes du complexe qu'elles touchent, génératrices doubles pour *tous* les cônes du complexe qui ont sur elles leurs sommets.

Il est clair d'ailleurs que ces singularités ne se présenteront pas en général, car il n'arrivera pas toujours que les équations

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_4} = 0$$

soient compatibles.

42. Considérons actuellement une congruence représentée par les deux équations

$$f(u) = 0, \quad \varphi(u) = 0,$$

et, en adoptant les notations précédentes, supposons que tous les déterminants à quatre éléments tirés du Tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

et que nous avons désignés par $\Delta_{\alpha,\beta}$, soient nuls. Si la droite (u) n'est multiple sur aucun des complexes $f = 0$ ou $\varphi = 0$, l'hypothèse introduite revient à dire que ces complexes sont tangents suivant la droite (u), c'est-à-dire définissent sur elle la même corrélation normale.

Les deux équations

$$\Sigma U_i du_i = 0,$$
$$\Sigma V_i du_i = 0$$

se réduisent alors à une seule, que nous représenterons par

$$\Sigma P_i du_i = 0. \tag{1}$$

On peut, en effet, dans ce cas, déterminer les constantes λ et μ, de sorte que l'expression

$$\Sigma(\lambda U_i + \mu V_i) du_i$$

soit identiquement nulle.

En posant

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \quad V_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j},$$

et différentiant deux fois l'expression

$$\lambda f + \mu \varphi,$$

les différentielles d'ordre supérieur au second disparaissent, et il reste

$$\Sigma(\lambda U_{ij} + \mu V_{ij}) du_i du_j = 0. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) définissent la série des corrélations sur la droite (u) qui appartiennent à la congruence : *cette série est quadratique.*

On peut dire que la droite (u) est une droite double de la congruence.

La série quadratique que nous venons de définir renferme quatre corrélations singulières. On en conclut cette propriété des droites doubles d'une congruence :

Dans toute congruence ayant une droite double, il existe QUATRE *droites infiniment voisines de cette droite et la rencontrant.*

Il est clair que, si l'on supposait tous les U_i nuls, les raisonnements précédents subsisteraient. Il suffirait de faire $\mu = 0$. Dans ce cas, la droite serait double dans le premier complexe et simple dans le second.

En résumé :

Digitized by Google

On n'obtiendra de congruence à droite double qu'en prenant l'intersection de deux complexes linéaires tangents, ou de deux complexes dans lesquels une droite commune est double pour l'un d'eux.

43. La série quadratique, définie par les équations (1) et (2), peut d'ailleurs se décomposer en deux séries linéaires *distinctes* ou *confondues*.

En posant

$$\text{(3)} \qquad R(du) = \Sigma R_{ij} du_i du_j = \Sigma(\lambda U_{ij} + \mu V_{ij}) du_i du_j,$$

la condition, pour que la série se décompose en deux séries linéaires, est la suivante :

$$\text{(4)} \qquad \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & P_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & P_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & P_3 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & P_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut faire voir que cette hypothèse correspond au cas où les deux complexes qui donnent la congruence sont *tangents suivant deux droites successives*, en supposant, toutefois, que la droite (u), que l'on considère, ne soit droite double pour aucun des deux.

L'équation (4) exprime, en effet, la condition nécessaire et suffisante pour que, si l'on tire de (1) la valeur d'une différentielle (de du_4, par exemple), la forme $R(du)$ devienne, par substitution de cette valeur, une forme ternaire à déterminant nul. Or, si l'on a pris les équations des deux complexes sous la forme

$$u_4 = f(u_1, u_2, u_3),$$
$$u_4 = \varphi(u_1, u_2, u_3),$$

et que l'on pose

$$l_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad l_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad l_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3},$$
$$\lambda_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial u_4},$$

ainsi que

$$d^2 f = l_1 d^2 u_1 + l_2 d^2 u_2 + l_3 d^2 u_3 + F(du),$$
$$d^2 \varphi = \lambda_1 d^2 u_1 + \lambda_2 d^2 u_2 + \lambda_3 d^2 u_3 + \Phi(du),$$

Digitized by Google

où $F(du)$ et $\Phi(du)$ sont deux formes quadratiques ternaires, il est clair que $F(du) - \Phi(du) = H(du)$ est ce que devient la forme quaternaire $R(du)$, quand on y remplace du_4 par sa valeur tirée de (1). Cela posé :

Les équations

$$l_1 = \lambda_1, \quad l_2 = \lambda_2, \quad l_3 = \lambda_3$$

expriment le contact des deux complexes suivant la droite (u) Les équations

$$dl_1 = d\lambda_1, \quad dl_2 = d\lambda_2, \quad dl_3 = d\lambda_3$$

expriment que le contact a lieu, en outre, suivant la droite $(u + du)$.

Mais, si l'on remarque que

$$dl_i = \frac{1}{2}\frac{\partial F(du)}{\partial du_i}, \quad d\lambda_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi(du)}{\partial du_i},$$

on voit que ces dernières équations s'écrivent

$$\frac{\partial H(du)}{\partial du_1} = 0, \quad \frac{\partial H(du)}{\partial du_2} = 0, \quad \frac{\partial H(du)}{\partial du_3} = 0.$$

Elles expriment la condition nécessaire et suffisante pour que la forme ternaire $H(du)$ ait son déterminant nul.

La proposition est donc démontrée.

L'introduction de nouvelles hypothèses, concernant les dérivées partielles d'ordre supérieur des équations $f = 0$ et $\varphi = 0$, permettrait de concevoir et d'étudier les droites multiples d'ordre p d'une congruence, caractérisées par la propriété générale que :

Dans toute congruence ayant une droite multiple d'ordre p, il existe, en général, 2p droites infiniment voisines de la droite multiple et la rencontrant.

44. Les singularités des surfaces réglées s'étudient par les mêmes méthodes. Soient $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ les équations d'une surface réglée.

Digitized by Google

Posons encore

$$U_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \qquad V_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \qquad W_i = \frac{\partial \psi}{\partial u_i},$$

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \quad V_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \quad W_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j},$$

$$U\,(du) = \Sigma U_{ij}\, du_i du_j,$$
$$V\,(du) = \Sigma V_{ij}\, du_i du_j,$$
$$W(du) = \Sigma W_{ij} du_i du_j.$$

Formons le tableau

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \end{vmatrix}.$$

Si l'on suppose nuls tous les déterminants à neuf termes contenus dans ce tableau, cela signifie qu'on peut trouver des constantes λ, μ, ν qui soient telles que les quantités

$$R_i = \lambda U_i + \mu V_i + \nu W_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

soient toutes nulles.

Ce qui signifie, en général, que les couples focaux d'une quelconque des congruences $(f = 0, \varphi = 0)$, $(\varphi = 0, \psi = 0)$, $(\psi = 0, f = 0)$ appartiennent aux complexes $\psi = 0$, $f = 0$, $\varphi = 0$, ou que chacun de ces complexes est tangent à celle des trois congruences qu'il ne contient pas; à moins toutefois que la droite (u) ne soit multiple dans l'une des congruences ou même dans l'un des complexes. D'ailleurs, tout ce que nous allons dire est applicable à ce cas, en admettant que une ou deux des quantités λ, μ, ν aient des valeurs nulles. Mais nous supposons essentiellement qu'il n'y ait pas plus d'un système de valeurs de λ, μ, ν satisfaisant aux conditions énoncées, de sorte que les équations

$$\Sigma U_i du_i = 0, \quad \Sigma V_i du_i = 0, \quad \Sigma W_i du_i = 0 \tag{1}$$

se réduisent toujours à *deux* équations distinctes

$$\Sigma P_i du_i = 0, \quad \Sigma Q_i du_i = 0. \tag{1'}$$

Nous remarquons que, si toutes les quantités R_i sont nulles, le déter-

Digitized by Google

minant que nous avions désigné par I est nul ; la droite (u) s'offre comme singulière sur la surface ; mais, si nous remarquons que, en différentiant deux fois

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu = 0,$$

on trouve

$$\Sigma R_i d^2 u_i + R(du) = 0,$$

où l'on a posé

$$R(du) = \Sigma R_{ij} du_i du_j$$

et

$$R_{ij} = \lambda U_{ij} + \mu V_{ij} + \nu W_{ij},$$

comme $R_i = 0$, il reste

$$R(du) = 0. \tag{2}$$

Les équations (1') et (2) définissent deux corrélations anharmoniques sur la droite (u), ce qui prouve qu'il y a deux manières de déplacer une droite en s'écartant de la droite (u) pour décrire la surface.

La droite (u) est une droite double de la surface.

En chaque point de cette droite double la surface a deux plans tangents, et les deux corrélations trouvées donnent ces deux plans. Inversement : tout plan mené par la droite touche la surface en deux points de cette droite, et ces deux points sont donnés par les deux corrélations.

45. On peut introduire l'hypothèse que ces deux corrélations coïncident et concevoir ainsi une singularité analogue au rebroussement des courbes.

On exprimera cette hypothèse en écrivant que, si des équations (1'), on tire les valeurs de deux différentielles (du_4 et du_3 par exemple), la forme binaire $R(du)$, qui résulte de la substitution, est un carré parfait, c'est-à-dire a un discriminant nul. C'est ce qu'exprime le contrevariant double

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & P_1 & Q_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & P_2 & Q_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & P_3 & Q_3 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & P_4 & Q_4 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

Il nous importe de reconnaître à quel fait dans la situation respective des complexes $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ correspond cette hypothèse. Nous allons faire voir que dans ce cas :

Un quelconque des trois complexes est tangent suivant deux droites consécutives à la congruence qu'il ne contient pas.

Prenons en effet les équations

$$\lambda'(U_i+\delta U_i)+\mu'(V_i+\delta V_i)+\nu'(W_i+\delta W_i)=0,$$

où λ', μ', ν' sont des constantes et qui expriment le contact suivant la droite $(u+\delta u)$; comme on a

$$\lambda U_i+\mu V_i+\nu W_i=0,$$

il en résulte

$$\varepsilon' U_i+\varepsilon'' V_i+\varepsilon''' W_i+\lambda\,\delta U_i+\mu\,\delta V_i+\nu\,\delta W_i=0, \tag{3}$$

où l'on a désigné par ε', ε'', ε''' les différences $\lambda'-\lambda$, $\mu'-\mu$, $\nu'-\nu$.

Or on remarque que

$$\lambda\,\delta U_i+\mu\,\delta V_i+\nu\,\delta W_i=\frac{1}{2}\frac{\partial R(\delta u)}{\partial\,\delta u_i};$$

les équations comprises dans le type (3) s'écrivent donc

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R(\delta u)}{\partial\,\delta u_i}+\varepsilon' U_i+\varepsilon'' V_i+\varepsilon''' W_i=0;$$

mais l'on sait qu'à cause de l'équation $R_i=0$, $\varepsilon' U_i+\varepsilon'' V_i+\varepsilon''' W_i$ est égal à une fonction linéaire de P_i et de Q_i ; on a donc

$$\frac{\partial R(\delta u)}{\partial\,\delta u_i}+\alpha P_i+\beta Q_i=0, \tag{3'}$$

où α et β sont deux constantes. Mais on doit avoir aussi

$$\Sigma P_i\,\delta u_i=0,\quad \Sigma Q_i\,\delta u_i=0 \tag{4}$$

et

$$R(\delta u)=0. \tag{5}$$

On voit que l'équation (5) est une conséquence des équations (3') et (4). Pour qu'il y ait contact suivant la droite $(u+\delta u)$, il est donc

Digitized by Google

nécessaire et suffisant que les équations (3′) et (4) aient un système de solutions communes, c'est-à-dire que le discriminant doublement bordé avec les P_i et les Q_i soit nul.

Les droites multiples d'ordre p d'une surface réglée s'obtiendraient d'une manière analogue à celle qui nous a fourni les droites doubles; il suffirait de faire porter les hypothèses sur les dérivées d'ordre supérieur.

46. Avant de terminer ce qui a trait aux singularités, nous pouvons faire observer : 1° qu'un complexe peut avoir une congruence ou une surface de droites multiples; 2° qu'une congruence peut avoir une surface de droites multiples.

Si l'on suppose, par exemple, qu'il s'agisse de droites doubles, on peut démontrer les propositions suivantes :

1° Dans le cas d'un complexe ayant une congruence de droites doubles, le réseau quadratique relatif à chacune des droites doubles se décompose en deux réseaux linéaires, et les couples communs aux deux corrélations focales de ces réseaux sont les couples focaux de la congruence des droites doubles.

2° Dans le cas d'un complexe ayant une surface de droites doubles, le réseau quadratique relatif à chacune des droites doubles est singulier, c'est-à-dire que son discriminant est nul. Dans l'espace non euclidien représentatif, il lui correspond une quadrique infiniment aplatie dont le plan représente une corrélation. Cette corrélation est la corrélation de Chasles pour la surface de droites doubles.

3° Enfin, dans le cas d'une congruence ayant une surface de droites doubles, la série quadratique se décompose en deux séries linéaires ayant une corrélation anharmonique commune; cette corrélation est la corrélation de Chasles, relative à la surface des droites doubles.

Ce que nous venons de dire sur les singularités nous suffira pour le but que nous nous proposons.

V. — Sur les systèmes de coordonnées des lignes droites.

47. Dès le début de ce travail, nous nous sommes placé à un point de vue général en ce qui concerne les coordonnées des lignes droites. Il est aisé de concevoir que, par un choix convenable de ces coordon-

Digitized by Google

nées, on puisse faire prendre aux résultats généraux que nous avons trouvés des formes diverses.

Ainsi, par exemple, si l'on considère la corrélation anharmonique qui, sur une droite Oz, a pour équation

$$z - \zeta = K \operatorname{tang}(\theta - \alpha),$$

on voit que (ζ, α) sont les coordonnées du point central et du plan central de la corrélation. Si l'on cherche la condition d'involution avec la corrélation

$$z' = A \operatorname{tang}\theta',$$

on trouve la relation, remarquable par sa simplicité,

$$A + K + \zeta \operatorname{tang}\alpha = 0.$$

Appliquée aux propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes, cette formule en est la traduction métrique.

Elle fait connaître le paramètre de distribution des corrélations du complexe quand on connaît leur point central et leur plan central.

48. Également pour les congruences.

Veut-on trouver pour expression des propriétés infinitésimales du premier ordre des congruences la relation angulaire de Sturm : il suffit de prendre a, b, p, q pour coordonnées de la ligne droite.

On peut supposer que Oz est une droite du système. Par un point $A(dx, dy, z)$ infiniment voisin de Oz, il passe une droite $[A]$ infiniment voisine de Oz. Soient da, db, dp, dq les coordonnées de cette droite; on a

$$dx = z\,da + dp,$$
$$dy = z\,db + dq.$$

Les équations de la congruence donnent du reste, en général,

$$dp = p_1\,da + p_2\,db, \quad dq = q_1\,da + q_2\,db,$$

d'où l'on déduit, pour l'expression du moment de la droite $[A]$ par rapport à Oz,

$$da\,dq - db\,dp = \frac{q_1\,dx^2 + (q_2 - p_1)\,dx\,dy - p_2\,dy^2}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1 q_2 - p_2 q_1}.$$

Digitized by Google

Cette expression de la forme fondamentale conduit immédiatement au théorème de Sturm. Appelons ε l'angle de la droite [A] avec le plan zOA, et posons

$$dx = \rho\cos\varphi, \quad dy = \rho\sin\varphi,$$

où ρ désigne la distance du point A à la droite Oz; on a

$$\sin\varepsilon \text{ ou } \varepsilon = \frac{da\,dq - db\,dp}{\rho},$$

donc

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{da\,dq - db\,dp}{\rho^2} = \frac{q_1\cos^2\varphi + (q_2 - p_1)\cos\varphi\sin\varphi - p_2\sin^2\varphi}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Un second point A′, pris dans le plan mené par A perpendiculairement à Oz, donne l'équation analogue (où ε', ρ', φ' désignent les quantités analogues à ε, ρ, φ),

$$\frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{q_1\cos^2\varphi' + (q_2 - p_1)\cos\varphi'\sin\varphi' - p_2\sin^2\varphi'}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1},$$

et en ajoutant

$$\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{q_1(\cos^2\varphi + \cos^2\varphi') + (q_2 - p_1)(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi'\sin\varphi') - p_2(\sin^2\varphi + \sin^2\varphi')}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Désignons par P le point où Oz est rencontrée par le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient les points A et A′. Si les droites PA, PA′ sont rectangulaires, il est clair que

$$\varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2};$$

la formule précédente devient

$$(f) \qquad \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{q_1 - p_2}{z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1q_2 - p_2q_1}.$$

Si dans cette dernière relation on suppose z constant, on obtient une proposition un peu plus générale que celle de Sturm, et exprimée par l'équation

$$\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \text{const.}$$

Digitized by Google

Il est aisé de voir que les racines de l'équation

$$z^2 + (p_1 + q_2)z + p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$$

sont les coordonnées z_1 et z_2 des foyers; de sorte que, si l'on désigne par F_1 et F_2 ces foyers, le dénominateur de l'expression de la constante est le produit $PF_1 PF_2$.

M. Kummer a introduit la quantité

$$\frac{1}{PF_1 PF_2}$$

dans la théorie des congruences, sous le nom de *mesure de la densité*. Si l'on désigne par Θ cette mesure, on a pour expression de la constante de Sturm

$$(q_1 - p_2)\Theta.$$

Voici donc le théorème de Sturm généralisé, tel qu'il résulte de la formule (f).

En un point P *d'une droite* Δ *d'un pinceau* (*congruence élémentaire*), *on élève deux perpendiculaires* PA, PA′ *à cette droite rectangulaires entre elles, on s'écarte sur ces perpendiculaires à partir du point* P *de quantités* $PA = \rho$, $PA' = \rho'$, *et l'on désigne par* ε *et* ε' *les angles infiniment petits que font respectivement avec les plans* $A\Delta$, $A'\Delta$ *les droites du système qui passent par les points* A *et* A′.

1° *La somme des rapports* $\frac{\varepsilon}{\rho}$, $\frac{\varepsilon'}{\rho'}$ *est constante quand, le point* P *restant fixe, les droites* PA *et* PA′ *restent rectangulaires entre elles et avec* Δ.

2° *Lorsque le point* P *se meut sur la droite* Δ, *la valeur de la constante reste toujours proportionnelle à la mesure de la densité au point* P.

L'équation

$$\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = (q_1 - p_2)\Theta,$$

qui exprime le théorème précédent, permet encore de faire voir le lien qui rattache la proposition de Sturm à une proposition de M. Bertrand, concernant les congruences formées des normales à une même surface.

En effet, il est presque évident que les angles α_1 et α_2 que font avec

Digitized by Google

le plan zOx les plans focaux du pinceau sont donnés par l'équation

$$q_1 \cos^2\varphi + (q_2 - p_1)\cos\varphi \sin\varphi - p_2 \sin^2\varphi = 0.$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 = -1$, c'est-à-dire pour que les plans focaux soient rectangulaires, est la suivante :

$$q_1 - p_2 = 0.$$

Elle exprime que la constante de Sturm est toujours nulle.

Mais, pour qu'une congruence soit formée des normales à une même surface, il faut et il suffit que les couples focaux soient rectangulaires pour toute droite du système; donc enfin :

Pour qu'une congruence soit formée de normales à une même surface, il faut et il suffit que la constante de Sturm soit nulle pour toutes les droites du système, pourvu qu'on ne suppose pas qu'un des foyers soit constamment à l'infini.

C'est, sous une autre forme, la proposition de M. Bertrand.

VI. — Représentation linéaire des surfaces.

49. C'est encore par une considération analogue, c'est-à-dire par l'étude d'une congruence à l'aide d'un système particulier de coordonnées, qu'on peut rattacher aux théories précédentes la transformation célèbre d'Ampère.

Dans le cours professé à la Sorbonne durant l'hiver 1881-1882, M. Darboux a fait voir que la transformation d'Ampère conduisait, pour les surfaces transformées, à une équation des lignes asymptotiques privées du terme en $dx\,dy$.

Sur ses indications bienveillantes, nous avons cherché si les principes que nous venons d'exposer ne contenaient pas la raison générale de ce fait. Rien de plus aisé, tout d'abord, que de reconnaître que la transformation de contact trouvée par Ampère établit une correspondance entre les couples (a, α) d'une surface, et ceux d'une droite I située à l'infini, dans l'un des plans zOx ou zOy, selon que l'on prend

Digitized by Google

p ou q pour variable indépendante. D'ailleurs, cette correspondance s'établit géométriquement ainsi qu'il suit; et pour généraliser tout de suite nous traiterons I comme une droite à distance finie.

Au point a de la surface, menons le plan tangent α; ce plan coupe au point p la droite I; par la droite I et le point a, on mène un plan ϖ; d'après nos notations, (p, ϖ) est un couple de la droite I : c'est celui qui correspond au couple (a, α) de la surface.

La droite pa engendre donc une congruence dans laquelle une des nappes de la surface focale se réduit à la droite I. Les deux séries de développables de la surface sont ici : 1° les cônes circonscrits à la surface suivant des courbes S et dont les sommets sont sur I; 2° les tangentes aux sections planes R faites par des plans passant par la même droite I.

D'après la théorie générale, et comme cela est presque évident ici, les courbes R et S forment sur la surface que l'on considère deux réseaux conjugués.

Nous avons donc là un moyen de tracer sur une surface quelconque, et sans intégration, deux réseaux conjugués.

Supposons que ζ et λ soient deux paramètres qui fixent, le premier, la position du point p sur la droite I, le second, celle du plan ϖ autour de la même droite. Si l'on prend pour variables indépendantes ζ et λ, et qu'on exprime les coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction de ces paramètres, les courbes S et R auront respectivement pour équations

$$\zeta = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Or l'équation des lignes asymptotiques sera alors la suivante :

$$A d\zeta^2 + 2B d\zeta d\lambda + C d\lambda^2 = 0;$$

les directions $(d\zeta, d\lambda)$, $(\delta\zeta, \delta\lambda)$ sont conjuguées si l'équation suivante est vérifiée,

$$(A d\zeta + B d\lambda) d\zeta + (B d\zeta + C d\lambda) \delta\lambda = 0.$$

Nous devons exprimer que $d\zeta = 0$, $\delta\lambda = 0$ sont deux directions conjuguées, ce qui donne

$$B = 0.$$

Digitized by Google

Donc, l'équation des lignes asymptotiques est ici

$$A d\zeta^2 + C d\lambda^2 = 0.$$

On voit bien qu'elle ne contient pas le rectangle.

50. Ces considérations nous ont conduit à un choix particulier de variables indépendantes dans les surfaces dont l'emploi ne serait peut-être pas sans utilité. Supposons que I ait été pris pour axe Oz; une droite quelconque du complexe spécial dont I est l'axe a pour équation

$$y = \lambda x, \quad z = \zeta - \mu x. \tag{1}$$

Si l'on envisage la congruence des droites de ce complexe tangentes à une surface, les coordonnées ζ, λ, μ de ces droites sont liées par une équation

$$F(\zeta, \lambda, \mu) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme définit une congruence de ce complexe spécial, et, tant que μ entre dans l'équation, on a une surface focale effective qui se trouve ainsi représentée par cette équation.

On peut l'écrire

$$\mu = f(\zeta, \lambda). \tag{2}$$

Il est aisé de trouver l'expression des coordonnées du couple (a, α) qui correspond sur la surface représentée par l'équation (2) au couple (ζ, λ) de la droite Oz. Faisons d'abord λ constant, en adjoignant aux équations (1) la suivante

$$d\zeta - x d\mu = 0; \tag{3}$$

on a le point où la droite (1) touche la surface.

Posons

$$\frac{\partial \mu}{\partial \zeta} = P, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = Q;$$

on a, puisque ici $d\lambda = 0$,

$$d\mu = P d\zeta.$$

Le point a a donc pour coordonnées

$$x = \frac{1}{P}, \quad y = \frac{\lambda}{P}, \quad z = \zeta - \frac{\mu}{P}. \tag{a}$$

Digitized by Google

Le plan α est tangent au cône circonscrit dont (o, o, ζ) sont les coordonnées du sommet : en prenant, avec Monge, pour coordonnées de ce plan, p, q, u, auquel cas il a pour équation

$$z = px + qy + u,$$

on trouve

$$(\alpha) \qquad p = -\mu + \lambda Q, \quad q = -Q, \quad u = \zeta.$$

Le couple $(a\alpha)$ est ainsi complètement défini.

51. Formons l'expression

$$\delta p\, dx + \delta q\, dy;$$

des réductions conduisent à l'expression simple

$$\frac{1}{P}(dP\,\delta\zeta - d\lambda\,\delta Q).$$

Nous poserons

$$R = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta^2}, \quad S = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \zeta\, \partial \lambda}, \quad T = \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda^2};$$

on a

$$dP = R\,d\zeta + S\,d\lambda, \quad \delta Q = S\,\delta\zeta + T\,\delta\lambda;$$

il vient donc

$$\delta p\, dx + \delta q\, dy = \frac{1}{P}(R\,d\zeta\,\delta\zeta - T\,d\lambda\,\delta\lambda).$$

L'équation des lignes asymptotiques est donc simplement

$$R\,d\zeta^2 - T\,d\lambda^2 = o.$$

Cette forme permet, dans une infinité de cas, d'intégrer complètement l'équation des lignes asymptotiques, ou de la ramener aux quadratures.

52. Supposons, par exemple, qu'on prenne les surfaces

$$z = A x^\alpha y^\beta$$

où A, α, β sont des constantes quelconques. On trouve que l'équation correspondante entre λ, μ, ζ a la forme

$$\mu = A' \zeta^p \lambda^q.$$

L'équation des lignes asymptotiques est

$$p(p-1)\left(\frac{d\zeta}{\zeta}\right)^2 = q(q-1)\left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^2,$$

Digitized by Google

qui a pour intégrale

$$\zeta^{\pm\sqrt{p(p-1)}}\lambda^{\pm\sqrt{q(q-1)}} = \text{const.}$$

La condition de réalité des lignes asymptotiques est la suivante

$$pq(p-1)(q-1) > 0,$$

ou, comme A, α, β, A', p, q sont liés par les équations

$$A'pA^{p-1} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}, \quad \alpha(p-1) = q-1, \quad \beta(p-1)+q = 0,$$

on en déduit, pour la condition de réalité,

$$\alpha\beta(\alpha+\beta-1) > 0.$$

On constate ainsi, par exemple, que les lignes asymptotiques des surfaces

$$x^l y^m z^n = k,$$

où l, m, n sont des nombres entiers positifs, ne sont jamais réelles.

53. L'application de la même représentation aux surfaces de révolution conduit à ce résultat que la recherche des lignes asymptotiques d'une surface de révolution se ramène toujours aux quadratures.

Voici comment : supposons que Oz soit l'axe de révolution, et que l'équation qui exprime que la droite

$$z = \zeta + x\tan\theta$$

du plan des zOx touche la méridienne soit

$$f(\zeta, -\tan\theta) = 0,$$

l'angle θ que fait avec Oz la droite

$$y = \lambda x, \quad z = \zeta - \mu x$$

ayant pour tangente $\frac{-\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

L'équation qui répond à la surface de révolution est la suivante

$$f\left(\zeta, \frac{\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) = 0,$$

Digitized by Google

ou, en posant

$$\mu = \rho\sqrt{1+\lambda^2},$$

on a

$$f(\zeta, \rho) = 0:$$

du reste,

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial\zeta^2} = \rho''\sqrt{1+\lambda^2}, \quad \frac{\partial^2\mu}{\partial\lambda^2} = \frac{\rho}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}};$$

on a posé

$$\frac{d^2\rho}{d\zeta^2} = \rho''.$$

L'équation des lignes asymptotiques est ainsi

$$\pm\sqrt{\frac{\rho''}{\rho}}\,d\zeta = \frac{d\lambda}{1+\lambda^2},$$

ou

$$\text{arc tang}\,\lambda = \pm\int\sqrt{\frac{\rho''}{\rho}}\,d\zeta.$$

Comme ρ est une fonction de ζ définie par l'équation $f(\zeta, \rho) = 0$, le problème est bien ramené aux quadratures.

Ce résultat est, du reste, bien connu; mais il est peut-être curieux qu'on puisse le déduire d'une transformation analogue à celle d'Ampère.

On voit que, lorsque la méridienne est algébrique, l'équation s'intégrera généralement par les fonctions abéliennes.

Le cas le plus étendu où le problème général des lignes asymptotiques se ramène immédiatement aux quadratures est celui où R et T sont de la forme

$$\varphi(\zeta, \lambda)\,g_1(\zeta)\,g_2(\lambda),$$
$$\varphi(\zeta, \lambda)\,h_1(\zeta)\,h_2(\lambda);$$

car, dans ce cas, les variables se séparent.

54. Lorsqu'on envisage une corrélation supérieure sur la droite Oz, il lui correspond sur la surface une courbe.

Par exemple, à une corrélation anharmonique quelconque il correspond une courbe telle que, si par quatre quelconque de ses points on mène des plans contenant Oz, et les plans tangents à la surface en ces

Digitized by Google

points, le rapport anharmonique des quatre premiers plans est égal à celui des points suivant lesquels Oz est rencontré par les plans tangents à la surface.

Si la surface est réglée, il est clair que chaque génération rectiligne sera représentée par une corrélation anharmonique.

Supposons, s'il est possible, qu'une ligne asymptotique soit représentée par une corrélation anharmonique.

Cette courbe jouira de la propriété suivante :

Si par quatre quelconque de ses points on mène quatre plans contenant la droite Oz *et les plans osculateurs en ces points, le rapport anharmonique des quatre premiers plans égale celui des points suivant lesquels* Oz *est rencontré par les plans osculateurs.*

Nous sommes ainsi conduit à définir une classe curieuse de courbes, dont nous allons chercher l'équation différentielle. Nous dirons, pour abréger, que la droite Oz est l'axe anharmonique d'une telle courbe.

Prenons pour variable indépendante une quantité quelconque t; en désignant par x', x'', ... les dérivées des coordonnées, le plan osculateur a pour équation

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Appelons z_0 le z du point où il coupe l'axe anharmonique Oz; on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Mais on a, α, β, γ, δ désignant des constantes,

$$z_0 = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y};$$

de là l'équation différentielle des courbes ayant Oz pour axe anharmonique

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} - \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

Nous allons, pour intégrer cette équation, effectuer une transformation qui revient à prendre pour axe anharmonique la droite de l'infini du plan $z = 0$.

Posons

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{z}{x}, \quad z_1 = \frac{y}{x}$$

et regardons x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées rectilignes ordinaires. A la droite $x = 0$, $y = 0$ correspond la droite de l'infini du plan $z_1 = 0$.

Cherchons l'équation différentielle des courbes admettant la droite à l'infini du plan $z_1 = 0$ pour axe anharmonique. Prenons z_1 pour variable indépendante. La valeur de z_1 définit un plan parallèle au plan $z_1 = 0$, et, par conséquent, passant par l'axe anharmonique. La trace du plan osculateur

$$-y_1''(X_1 - x_1) + x_1''(Y_1 + y_1) + \ldots = 0,$$

sur la droite à l'infini du plan $z_1 = 0$, est donnée par la valeur du rapport $\frac{y_1''}{x_1''}$. On a donc, a, b, p, q étant des constantes,

$$\frac{ax_1'' + by_1''}{px_1'' + qy_1''} = z_1;$$

c'est l'équation différentielle cherchée. En posant

$$ax_1 + by_1 = z_1 F'(z_1) - 2F(z_1),$$

où $F(z_1)$ est une fonction arbitraire, on trouve

$$ax_1'' + by_1'' = z_1 F''(z_1);$$

donc

$$px_1'' + qy_1'' = F''(z_1),$$

d'où

$$px_1 + qy_1 = F'(z_1) + \lambda z_1 + \mu.$$

Mais on peut faire rentrer λz_1 dans $F'(z_1)$, et on a finalement l'intégrale générale

$$ax_1 + by_1 = z_1 F'(z_1) - 2F(z_1), \quad px_1 + qy_1 = F'(z_1) + \mu.$$

Digitized by Google

En remplaçant x_1, y_1, z_1 par

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{z}{x}, \quad z_1 = \frac{y}{x},$$

on aura les équations générales des courbes qui admettent Oz pour axe, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} - \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

55. Revenons aux surfaces dans lesquelles les lignes asymptotiques d'une série S_1 sont des courbes ayant un même axe anharmonique, qu'on peut supposer confondu avec l'axe Oz des coordonnées.

Ces surfaces jouissent d'une propriété intéressante, qu'on peut envisager comme une généralisation d'une fort belle propriété des lignes asymptotiques d'une surface réglée.

Nous appellerons *rapport anharmonique* de quatre points A, B, C, D d'une courbe ayant Oz pour axe anharmonique le rapport anharmonique des quatre plans menés par Oz et ces points, ou des quatre points de rencontre de Oz avec les plans osculateurs en ces points.

Si une des séries S_1 de lignes asymptotiques d'une surface se compose de courbes ayant même axe anharmonique Oz, l'équation

$$R\,d\zeta^2 - T\,d\lambda^2 = 0$$

admet une intégrale de la forme

$$\zeta = m\,\frac{\lambda - a}{\lambda - b},$$

où m, a, b sont des fonctions d'un même paramètre ρ, qui est constant pour chaque ligne asymptotique de la série S_1. D'ailleurs, on a généralement

$$(E) \quad d\zeta = \frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2}\,d\lambda + \frac{m'(\lambda-a)(\lambda-b) - m[a'(\lambda-b) - b'(\lambda-a)]}{(\lambda-b)^2}\,d\rho.$$

Désignons par $(d'\lambda, d'\zeta)$, $(d''\lambda, d''\zeta)$ les variations relatives aux

Digitized by Google

lignes asymptotiques qui se croisent en un point; on a

$$\frac{d'\zeta}{d'\lambda}+\frac{d''\zeta}{d''\lambda}=0;$$

car les courbes $d\lambda=0$, $d\zeta=0$ sont conjuguées sur la surface. Mais les lignes asymptotiques de la série S_1 donnent

$$\frac{d'\zeta}{d'\lambda}=\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2};$$

on aura donc, pour celles de la seconde série S_2,

$$\frac{d''\zeta}{d''\lambda}=-\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2},$$

ou, en supprimant les accents,

$$\frac{d\zeta}{d\lambda}=-\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2}.$$

Or, de l'équation (E) on tire

$$\frac{d\zeta}{d\lambda}=\frac{m(a-b)}{(\lambda-b)^2}+\frac{m'(\lambda-a)(\lambda-b)-m[a'(\lambda-b)-b'(\lambda-a)]}{(\lambda-b)^2}\frac{d\rho}{d\lambda};$$

donc, enfin,

$$2m(a-b)\frac{d\lambda}{d\rho}+m'(\lambda-a)(\lambda-b)-m[a'(\lambda-b)-b'(\lambda-a)]=0.$$

En remarquant que a, b, m sont des fonctions de ρ, on a une équation de la forme

$$\frac{d\lambda}{d\rho}+g(\rho)\lambda^2+h(\rho)\lambda+k(\rho)=0:$$

c'est une équation de Riccati.

De là ce premier résultat, que les lignes asymptotiques de la série S_2, ainsi que celles d'une surface réglée, dépendent d'une équation de Riccati. Soient

$$f_1(\rho),\ f_2(\rho),\ f_3(\rho),\ f_4(\rho)$$

quatre solutions de cette équation, et

$$\lambda=f_1(\rho),\quad \lambda=f_2(\rho),\quad \lambda=f_3(\rho),\quad \lambda=f_4(\rho)$$

les équations en coordonnées λ et ρ de quatre lignes asymptotiques

Digitized by Google

de la seconde série S_2. Faisons

$$\rho = \rho_0.$$

Cela revient à chercher les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, où une même ligne asymptotique de la première série est coupée par ces quatre lignes asymptotiques fixes. Or le rapport anharmonique de ces quatre points est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de λ qui lui correspondent, c'est-à-dire à

$$\frac{f_1(\rho_0) - f_2(\rho_0)}{f_1(\rho_0) - f_4(\rho_0)} : \frac{f_3(\rho_0) - f_2(\rho_0)}{f_3(\rho_0) - f_4(\rho_0)};$$

et c'est une propriété caractéristique de l'équation de Riccati que ce rapport anharmonique soit indépendant de ρ_0. Donc :

Une surface étant donnée, dans laquelle les lignes asymptotiques d'une série S_1 *ont un même axe anharmonique, le rapport anharmonique des quatre points suivant lesquels quatre lignes asymptotiques fixes de la seconde série* S_2 *coupent une quelconque des lignes asymptotiques de la série* S_1 *est constant.*

VII. — Étude particulière d'un système quadruplement orthogonal.

56. Nous avons, dès le début, trouvé pour expression du cosinus de l'angle de deux corrélations t, t'

$$\cos(t, t') = \frac{1}{2} \frac{\sum \frac{\partial M}{\partial t_i} t'_i}{\sqrt{M(t)\, M(t')}}.$$

En particulier, le cosinus de l'angle de deux corrélations coordonnées, c'est-à-dire de deux corrélations pour chacune desquelles toutes les coordonnées sont nulles, sauf une (t_α pour l'une, t'_β pour l'autre), ce cosinus a pour expression

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{M_{\alpha\beta}}{\sqrt{M_{\alpha\alpha} M_{\beta\beta}}}.$$

Nous poserons

$$M_{\alpha\alpha} = m_\alpha^2;$$

Digitized by Google

on a ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(du) = {} & m_1^2 du_1^2 + m_2^2 du_2^2 + m_3^2 du_3^2 + m_4^2 du_4^2 \\ & + 2 m_1 m_2 du_1 du_2 \cos(1,2) + 2 m_1 m_3 du_1 du_3 \cos(1,3) \\ & + 2 m_1 m_4 du_1 du_4 \cos(1,4) + 2 m_2 m_3 du_2 du_3 \cos(2,3) \\ & + 2 m_2 m_4 du_3 du_4 \cos(2,4) + 2 m_3 m_4 du_3 du_4 \cos(3,4).\end{aligned}$$

Des considérations analogues à celles que M. Somoff a développées dans sa *Cinématique* (*Theoretische Mechanik*, Ire Partie, p. 147) nous permettraient de puiser dans l'expression précédente une série d'analogies nouvelles, entre le moment élémentaire et le carré de la distance de deux points consécutifs.

Mais nous supposerons, tout de suite, que $\mathrm{M}(du)$ soit privée des rectangles, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les corrélations coordonnées soïent orthogonales deux à deux. Une substitution linéaire permet toujours cette réduction *pour une droite déterminée* de l'espace, car, dans l'espace non euclidien représentatif, il y a une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique fondamentale.

L'angle de deux corrélations a, dans ce cas, pour cosinus

$$\cos(t, t') = \frac{\Sigma m_i^2 t_i t_i'}{\sqrt{\Sigma m_i^2 t_i^2 \, \Sigma m_i^2 t_i'^2}}.$$

En particulier,

$$\cos(t, x) = \frac{m_i t_a}{\sqrt{\Sigma m_i^2 t_i^2}},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\cos(t, t') = {} & \cos(t, 1)\cos(t', 1) + (\cos t, 2)\cos(t', 2) \\ & + \cos(t, 3)\cos(t', 3) + \cos(t, 4)\cos(t', 4).\end{aligned}$$

De là ce théorème :

Le cosinus de l'angle de deux corrélations égale la somme des produits des cosinus des angles de ces corrélations avec quatre corrélations orthogonales deux à deux.

En particulier, si $t' = t$,

$$1 = \cos^2(t, 1) + \cos^2(t, 2) + \cos^2(t, 3) + \cos^2(t, 4).$$

Digitized by Google

La somme des carrés des cosinus des angles d'une corrélation, avec quatre corrélations orthogonales deux à deux, est égale à l'unité.

57. Il n'est généralement pas vrai que, si un système de coordonnées réduit la forme $M(du)$ pour une *droite déterminée* à ne contenir que les carrés des différentielles, cette réduction s'étende à toutes les droites de l'espace.

Mais on peut se proposer de savoir si de tels systèmes existent.

Les hypothèses portant sur les coefficients de la forme quadratique caractérisent les systèmes de coordonnées correspondants, et ces hypothèses, d'après les recherches générales de Riemann, Christoffel, Lipschitz, etc., sont limitées par l'existence de certaines formes covariantes qu'on déduit de la proposée par des différentiations. C'est ainsi que nous verrons qu'il n'existe pas de systèmes de coordonnées ramenant $M(du)$ à avoir des coefficients constants.

Mais il existe des coordonnées *quadruplement orthogonales*, c'est-à-dire pour lesquelles la forme quadratique est privée des rectangles des différentielles pour toutes les droites de l'espace. Dans ce cas, les équations

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const,}, \quad u_3 = \text{const.}, \quad u_4 = \text{const.}$$

représentent quatre séries de complexes, telles qu'un complexe de chaque série passe par une droite de l'espace, et que les corrélations normales de ces complexes y sont orthogonales deux à deux.

Nous allons, dans ce qui suit, étudier un système quadruplement orthogonal particulier, qui nous conduira à faire voir comment la théorie des complexes linéaires peut être déduite des recherches de M. Darboux sur le système de cercles et de sphères, et comment aussi on peut y puiser une extension de la représentation de M. Lie, des lignes droites par des sphères.

58. Prenons pour coordonnées de la ligne droite les constantes u_1, u_2, u_3, u_4 de ses équations, mises sous la forme

$$x = (u_1 + u_3\sqrt{-1})\,z - u_2 + u_4\sqrt{-1},$$
$$y = (u_2 + u_4\sqrt{-1})\,z + u_1 - u_3\sqrt{-1}.$$

Digitized by Google

La condition de rencon tre de deux droites (u), (u') s'écrit symétriquement

$$\Sigma(u_i - u'_j)^2 = 0. \tag{1}$$

En posant

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + (u_1 + u_3\sqrt{-1})^2 + (u_2 + u_4\sqrt{-1})^2,$$

la forme fondamentale a pour expression

$$M(du) = \lambda\,\Sigma\, du_i^2.$$

Le système de coordonnées que nous considérons est donc quadruplement orthogonal.

L'équation générale des complexes linéaires, dans ce système de coordonnées, prend la forme

$$\Sigma(u_i - a_i)^2 - R^2 = 0. \tag{2}$$

Dans le système de coordonnées qui nous occupe, un complexe linéaire s'offre donc comme *une sphère dans un espace à quatre dimensions*.

M. Klein, par un procédé différent, est arrivé à un résultat analogue.

Cette remarque permet de rattacher aux travaux sur les systèmes de cercles et de sphères les propriétés des complexes linéaires.

En faisant $R^2 = 0$, les équations (1) et (2) coïncident. Un *complexe spécial* s'offre ainsi comme une sphère de rayon nul.

59. L'équation générale des complexes linéaires qui admettent pour conjuguées deux droites (u') et (u'') est évidemment la suivante

$$\lambda\,\Sigma(u_i - u'_i)^2 + \mu\,\Sigma(u_i - u''_i)^2 = 0. \tag{3}$$

En identifiant (2) et (3), on aura la condition pour que les droites (u') et (u'') soient conjuguées par rapport au complexe linéaire (3). On trouve ainsi

$$\frac{\lambda + \mu}{1} = \frac{\lambda\, u'_i + \mu\, u''_i}{a_i} = \frac{\lambda\,\Sigma\, u'^2_i + \mu\,\Sigma\, u''^2_i}{\Sigma a_i^2 - R^2};$$

de ces équations on déduit sans peine les suivantes

$$\Sigma(u'_i - a_i)(u''_i - a_i) = R^2,$$
$$\lambda(u'_i - a_i) + \mu(u''_i - a_i) = 0;$$

Digitized by Google

on en tire

$$-\frac{\lambda}{\mu}\Sigma(u_i'-a_i)^2=R^2,$$

$$-\frac{\mu}{\lambda}\Sigma(u_i''-a_i)^2=R^2,$$

d'où

$$\Sigma(u_i'-a_i)^2\,\Sigma(u_i''-a_i)^2=R^4.$$

Ainsi :

La transformation par polaires réciproques, relativement à un complexe linéaire donné, s'offre comme une transformation par rayons vecteurs réciproques dans un espace à quatre dimensions.

60. Il peut être intéressant d'interpréter les valeurs infinies de u_1, u_2, u_3, u_4. Elles correspondent aux droites de l'espace qui rencontrent la droite de l'infini du plan des xOy. Ces droites forment donc un complexe spécial. Appelons I la droite à l'infini du plan des xOy; des formules précédentes, où l'on fait $u_i''=a_i$, on conclut que la droite dont a_1, a_2, a_3, a_4 sont les coordonnées est la polaire de la droite I par rapport au complexe linéaire défini par l'équation (2).

De même que le centre d'une sphère est l'élément corrélatif de l'infini, la droite (a) est l'élément corrélatif de l'infini, qui se trouve représenté ici par le complexe spécial dont I est l'axe : on peut dire que la droite (a) est la polaire de l'infini.

Lorsque le centre d'une sphère est à l'infini, on sait que son équation se réduit au premier degré. De même ici, la polaire de l'infini étant à l'infini, a_1, a_2, a_3, a_4 sont infinis, et l'équation du complexe linéaire se réduit au premier degré. Mais comme, dans ce cas, la droite I rencontre sa polaire, elle appartient au complexe.

L'équation générale des complexes linéaires qui contiennent la droite I est donc la suivante

$$\Sigma b_i u_i - C = 0.$$

Si les constantes b sont nulles, l'équation

$$C = 0$$

représente l'infini, c'est-à-dire le complexe spécial des droites qui rencontrent la droite I.

Digitized by Google

61. La corrélation normale d'un complexe linéaire a pour coordonnées des quantités proportionnelles à

$$u_1 - a_1, \quad u_2 - a_2, \quad u_3 - a_3, \quad u_4 - a_4.$$

L'angle de deux complexes

$$\Sigma(u_i - a_i)^2 - R^2 = 0,$$
$$\Sigma(u_i - b_i)^2 - R'^2 = 0$$

a donc pour cosinus

$$\cos\theta = \frac{\Sigma(u_i - a_i)(u_i - b_i)}{\sqrt{\Sigma(u_i - a_i)^2 \Sigma(u_i - b_i)^2}};$$

en appelant *angle de deux complexes* l'angle de leurs corrélations normales.

La droite (u) appartient aux deux complexes, et, en ajoutant leurs équations, on trouve

$$2\Sigma(u_i - a_i)(u_i - b_i) = R^2 + R'^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2,$$

donc

$$\cos\theta = \frac{R^2 + R'^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2}{2RR'}.$$

Ceci montre d'abord que *deux complexes linéaires se coupent sous le même angle suivant toutes leurs droites communes.*

La condition de contact $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$ donne

$$(R \pm R')^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2 = 0.$$

La condition d'orthogonalité est, au contraire,

$$R^2 + R'^2 - \Sigma(a_i - b_i)^2 = 0.$$

Comme l'équation d'un complexe linéaire dépend de cinq constantes, on conclut que cinq conditions suffisent pour le déterminer; par exemple : cinq droites; une droite, et un couple de droites conjuguées; être tangent à cinq complexes donnés; être orthogonal à cinq complexes linéaires donnés, etc.

Nous allons examiner ce dernier problème.

62. Soient

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 0,$$

ou

$$S_p = \sum_i (u_i - a_{p,i})^2 - R_p^2$$

Digitized by Google

les équations de cinq complexes linéaires donnés; nous poserons

$$k_{p,q} = \sum_i (a_{p,i} - a_{q,i})^2 - R_p^2 - R_q^2;$$

de sorte que le cosinus de l'angle des complexes S_p et S_q aura pour expression

$$\cos(p, q) = \frac{-k_{p,q}}{2R_p R_q}.$$

La méthode employée par M. Darboux dans la recherche de la sphère orthogonale à quatre sphères données (*Annales de l'École Normale*, 1872) est intégralement applicable à la question que nous nous sommes posée.

En augmentant d'une unité le nombre des variables, les formules de M. Darboux trouvent ainsi une interprétation dans la géométrie des complexes linéaires.

C'est ainsi qu'on peut mettre l'équation du complexe linéaire orthogonal à cinq complexes linéaires donnés sous la forme élégante

$$\varphi(\mu) = \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{p,q}\mu_p\mu_q = 0,$$

où les quantités μ sont liées aux coordonnées u de la ligne droite par les équations

$$u_i = \frac{\sum_p a_{p,i}\mu_p}{\sum_p \mu_p}.$$

En appelant Δ le discriminant de la forme $\varphi(\mu)$, et Δ_1 ce discriminant bordé par les quantités 1, 1, 1, 1, 1, 0, on trouve

$$\Delta + 2R^2\Delta_1 = 0.$$

Or, quand un complexe linéaire spécial est orthogonal à un complexe linéaire, son axe appartient à ce complexe. On voit par là que

$$\Delta = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les cinq complexes proposés aient une droite commune.

L'équation $\Delta_1 = 0$ exprime que la droite I et ses conjugués par rapport aux cinq complexes linéaires donnés sont six droites d'un même complexe linéaire.

Digitized by Google

63. Soient six complexes linéaires $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, ..., $S_6 = 0$; cherchons la condition qui doit être remplie pour qu'ils soient orthogonaux à un septième complexe $S = 0$.

La condition d'orthogonalité

$$R_p^2 + R^2 - \Sigma(a_{p,i} - a_i)^2 = 0$$

peut s'écrire en posant

$$H_p = R_p^2 - \sum_i a_{p,i}^2,$$

$$R^2 - \Sigma a_i^2 - 2a_{p,1}a_1 - 2a_{p,2}a_2 - 2a_{p,3}a_3 - 2a_{p,4}a_4 + H_p = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\frac{2a_1}{-\alpha_1} = \frac{2a_2}{-\alpha_2} = \frac{2a_3}{-\alpha_3} = \frac{2a_4}{-\alpha_4} = \frac{R^2 - \Sigma a_i^2}{\alpha_5} = \frac{1}{\alpha_6},$$

cette équation s'écrit

$$(e) \qquad a_{p,1}\alpha_1 + a_{p,2}\alpha_2 + a_{p,3}\alpha_3 + a_{p,4}\alpha_4 + \alpha_5 + H_p\alpha_6 = 0,$$

tandis que l'équation du complexe orthogonal devient

$$\alpha_6 \Sigma u_i^2 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - \alpha_5 = 0.$$

Pour que les six complexes proposés soient orthogonaux à un même complexe linéaire, il faut et il suffit que les six équations homogènes (e) soient compatibles. Il faut et il suffit pour cela que le déterminant suivant soit nul

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & H_1 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & H_2 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & H_3 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & H_4 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & H_5 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & H_6 \end{vmatrix} = 0.$$

THÉORÈME. — *Pour que six complexes linéaires soient orthogonaux à un même complexe linéaire, il faut et il suffit qu'il existe entre les premiers membres de leurs équations une relation linéaire et homogène.*

Cela résulte immédiatement de la condition que nous venons de trouver.

Digitized by Google

THÉORÈME. — *Étant donnés sept complexes linéaires tels qu'il n'existe pas de complexe linéaire orthogonal à la fois à six d'entre eux, il existera entre les premiers membres de leurs équations une relation linéaire et homogène, dans laquelle aucun des coefficients n'est nul.*

Soit, en effet, la relation identique

$$\Sigma u_i^2 - 2a_{p,1}u_1 - 2a_{p,2}u_2 - 2a_{p,3}u_3 - 2a_{p,4}u_4 - H_p - S_p = 0.$$

En éliminant Σu_i^2, $-2u_1$, $-2u_2$, $-2u_3$, $-2u_4$, -1 entre les sept relations qui affectent cette forme, et qu'on obtient en faisant $p = 1, 2, 3, \ldots, 7$, on trouve le déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & H_1 & S_1 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & H_2 & S_2 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & H_3 & S_3 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & H_4 & S_4 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & H_5 & S_5 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & H_6 & S_6 \\ 1 & a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & H_7 & S_7 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui prouve bien qu'il existe entre les S_p une relation de la forme

$$\Sigma \lambda_p S_p = 0.$$

Si l'un des coefficients λ était nul, λ_7 par exemple, il existerait une relation linéaire entre $S_1, \ldots, S_6$, et il existerait un complexe linéaire orthogonal à la fois aux six complexes $S_1 = 0, \ldots, S_6 = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

64. On en déduit que, si $S_1, \ldots, S_6$ sont six complexes linéaires non orthogonaux à un même complexe linéaire, l'équation d'un complexe linéaire quelconque peut affecter la forme

$$S = \sum_p \gamma_p S_p = 0.$$

Posons

$$(f) \qquad \begin{cases} \sum_p a_{p,i}\gamma_p = A_i \sum_p \gamma_p, \\ \sum_p (\sum_i a_{p,i}^2 - R_p^2)\gamma_p = (\sum_i A_i^2 - R^2) \sum_p \gamma_p, \end{cases}$$

Digitized by Google

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{\sum_p R_p^2 y_p^2 - \sum_{p,q} k_{p,q} y_p y_q}{\sum_p y_p},$$

où $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et $i = 1, 2, 3, 4$.

En posant

$$R_p y_p = x_p,$$

et remarquant que le cosinus de l'angle des complexes S_p, S_q a pour expression

$$\cos(p, q) = \frac{-k_{p,q}}{2 R_p R_q},$$

on peut écrire encore

$$R^2 = \frac{\sum_p x_p^2 + 2 \sum_{p,q} x_p x_q \cos(p, q)}{\sum_p \frac{x_p}{R_p}},$$

et, si l'on convient de faire $\cos(p, q) = 1$ pour $q = p$, on peut mettre la valeur de R^2 sous la forme simple

$$R^2 = \frac{\sum_{p,q} x_p x_q \cos(p, q)}{\sum_p \frac{x_p}{R_p}}.$$

D'ailleurs, le complexe $S = 0$ a pour équation

$$\sum (u_i - A_i)^2 - R^2 = 0.$$

On sait qu'en coordonnées pentasphériques on définit le point comme une sphère de rayon nul. Dans le cas actuel, on peut définir une droite comme l'axe d'un complexe linéaire spécial.

Si donc les quantités x sont telles que le complexe $S = 0$ soit spécial, c'est-à-dire si ces quantités vérifient l'équation

$$\Omega(x) = \sum x_p x_q \cos(p, q) = 0,$$

on pourra envisager $x_1, x_2, \ldots, x_6$ comme les coordonnées homogènes d'une ligne droite.

Ainsi, dans ce système de coordonnées, l'espace réglé s'offre comme un espace quadratique à quatre dimensions.

Digitized by Google

65. Pour retrouver le système de coordonnées de M. Klein, il suffit de supposer que les six complexes fondamentaux sont orthogonaux deux à deux. Les rectangles des variables diparaissent de $\Omega(x)$, qui se réduit dès lors à

$$\Sigma x_p^2.$$

La formule (f), où A_i est remplacé par u_i, permet le passage des coordonnées u aux coordonnées x, et inversement.

Il est facile de reconnaître qu'en posant

$$\rho l_p = \frac{R^2 + R_p^2 - \Sigma_i (a_{p,i} - a_i)^2}{2RR_p},$$

le complexe linéaire

$$\Sigma_i (u_i - a_i)^2 - R^2 = 0$$

a pour équation, dans le nouveau système de coordonnées,

$$\Sigma_p l_p x_p = 0.$$

Si l'on désigne par (l, p) l'angle du complexe précédent avec le complexe fondamental S_p, il est clair qu'on a

$$\rho l_p = \cos(l, p).$$

Cette équation donne une interprétation simple des coefficients de l'équation d'un complexe linéaire en coordonnées de M. Klein.

On voit que cette équation peut s'écrire

$$\Sigma_p x_p \cos(l, p) = 0.$$

66. Cherchons la condition en fonction des nouveaux coefficients pour que le complexe linéaire

$$\Sigma_p l_p x_p = 0$$

soit spécial.

Cherchons d'abord la condition de rencontre de deux droites (x') et (x''). On trouve

$$\sum_p \frac{\partial \Omega(x')}{\partial x'_p} x''_p = 0.$$

Digitized by Google

Si l'on a

$$\rho l_p = \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x'_p} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots, 6),$$

le complexe $\sum_p l_p x_p = 0$ se composera évidemment de droites qui rencontrent la droite (x') : il sera spécial. En éliminant x'_p et ρ $(p = 1, 2, \ldots, 6)$ entre les six équations précédentes et l'équation

$$\Omega(x') = 0,$$

on aura la condition pour que le complexe soit spécial. Ainsi, en désignant par $\Phi(\xi)$ la forme adjointe de la forme $\Omega(x)$, l'équation

$$\Phi(l) = 0$$

exprime que le complexe $\sum_p l_p x_p = 0$ est spécial.

On reconnaît dans $\Phi(l)$ une forme générale de ce que M. Klein appelle l'*invariant* du complexe.

67. L'équation

$$\sum_p \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_p}(x_p + dx_p) = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_p} dx_p = 0,$$

exprime la rencontre de deux droites successives de l'espace.

Mais comme on a toujours

$$\Omega(x) = 0,$$
$$\Omega(x + dx) = 0,$$

on en déduit que

$$\sum \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_p} dx_p + \Omega(dx) = 0.$$

Par conséquent

$$\Omega(dx)$$

est la forme quadratique des différentielles dont l'évanouissement exprime la rencontre de deux droites successives de l'espace.

Digitized by Google

En négligeant une fonction indépendante des différentielles, on peut prendre

$$\Omega(dx)$$

pour la forme fondamentale.

68. Cela posé, cherchons l'expression de l'angle de deux complexes linéaires (l) et (l'); en désignant par (dx) et $(d'x)$ leurs corrélations normales, on sait que

$$\rho l_p = \frac{\partial \Omega(dx)}{\partial dx_p},$$

$$\rho' l'_p = \frac{\partial \Omega(d'x)}{\partial d'x_p}.$$

En désignant par $\Phi(\xi)$ la forme adjointe de $\Omega(x)$ comme précédemment, on en déduit que

$$\cos(l, l') = \frac{1}{2} \frac{\sum_p \frac{\partial \Omega(dx)}{\partial dx_p} d'x_p}{\sqrt{\Omega(dx)\,\Omega(d'x)}} = \frac{1}{2} \frac{\sum_p \frac{\partial \Phi(l)}{\partial l_p} l'_p}{\sqrt{\Phi(l)\,\Phi(l')}}.$$

Prenons en particulier le cas des coordonnées de M. Klein, où les six complexes fondamentaux sont orthogonaux deux à deux. Alors

$$\Phi(l) = \sum_p l_p^2;$$

donc

$$\cos(l, l') = \frac{\sum_p l_p l'_p}{\sqrt{\sum_p l_p^2 \sum_p l'^2_p}}.$$

Prenons pour le complexe (l') le complexe orthogonal aux complexes $S_2, S_3, \ldots, S_6$, on aura

$$l'_2 = l'_3 = l'_4 = l'_5 = l'_6 = 0.$$

Mais il est clair que ce complexe coïncide alors avec le complexe S_1; on a donc

$$\cos(l, 1) = \frac{l_1}{\sqrt{\sum_p l_p^2}}$$

et, en général,

$$\cos(l, q) = \frac{l_q}{\sqrt{\sum_p l_p^2}} \quad (q = 1, 2, 3, \ldots, 6);$$

Digitized by Google

on en déduit

$$\sum_q \cos^2(l, q) = 1.$$

Donc :

La somme des carrés des cosinus des angles que fait un complexe linéaire avec six complexes linéaires orthogonaux deux à deux est égale a l'unité.

En remplaçant dans l'expression de $\cos(l, l')$ les quantités l et l' par leurs valeurs en fonction des cosinus des angles des deux complexes avec les six complexes fondamentaux, on trouve

$$\cos(l, l') = \sum_q \cos(l, q)\cos(l', q) \quad (q = 1, 2, 3, \ldots, 6).$$

Ainsi :

Le cosinus de l'angle de deux complexes linéaires est égal à la somme des produits des cosinus des angles que ces complexes font avec six complexes linéaires orthogonaux deux à deux.

Ces deux théorèmes établissent un rapprochement avec l'espace ponctuel.

69. Avant de terminer ce qui a trait au choix particulier dès coordonnées quadruplement orthogonales que nous avons fait, et après avoir montré comment les coordonnées de M. Klein s'en déduisent comme une extension des coordonnées pentasphériques, nous devons montrer encore comment on peut les rattacher à la représentation des lignes droites par des sphères de M. Lie.

Il suffit de remarquer que, si l'on cherche à représenter par un espace ponctuel les droites du *complexe linéaire*

$$u_3 = 0,$$

on tombe précisément sur la correspondance que M. Lie a découverte.

On peut donc considérer les coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 comme établissant une correspondance analogue, mais cette fois entre les droites de l'*espace réglé* et un espace ponctuel à *quatre* dimensions. C'est l'idée qui nous guidera en dernier lieu dans l'étude des propriétés infinitésimales du second ordre des systèmes de droites.

Digitized by Google

TROISIÈME PARTIE.

LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DU SECOND ORDRE.

I. — Étude de la forme fondamentale.

70. Nous avons, dès le début, défini la forme quadratique des différentielles des coordonnées comme une fonction de ces différentielles exprimant par son évanouissement la rencontre de deux droites successives de l'espace. Dans la suite, nous avons vu qu'on pouvait prendre pour cette forme le moment des deux droites u et $(u + du)$, mais ce choix pouvait être fort différent. Il eût suffi de multiplier $M(du)$ par un coefficient indépendant des différentielles des coordonnées. Les propriétés du premier ordre, l'expression de l'angle, eussent conservé leur forme; mais les propriétés du second ordre dépendent essentiellement de la variation de la forme fondamentale et, par conséquent, de sa détermination absolue. Nous ne développerons pas, dans ce travail, ce point de vue général.

Nous nous contenterons de donner quelques résultats relatifs au choix particulier du moment des deux droites successives pour valeur absolue de la forme fondamendale; après quoi, nous chercherons dans l'analogie ci-dessus reconnue entre les sphères et les complexes linéaires une traduction des propriétés infinitésimales du second ordre de l'espace réglé.

71. Désignons par $M(du)$ la forme quadratique qui est égale au moment de deux droites infiniment voisines de l'espace, ainsi que nous l'avons déjà fait.

Il sera peut-être commode de désigner sous le nom d'*éloignement de deux droites* (u), $(u + du)$ une quantité dont le carré soit égal à $M(du)$.

Digitized by Google

Si deux droites sont tracées sur une surface réglée, et qu'on prenne l'intégrale

$$\int \sqrt{\mathrm{M}(du)}$$

entre deux droites A et B de la surface entre lesquelles $\mathrm{M}(du)$ reste constamment positif, on pourra dire que l'intégrale

$$\mathrm{E} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{\mathrm{M}(du)} \tag{1}$$

représente l'éloignement des droites A et B sur la surface considérée.

Si l'on se donne deux droites A et B dans un système de droites (congruence, complexe ou espace réglé), et que l'on envisage les surfaces de ce système qui passent par les droites A et B, on peut imaginer celle de ces surfaces qui donne lieu à une valeur de E dont la première variation soit nulle. La solution de ce problème conduira à concevoir ce qu'on peut appeler la *surface géodésique* du système.

Ce problème offre le lien le plus étroit avec celui qui consiste à chercher l'expression des coordonnées en fonction d'un paramètre λ, de telle sorte que l'expression

$$\mathrm{F} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{M}\left(\frac{du}{d\lambda}\right) d\lambda \tag{2}$$

ait sa première variation nulle.

Les équations de Lagrange relatives à ce dernier problème affectent la forme générale

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathrm{M}(u')}{\partial u_i'} - \frac{\partial \mathrm{M}(u')}{\partial u_i} = 0, \tag{3}$$

où $u_i' = \dfrac{du_i}{d\lambda}$.

Par une extension du théorème des forces vives, les équations (3) admettent l'intégrale

$$\mathrm{M}(u') = \text{const.} \tag{4}$$

L'élimination de $d\lambda$ entre les équations (3) conduit aux équations différentielles entre les coordonnées u qui résolvent le premier problème.

Digitized by Google

72. Supposons d'abord que nous cherchions les surfaces géodésiques de l'espace réglé. Les équations (3) s'intègrent sans difficulté. Prenons des axes rectangulaires et faisons coïncider Oz avec la droite A, par exemple; nous prendrons pour variables indépendantes les constantes a, b, p, q des deux équations de la ligne droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

La forme $M(du)$ a pour expression

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2}$$

et

$$M(u') = \frac{a'q' - b'p'}{1 + a^2 + b^2}.$$

Les équations de Lagrange sont donc

$$(3') \quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{q'}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = -2a\dfrac{a'q' - b'p'}{(1+a^2+b^2)^2}, \\ \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{p'}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = +2b\dfrac{a'q' - b'p'}{(1+a^2+b^2)^2}, \\ \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{b'}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = 0, \quad \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{a'}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = 0. \end{cases}$$

En tenant compte de l'intégrale (4), on trouve aisément es intégrales de ces équations

$$(5) \quad \frac{a}{\alpha_1} = \frac{b}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2 q + \alpha_1 p}{\beta} = \frac{\operatorname{tang}\left(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\,\lambda\right)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad \alpha_1 q - \alpha_2 p = \gamma\lambda.$$

λ est une variable auxiliaire et α_1, α_2, β, γ sont des constantes exprimées en fonction des valeurs initiales de a, b, p, q et de leurs dérivées relatives à la droite A de la manière suivante

$$(6) \quad \alpha_1 = a'_0, \quad \alpha_2 = b'_0, \quad \beta = b'_0 q'_0 + a'_0 p'_0, \quad \gamma = a'_0 q'_0 - b'_0 p'_0.$$

Si l'on prend pour Oy la perpendiculaire commune à A et à B, et si l'on fait correspondre $\lambda = \lambda_1$ à la droite B, en désignant par h et θ la plus courte distance et l'angle aigu des droites A et B, on a

$$(6') \quad \alpha_1 = \frac{\theta + n\pi}{\lambda_1}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{h(\theta + n\pi)}{\lambda_1}$$

Digitized by Google

(n est un entier quelconque). Les formules (5) deviennent

$$(7) \qquad a = \operatorname{tang}(0 + n\pi)\frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad b = 0, \quad p = 0, \quad q = h\frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

On en déduit

$$(8) \qquad \frac{x}{z} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{h}(0 + n\pi).$$

On reconnaît là l'équation générale des hélicoïdes gauches que l'on peut faire passer par les droites A et B. Ainsi :

Les hélicoïdes gauches sont les surfaces géodésiques de l'espace réglé.

Ils se présentent comme analogues de la ligne droite dans l'espace ponctuel. En sorte que, tandis que le déplacement qui fait décrire à un point de l'espace la ligne géodésique est un déplacement rectiligne, celui qui fait décrire à une droite la surface géodésique de l'espace réglé est un déplacement hélicoïdal.

73. Il est naturel de rechercher si les hélicoïdes correspondent à une propriété de maximum ou de minimum relativement à l'intégrale

$$\int \sqrt{\mathrm{M}(du)}.$$

Il suffit d'étudier le signe de la variation seconde.

Partons des équations

$$a = \operatorname{tang}\lambda, \quad b = \alpha f(\lambda), \quad p = \beta\varphi(\lambda), \quad q = h\lambda + \gamma\psi(\lambda),$$

qui, pour $\alpha = \beta = \gamma = 0$, représentent un hélicoïde gauche passant par Oz et par la droite dont les coordonnées sont $a = \operatorname{tang}\lambda_0$, $b = 0$, $p = 0$, $q = h\lambda_0$, pourvu que les conditions suivantes soient remplies

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad f(\lambda_0) = 0, \quad \varphi(\lambda_0) = 0, \quad \psi(\lambda_0) = 0;$$

on a

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2} = \frac{h + \gamma\psi'(\lambda) - \alpha\beta f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda}{1 + \alpha^2 f^2(\lambda)\cos^2\lambda}\,d\lambda^2,$$

d'où

$$\mathrm{I} = \int \sqrt{\mathrm{M}(du)} = \int_0^{\lambda_0} \sqrt{\frac{h + \gamma\psi'(\lambda) - \alpha\beta f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda}{1 + \alpha^2 f^2(\lambda)\cos^2\lambda}}\,d\lambda.$$

Digitized by Google

Attribuons à α, β, γ la valeur zéro, I sera égal à la valeur I_0 relative à l'hélicoïde. Si α, β, γ sont très petits, I sera la valeur de l'intégrale relative à une surface infiniment voisine de l'hélicoïde, et $I - I_0$ sera la différence de ces intégrales dont il faut étudier le signe.

Le radical qui multiplie $d\lambda$ sous le signe somme, en posant

$$x_1 = \gamma \frac{\psi(\lambda)}{2\sqrt{h}}, \quad x_2 = \dots - \frac{1}{2\sqrt{h}}\left[\alpha^2 h f^2(\lambda)\cos^2\lambda - \gamma^2 \frac{\psi'^2(\lambda)}{4h} + \alpha\beta f'(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda\right],$$

se développe par la formule

$$\sqrt{h} - x_1 + x_2 + \dots .$$

De là, en remarquant que $I_0 = \int_0^{\lambda_0} \sqrt{h}\, d\lambda = \sqrt{h}\lambda_0$,

$$I - I_0 = \gamma \int_0^{\lambda_0} \frac{\psi'(\lambda)}{2\sqrt{h}}\, d\lambda - \int_0^{\lambda_0} x_2\, d\lambda - \int_0^{\lambda_0} \varepsilon^3\, d\lambda,$$

où ε^3 désigne dans le développement du radical les termes qui ne contiennent pas de termes en α, β ou γ à une puissance inférieure à 3. On se rend compte ainsi que

$$-\frac{1}{2\sqrt{h}} J = \int_0^{\lambda_0} x_2\, d\lambda$$

est une expression de la variation seconde.

En posant

$$A^2 = \int_0^{\lambda_0} h f^2(\lambda)\cos^2\lambda\, d\lambda, \quad C^2 = \int_0^{\lambda_0} \frac{\psi'^2(\lambda)}{4h}\, d\lambda$$

(car ces intégrales sont toujours positives) et

$$2L = \int_0^{\lambda_0} f(\lambda)\varphi'(\lambda)\cos^2\lambda\, d\lambda,$$

on a

$$J = \left(A\alpha - \frac{L\beta}{A}\right)^2 - C^2\gamma^2 - \frac{L^2}{A^2}\beta^2.$$

On peut toujours faire en sorte, par un choix de $f(\lambda)$ et $\varphi(\lambda)$, que A et

Digitized by Google

L ne soient pas nuls. Or, il est clair qu'on peut choisir α, β, γ de sorte que J ait tel signe qu'on voudra.

Il n'y a donc pas de maximum ni de minimum pour l'hélicoïde.

74. Le problème que résolvent les équations (5) conduit à une interprétation géométrique des *variables normales*, introduites par M. Lipschitz. Nous allons nous arrêter un instant sur ce point.

Nous remarquons d'abord que tout hélicoïde gauche mené par A ou Oz y détermine une corrélation de Chasles.

Réciproquement, donnons-nous une corrélation de Chasles sur Oz, prenons l'origine au plan central et le plan central pour zOy. Désignons par k le paramètre de distribution; l'hélicoïde qui a pour équation

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tang} \frac{y}{k}$$

définit sur Oz la corrélation proposée.

On peut dire que cet hélicoïde est déterminé par Oz, et par la droite infiniment voisine de Oz qui détermine sur Oz la corrélation proposée.

L'analogie de cet hélicoïde avec la ligne droite, tangente à une courbe dans l'espace ponctuel, est évidente.

Considérons deux droites A (prise pour Oz) et B, cette dernière ayant les coordonnées que nous lui avons assignées au n° 72.

Des relations suivantes

$$\mathrm{M}(du) = \mathrm{M}(u')\,d\lambda^2 = \gamma\, d\lambda^2,$$

qui ont lieu pour les droites d'un des hélicoïdes qui passent par A et B, on déduit

$$\mathrm{E} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{\mathrm{M}(du)} = \int_0^{\lambda_1} \sqrt{\gamma}\, d\lambda = \sqrt{\gamma}\,\lambda_1 = \sqrt{\gamma\,\lambda_1^2}.$$

Maintenant la dernière des équations (6′) nous donne

$$\mathrm{E} = \sqrt{h(\theta + n\pi)\lambda_1}.$$

Si l'on convient de prendre constamment $n = 0$, on a

$$\mathrm{E} = \sqrt{h\theta\lambda_1}.$$

Digitized by Google

Pour une droite B donnée, E est bien déterminé, ainsi que la corrélation que définit sur A l'hélicoïde particulier passant par A et B que l'on considère. Réciproquement, une corrélation sur A définit un hélicoïde, et, si on lui adjoint une valeur de l'éloignement E, on définit une droite sur cet hélicoïde.

Voici donc un système de coordonnées complètement analogue aux coordonnées polaires. Il nous suffira de l'avoir indiqué. Il est clair que son usage conduira à des analogies avec l'espace ponctuel. Citons, par exemple, les complexes qu'on pourrait appeler *sphériques* et caractérisés par l'équation E = const.

75. Nous passons actuellement à l'interprétation géométrique des *variables normales* de M. Lipschitz.

Les formules (6) permettent de mettre les formules (5) sous la forme suivante

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{(a'_0\lambda)} = \dfrac{b}{(b'_0\lambda)} = \dfrac{(b'_0\lambda)\,q + (a'_0\lambda)\,p}{(b'_0\lambda)(q'_0\lambda) + (a'_0\lambda)(p'_0\lambda)} = \dfrac{\operatorname{tang}\sqrt{(a'_0\lambda)^2 + (b'_0\lambda)^2}}{\sqrt{(a'_0\lambda)^2 + (b'_0\lambda)^2}}, \\ (a'_0\lambda)\,q - (b'_0\lambda)\,p = (a'_0\lambda)(q'_0\lambda) - (b'_0\lambda)(p'_0\lambda). \end{cases}$$

Ces formules montrent que a, b, p, q sont des fonctions de $a'_0\lambda$, $b'_0\lambda$, $p'_0\lambda$, $q'_0\lambda$, qui sont précisément les variables normales, dans le cas actuel.

Posons

$$a'_0\lambda = u_1, \quad b'_0\lambda = u_2, \quad p'_0\lambda = u_3, \quad q'_0\lambda = u_4.$$

Les formules (9) deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{u_1} = \dfrac{b}{u_2} = \dfrac{u_2 q + u_1 p}{u_2 u_4 + u_1 u_3} = \dfrac{\operatorname{tang}\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \\ u_1 q - u_2 p = u_1 u_4 - u_2 u_3. \end{cases}$$

Les formules (10) permettent le passage des coordonnées a, b, p, q de la ligne droite aux coordonnées normales.

Nous allons rapprocher les coordonnées normales des coordonnées polaires, dont nous avons déjà parlé.

Digitized by Google

Posons

$$\frac{t_1}{u_1} = \frac{t_2}{u_2} = \frac{t_3}{u_3} = \frac{t_4}{u_4};$$

en désignant par $M(du)$ la forme quadratique fondamentale, exprimée à l'aide des variables normales et de leurs différentielles; on trouve

$$u_i = \frac{t_i}{\sqrt{M(t)}} \sqrt{M(u)} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{11}$$

Interprétons $\sqrt{M(u)}$. Quand la droite décrit un hélicoïde passant par A, on a $u_i = u'_i \lambda$, où u'_i est constant. Donc

$$E = \int_0^\lambda \sqrt{M(u')}\, d\lambda = \sqrt{M(u')}\,\lambda = \sqrt{M(u)}.$$

Donc $\sqrt{M(u)}$ représente l'éloignement des deux droites A (ou Oz) et (u) sur un hélicoïde passant par ces deux droites.

Mais t_1, t_2, t_3, t_4 sont les cooordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur A.

Les formules (11) permettent donc de passer des coordonnées polaires aux coordonnées normales. En appelant *paramètres directeurs* d'une corrélation les quantités $\frac{t_i}{\sqrt{M(t)}}$, ainsi qu'on le fait pour les directions, on peut dire que *les coordonnées normales sont égales aux produits de l'éloignement géodésique par les paramètres directeurs d'une corrélation.*

On sait que, si α, β, γ sont les paramètres directeurs d'une direction de droite et ρ la distance à l'origine d'un point de cette droite, on a

$$x = \alpha\rho, \quad y = \beta\rho, \quad z = \gamma\rho;$$

ces formules et les formules (11) sont complètement analogues. Ainsi, *les coordonnées normales sont analogues aux coordonnées rectilignes dans l'espace ponctuel.*

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

76. Comme application des formules (10), nous avons cherché si, pour un système convenable de coordonnées de la ligne droite, la forme

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2}$$

Digitized by Google

était réductible à une forme à coefficients constants. D'après un théorème sur les formes de différentielles dû à M. Lipschitz, il est nécessaire et suffisant de chercher si le type normal du moment élémentaire est une forme à coefficients constants.

Nous avons calculé le coefficient de du_1^2 dans le type normal; nous avons trouvé une expression compliquée et qui n'est point constante; donc : *Parmi les formes quadratiques et quaternaires qui appartiennent à la même classe* (1) *que*

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2},$$

il n'y en a aucune qui ait tous ses coefficients constants.

77. Ce qui caractérise un espace linéaire, c'est précisément la possibilité de trouver une forme à coefficients constants et appartenant à la même classe que la forme fondamentale à laquelle on rapporte cet espace.

Par exemple, $dx^2 + dy^2$ caractérise l'espace plan et les surfaces qui lui sont applicables : la forme $dx^2 + dy^2 + dz^2$ caractérise l'espace euclidien, qui est linéaire.

Ainsi, adopter pour forme fondamentale le moment élémentaire revient à considérer l'espace réglé comme un espace non linéaire à quatre dimensions. On sait que, chez Plücker et les géomètres allemands, l'espace réglé est conçu comme un espace *quadratique* à quatre dimensions. On pourrait rapprocher le résultat que nous venons d'obtenir de cette conception.

78. Ce que nous venons de dire pour l'espace réglé est applicable à tout complexe ou à toute congruence. Le moment est dans un cas une forme quadratique ternaire, dans l'autre une forme quadratique binaire; car les coordonnées d'une ligne droite s'expriment avec trois paramètres si elle décrit un complexe, et avec deux si elle décrit une congruence.

---

(1) Nous disons avec M. Lipschitz que deux formes des différentielles $du_1, \ldots$ et $dv_1, \ldots$ sont de la même classe quand une transformation faisant passer des variables u aux variables v les rend *identiques*.

Digitized by Google

Le calcul appliqué aux complexes et aux congruences linéaires ne conduit pas à des intégrations aussi faciles et aussi simples que dans le cas de l'espace réglé.

Nous nous contenterons actuellement de ces indications, pour passer à l'étude des propriétés du second ordre, fondées sur l'analogie que nous avons établie entre les complexes linéaires et les sphères dans un espace à quatre dimensions.

II. — Sur les droites infiniment voisines d'une droite d'un complexe linéaire.

79. Reprenons les coordonnées quadruplement orthogonales, qui sont les constantes des équations de la droite mises sous la forme

$$x = (u_1 + iu_3)z + (-u_2 + iu_4),$$
$$y = (u_2 + iu_4)z + (\quad u_1 - iu_3).$$

Le moment de deux droites (u'), (u'') a généralement pour expression

$$\frac{\Sigma(u'_i - u''_i)^2}{\sqrt{1+(u'_1+iu'_3)^2+(u'_2+iu'_4)^2}\sqrt{1+(u''_1+iu''_3)^2+(u''_2+iu''_4)^2}}.$$

Un complexe linéaire passant par l'axe Oz a pour équation

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma a_i u_i = 0, \tag{2}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que les droites (u'), (u'') soient conjuguées par rapport à ce complexe s'exprime par les équations

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \dfrac{\lambda u'_i + \mu u''_i}{a_i}, \\ \lambda \Sigma u_i'^2 + \mu \Sigma u_i''^2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Les premières équations (3) sont satisfaites en prenant

$$u'_i = a_i - \mu\rho_i, \quad u''_i = a_i + \lambda\rho_i,$$

où ρ_i désigne une arbitraire qui change de valeur avec son indice. En portant dans la dernière des équations (3), on trouve

$$\Sigma a_i^2 + \lambda\mu\Sigma\rho_i^2 = 0. \tag{4}$$

Digitized by Google

Posons

$$S' = \Sigma u_i'^2 - 2\Sigma a_i u_i';$$

on trouve

$$S' = \mu^2 \Sigma \rho_i^2 - \Sigma a_i^2,$$

ou, à cause de (4),

$$S' = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \Sigma a_i^2. \tag{5}$$

Posons

$$T = \Sigma (u_i' - u_i')^2;$$

on trouve

$$T = (\lambda + \mu)^2 \Sigma \rho_i^2 = -\frac{(\lambda + \mu)^2}{\lambda \mu} \Sigma a_i^2,$$

d'où enfin

$$T = \frac{\left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2}{1 + \frac{S'}{\Sigma a_i^2}}.$$

Supposons que la droite (u') soit infiniment voisine de Oz, il en sera évidemment de même de (u''), et le moment (u', u'') des droites (u') et (u'') a pour expression

$$(u', u'') = T(1 - \varepsilon^2),$$

où ε^2 désigne un infiniment petit du second ordre.

Soit p l'ordre du résultat de la substitution de u_1', u_2', u_3', u_4' dans le premier membre de l'équation du complexe, quantité que nous appelons S'. On a

$$T = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2 (1 - \varepsilon'^p),$$

où ε'^p est un infiniment petit de l'ordre p. Donc

$$(u', u'') = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2 (1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon'^p).$$

Si $p = 1$, ce qui est le cas général, aux infiniment petits du troisième ordre près, on a

$$(u', u'') = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2;$$

le moment (u', u'') est du second ordre.

Digitized by Google

Si $p = 2$, aux infiniment petits du *sixième* ordre près, on a

$$(u', u'') = \left(\frac{S'}{\Sigma a_i^2}\right)^2;$$

le moment (u', u'') est du quatrième ordre, etc.

Ainsi :

Le moment, par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire, d'une droite infiniment voisine d'une droite de ce complexe, est généralement du second ordre. Ce moment est proportionnel au carré du résultat de la substitution des coordonnées de la droite dans le premier membre de l'équation du complexe.

III. — Propriétés du second ordre des surfaces réglées.

80. Soient $f(u) = 0$, $\varphi(u) = 0$, $\psi(u) = 0$ les équations d'une surface réglée. En conservant des notations déjà employées, deux différentiations successives donnent

$$\Sigma U_i\, du_i = 0, \quad \Sigma V_i\, du_i = 0, \quad \Sigma W_i\, du_i = 0,$$
$$\Sigma U_i\, d^2 u_i + \Sigma U_{ij}\, du_i\, du_j = 0,$$
$$\Sigma V_i\, d^2 u_i + \Sigma V_{ij}\, du_i\, du_j = 0,$$
$$\Sigma W_i\, d^2 u_i + \Sigma W_{ij}\, du_i\, du_j = 0.$$

Supposons que nous nous proposions d'étudier la surface autour d'une de ses droites prise pour axe Oz.

Désignons par U_i^0, V_i^0, W_i^0 ce que deviennent les dérivées partielles quand on y suppose les u nuls, et désignons par $U_0(du)$, $V_0(du)$, $W_0(du)$ ce que deviennent les sommes $\Sigma U_{ij}\, du_i\, du_j$, ...

L'équation générale des complexes linéaires tangents à la surface sera

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma(lU_i^0 + mV_i^0 + nW_i^0)\, u_i = 0.$$

Si dans cette équation on substitue les coordonnées $(du + \frac{1}{2} d^2 u)$ de la droite de la surface infiniment voisine de Oz, on trouve pour résultat, à cause des équations

$$\Sigma U_i^0\, du_i = 0, \quad \Sigma V_i^0\, du_i = 0, \quad \Sigma W_i^0\, du_i = 0,$$
$$S' = \Sigma\, du_i^2 - \Sigma(lU_i^0 + mV_i^0 + nW_i^0)\, d^2 u_i + \varepsilon^3.$$

Digitized by Google

Donc :

Le moment d'une droite A *d'une surface réglée par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire tangent à la surface suivant une droite infiniment voisine de* A *est du quatrième ordre.*

L'expression de S′ peut se transformer si l'on a égard aux équations

$$\Sigma U_i^0 d^2 u_i = -U_0(du), \quad \Sigma V_i^0 d^2 u_i = -V_0(du), \quad \Sigma W_i^0 d^2 u_i = -W_0(du);$$

on trouve

$$S' = \Sigma du_i^2 + lU_0(du) + mV_0(du) + nW_0(du) + \varepsilon^3.$$

On peut se proposer de chercher s'il existe des complexes linéaires tangents à la surface pour lesquels le moment soit d'un ordre supérieur au quatrième. Il suffit évidemment de poser

$$\Sigma du_i^2 + lU_0(du) + mV_0(du) + nW_0(du) = 0;$$

le moment est alors du sixième ordre. Parmi les complexes tangents qui sont triplement indéterminés, les complexes que nous venons de trouver forment un système doublement indéterminé. On pourrait appeler ces complexes *osculateurs*.

Ils forment un système linéaire et ont par suite en commun un même hyperboloïde, que nous appellerons *l'hyperboloïde osculateur* de la surface.

En exprimant que le moment était du sixième ordre, nous avons écrit, au fond, que les droites de la surface

$$\begin{aligned} &D, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0, \\ &D', \quad du_1, \; du_2, \; du_3, \; du_4, \\ &D'', \quad 2\,du_1 + d^2u_1, \; 2\,du_2 + d^2u_2, \; 2\,du^3 + d^2u_3, \; 2\,du_4 + d^2u_4 \end{aligned}$$

étaient dans le complexe. Ces trois droites appartiennent donc aux complexes osculateurs, et par suite à leur hyperboloïde commun. On retrouve ainsi la définition habituelle de l'hyperboloïde osculateur.

Rappelons que *les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde osculateur sont les tangentes asymptotiques de la surface réglée le long de la génératrice considérée.*

La raison en est la suivante : les génératrices Δ d'un système rencontrent trois droites consécutives D, D′, D″ de la surface; chacune est donc une tangente inflexionnelle de la surface.

Digitized by Google

L'hyperboloïde osculateur s'offre ainsi comme le lieu des droites qui en des points d'une même génératrice rectiligne de la surface ont avec elle un contact du second ordre.

81. On pourrait se proposer de chercher celles de ces droites pour lesquelles le contact est du troisième ordre.

Allons jusqu'aux quantités du troisième ordre dans le calcul de S'; nous trouverons que le résultat de la substitution, s'il s'agit d'un complexe osculateur, affecte la forme

$$S' = E + lF + mG + nH + \varepsilon^4,$$

où E, F, G, H désignent des expressions du troisième ordre. Si l'on pose encore

$$E + lF + mG + nH = 0,$$

on définit des complexes *surosculateurs* pour lesquels le moment n'est plus que du huitième ordre.

Ces complexes forment parmi les complexes osculateurs un faisceau : ils ont donc une congruence linéaire commune; les directrices de cette congruence sont deux génératrices Δ_1, Δ_2 de l'hyperboloïde osculateur. Mais si l'on remarque que la dernière équation écrite, jointe à celles qui expriment que les droites D, D', D'' appartiennent aux complexes considérés, exprime en outre que la droite $(o + 3\,du + 3\,d^2u + d^3u)$ appartient à ces complexes, on voit que :

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont les génératrices de l'hyperboloïde osculateur qui ont avec la surface un contact du troisième ordre.

82. Il est clair qu'en exprimant que le moment est du dixième ordre on arriverait à obtenir un complexe linéaire unique contenant cinq génératrices consécutives de la surface.

Nous n'avons rien dit des congruences linéaires osculatrices de la surface, il est clair qu'on les obtiendrait comme intersection de deux complexes osculateurs quelconques. En particulier, il existe une congruence linéaire surosculatrice commune à tous les complexes linéaires surosculateurs. C'est celle dont Δ_1 et Δ_2 sont les deux directrices.

Avant de terminer ce qui a trait aux surfaces réglées, nous pouvons

Digitized by Google

parler d'une analogie avec les courbes, et qui rapproche encore les corrélations des directions.

Les directions normales à une courbe forment un faisceau plan; parmi elles, il y en a une qui est perpendiculaire aussi à la tangente infiniment voisine : c'est la binormale.

Si l'on considère les complexes tangents à la surface proposée, leurs corrélations normales forment un réseau linéaire (r_0) dont la corrélation focale est la corrélation de Chasles (c_0) relative à la surface.

Les corrélations normales des complexes osculateurs forment au contraire une série linéaire (s_0), comprise dans le réseau (r_0); comme les complexes osculateurs sont tangents suivant deux droites successives, on peut dire que (s_0) est la série des corrélations binormales, de même que (r_0) est le réseau des corrélations normales.

Les couples inverses des couples focaux de la série (s_0) *sont précisément ceux qui contiennent sur la surface les droites* Δ_1 *et* Δ_2 *déjà trouvées.*

IV. — Propriétés du second ordre des congruences.

83. Conservons les mêmes coordonnées et les mêmes notations que précédemment, et soient

$$f(u) = 0, \quad \varphi(u) = 0$$

les équations d'une congruence passant par l'axe Oz.

Le système des complexes linéaires tangents est défini par l'équation

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma(l\mathrm{U}_i^0 + m\mathrm{V}_i^0)u_i = 0.$$

Transportons dans le premier membre de cette équation les coordonnées $\left(du + \frac{1}{2}d^2u + \frac{1}{6}d^3u, \ldots\right)$ d'une droite infiniment voisine de Oz et appartenant à la congruence. On trouve

$$\mathrm{S}' = \Sigma(du_i)^2 - \Sigma(l\mathrm{U}_i^0 + m\mathrm{V}_i^0)d^2u + \varepsilon^3,$$

où

$$\varepsilon^3 = \Sigma du\, d^2u - \frac{1}{3}\Sigma(l\mathrm{U}_i^0 + m\mathrm{V}_i^0)d^3u_i + \ldots.$$

car les équations

$$(e) \qquad \Sigma\mathrm{U}_i^0\, du_i = 0, \quad \Sigma\mathrm{V}_i^0\, du_i = 0$$

Digitized by Google

font disparaître les termes du premier ordre de S'. Le terme principal de S', à cause des relations

$$\Sigma U_i^0\, d^2u_i = -U_0(du), \quad \Sigma V_i^0\, d^2u_i = -V_0(du),$$

devient d'ailleurs

$$\Sigma(du_i)^2 + l\,U_0(du) + m\,V_0(du).$$

Donc :

Le moment d'une droite A *d'une congruence, par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire tangent à la congruence suivant une droite infiniment voisine de* A, *est généralement du quatrième ordre.*

L'équation

$$(e') \qquad \Sigma(du_i)^2 + l\,U_0(du) + m\,V_0(du) = 0$$

exprime que ce moment est du sixième ordre.

Si l'on rapproche les équations (e) de l'équation (e'), on voit que le complexe linéaire tangent étant fixé, c'est-à-dire l, m étant choisis, les équations (e) et (e') définissent deux corrélations anharmoniques (du'), (du'') de la congruence, et toutes les droites de cette congruence, qui définissent sur cette droite l'une ou l'autre de ces corrélations, jouissent de la propriété de donner, par rapport au complexe linéaire tangent fixé (l, m), un moment du sixième ordre.

Cela permet de dire que tout complexe linéaire tangent d'une congruence est *osculateur suivant deux corrélations anharmoniques de la congruence.*

L'étude préalable qui a été faite des singularités permet d'expliquer ce résultat. En effet, chaque complexe linéaire tangent détermine dans la congruence une surface réglée, pour laquelle Oz est une droite double : les deux corrélations (du'), (du'') sont celles qui se rapportent à cette droite double.

Les équations (e) et (e') expriment que les droites successives (du), $(2\,du + d^2u)$ de la congruence $(f = 0, \varphi = 0)$ appartiennent au complexe (l, m) ; de là cette conclusion :

Chaque complexe linéaire tangent est osculateur pour deux séries de surfaces de la congruence ; les surfaces d'une même série se raccordent suivant l'une des deux corrélations (du') *ou* (du'').

Digitized by Google

Réciproquement, donnons-nous une corrélation (du') de la congruence; l'équation

$$(e'') \qquad \Sigma(du'_i)^2 + lU_0(du') + mV_0(du') = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le moment, par rapport au complexe (l, m) des droites de la congruence qui définissent sur Oz la corrélation (du'), soit du sixième ordre; ou, encore, la condition pour que le complexe linéaire tangent (l, m) soit osculateur pour l'une quelconque des surfaces réglées de la congruence proposée, qui se raccordent suivant Oz et suivant la corrélation (du').

Ces complexes forment un faisceau; ils ont donc en commun une congruence linéaire.

Nous parvenons de la sorte à la notion de *congruence linéaire oscuatrice* d'une congruence suivant une corrélation donnée.

Cette congruence s'offre en même temps *comme le lieu des hyperboloïdes osculateurs des surfaces de la congruence proposée* $(f = 0, \varphi = 0)$, *qui définissent sur* Oz *la même corrélation* (du').

Le rapprochement de cette proposition de celle qui a trait aux surfaces ne sera peut-être pas sans intérêt.

On sait que le lieu des cercles osculateurs des courbes décrites sur une surface, et qui sont tangentes en un point à une même droite, est précisément la sphère tangente en ce point à la surface, et qui oscule cette surface, suivant la direction définie par la droite.

De même, le lieu des hyperboloïdes osculateurs des surfaces réglées d'une congruence qui sont tangentes, suivant une droite et suivant une corrélation fixe sur cette droite, est précisément la congruence linéaire tangente suivant cette droite, et qui oscule la congruence proposée suivant la corrélation fixe.

On peut, en conséquence, regarder cette proposition comme l'analogue du *théorème de Meusnier*.

84. C'est ici le cas de nous reporter à ce que nous avons dit sur les surfaces focales d'une congruence.

Désignons par (a, α), (b, β) les couples focaux.

Le plan β touche au point a la nappe A de la surface focale; le plan α touche en b la nappe B.

Digitized by Google

Une surface réglée S de la congruence est circonscrite aux deux nappes suivant deux courbes, dont nous désignons par *at* et *bs* les tangentes en *a* et *b*.

Désignons également par $a\theta$ et $b\sigma$ les génératrices des deux développables, respectivement circonscrites à la surface réglée et à une des nappes de la surface focale.

Les droites *at* et $a\theta$ sont deux tangentes conjuguées sur la nappe A; les droites *bs* et $b\sigma$ sont deux tangentes conjuguées sur la nappe B.

Désignons par *al* et *bm* les deux directrices de la congruence osculatrice qui correspond à la corrélation que définit, sur la droite du système que l'on considère, la surface réglée proposée S.

Ces deux directrices sont deux génératrices de tous les hyperboloïdes osculateurs des surfaces de la congruence, qui se raccordent avec la surface S suivant la droite *ab* considérée.

Ainsi, l'on connaît les tangentes asymptotiques de la surface S au point *a*; ce sont : la droite *al* et la génératrice *ab*.

Mais *at* et $a\theta$ sont deux tangentes conjuguées sur la surface. Donc :

Les droites at et aθ, ab et al forment un faisceau harmonique.

Les droites *at* et $a\theta$ sont donc définies lorsque l'on connaît *al*, c'est-à-dire que :

Les droites at et aθ sont les mêmes pour toutes les surfaces réglées de la congruence qui se raccordent suivant la droite ab.

Les mêmes raisonnements s'appliquent évidemment aux droites *bs*, $b\sigma$, *bm*.

Ceci montre que, à toute corrélation de la congruence, il correspond un système unique et déterminé de droites, telles que

$$at,\ a0,\ al,\ bs,\ b\sigma,\ bm.$$

Il est clair d'ailleurs que l'on pourra déduire les droites *at*, $a\theta$ de la connaissance de la droite *al*, et les droites *bs*, $b\sigma$ de celle de la droite *bm*.

Il suffit donc, pour étudier la correspondance géométrique entre ces diverses droites, d'étudier celle qui existe entre les directrices *al* et *bm*.

Digitized by Google

85. Remarquons que, si l'on envisage les courbes R_a, S_a du n° 25, la tangente à la courbe S_a qui passe en a est la droite at, et, comme la surface circonscrite à la nappe A le long de S_a est développable, on en déduit que $a\theta$ coïncide avec at, c'est-à-dire avec la tangente à R_a. Donc :

Les courbes R_a *et* S_a *forment un réseau conjugué sur la nappe* A : *les courbes* R_b *et* S_b *forment un réseau conjugué sur la nappe* B.

86. Pour compléter ce qui a trait à la correspondance entre les droites at, $a\theta$, al, bs, $b\sigma$, bm, il suffit d'étudier la correspondance des droites al et bm des couples (a, β) et (b, α).

Reprenons les équations

$$\Sigma u_i^2 - 2\Sigma(l U_i^0 + m V_i^0) u_i = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma(du_i)^2 + l U_0(du) + m V_0(du) = 0. \tag{2}$$

La première équation représente un complexe linéaire tangent ; la seconde exprime que ce complexe est osculateur suivant la corrélation (du).

Remarquons qu'il est permis de supposer que $f(u) = 0$ et $\varphi(u) = 0$ représentent deux complexes singuliers, formés des tangentes aux deux surfaces focales, c'est-à-dire qu'on peut supposer

$$\Sigma(U_i^0)^2 = 0, \quad \Sigma(V_i^0)^2 = 0.$$

La condition pour que le complexe linéaire (1) soit spécial se réduit alors à

$$lm = 0.$$

Faisons d'abord $m = 0$; le complexe spécial osculateur correspondant a pour axe, eu égard à l'équation (2), une droite (u') qui a pour coordonnées

$$u_i' = -U_i^0 \frac{\Sigma(du_i)^2}{U_0(du)}.$$

En faisant $l = 0$, on a une seconde droite (u'') et

$$u_i'' = -V_i^0 \frac{\Sigma(du_i)^2}{V_0(du)}.$$

Digitized by Google

Les droites (u') et (u'') sont les directrices de la congruence osculatrice commune aux complexes osculateurs définis par les équations (1) et (2).

Cela posé, on peut exprimer les u relatifs aux droites de la congruence en fonction de deux paramètres p_1 et p_2; $\Sigma(du_i)^2$ deviendra $M(dp)$, $U_0(du)$ et $V_0(du)$ deviendront $G(dp)$ et $H(dp)$. On aura ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} u'_i = -U_i^0 \dfrac{M(dp)}{G(dp)}, \\ u''_i = -V_i^0 \dfrac{M(dp)}{G(dp)}. \end{cases}$$

Si l'on veut passer des coordonnées u aux coordonnées a, b, p, q; en posant

$$\begin{aligned} A' &= -(U_1^0 + iU_3^0), & A'' &= -(V_1^0 + iV_3^0), \\ B' &= -(U_2^0 + iU_4^0), & B'' &= -(V_2^0 + iV_4^0), \\ P' &= U_2^0 - iU_4^0, & P'' &= V_2^0 - iV_4^0, \\ Q' &= -U_1^0 + iU_3^0, & Q'' &= -V_1^0 + iV_3^0, \end{aligned}$$

et appelant (a', b', p', q'), (a'', b'', p'', q'') les coordonnées des droites al, bm, on trouve

$$(4)\qquad \begin{cases} a' = A'\dfrac{M}{G}, & a'' = A''\dfrac{M}{H}, \\ b' = B'\dfrac{M}{G}, & b'' = B''\dfrac{M}{H}, \\ p' = P'\dfrac{M}{G}, & p'' = P''\dfrac{M}{H}, \\ q' = Q'\dfrac{M}{G}, & q'' = Q''\dfrac{M}{H}, \end{cases}$$

et l'on doit avoir

$$A'Q' - B'P' = 0, \quad A''Q'' - B''P'' = 0.$$

Ces équations définissent entièrement la congruence linéaire osculatrice de la congruence proposée, suivant la corrélation anharmonique de cette congruence qui correspond aux valeurs dp_1, dp_2 des différentielles des variables indépendantes p_1 et p_2.

87. D'après ce que nous avons dit, tout hyperboloïde qui admet al et bm pour directrices et qui définit sur Oz la corrélation anharmo-

Digitized by Google

nique (dp) est osculateur pour une surface de la congruence qui définit sur Oz la même corrélation. On en conclut que toute droite qui rencontre à la fois al et bm est une génératrice d'un hyperboloïde osculateur de la congruence. Cela montre que *les génératrices des hyperboloïdes osculateurs relatifs à toutes les surfaces réglées d'une congruence, et pour une même droite de cette congruence, forment un complexe* (1). Il est intéressant de connaître son degré. Il suffit de chercher la classe de son enveloppe dans un plan. Une transformation homographique permet toujours de prendre ce plan pour xOy. Or l'enveloppe de la droite qui joint les points

$$(x=p', y=q'), \quad (x=p'', y=q'')$$

est de la seconde classe. Car si l'on cherche à lui mener une tangente par un point (x, y) du plan, on aura à résoudre le système d'équations

$$ux+vy+w=0, \quad u\mathrm{P}'+v\mathrm{Q}'+w\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{M}}=0, \quad u\mathrm{P}''+v\mathrm{Q}''+w\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}}=0.$$

L'élimination de u, v, w conduit à l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \mathrm{P}' & \mathrm{Q}' & \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{M}} \\ \mathrm{P}'' & \mathrm{Q}'' & \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est de la forme

$$\mathrm{A.G}+\mathrm{B.H}+\mathrm{C.M}=0,$$

et qui est du second degré en $dp_1 : dp_2$. Par tout point du plan on peut donc mener deux tangentes à l'enveloppe.

De là ce théorème, qui est l'expression de la correspondance géométrique entre les droites al et bm, directrices d'une congruence osculatrice.

Les génératrices des hyperboloïdes osculateurs des surfaces réglées

(1) L'étude de ce complexe est étroitement liée avec celle des propriétés relatives à la coïncidence des corrélations (du'), (du'') définies au n° 83. On en déduit de nouvelles propriétés des surfaces focales que nous n'avons pas développées ici.

Digitized by Google

d'une congruence relativement à une droite fixe de cette congruence appartiennent à un complexe du second degré.

Ce complexe est aussi le lieu des congruences osculatrices.

Pour obtenir son équation il suffirait d'éliminer $dp_1 : dp_2$ entre les équations d'une quelconque de ces congruences

$$\frac{\Sigma du_i^2}{-\mathrm{M}(dp)} = \frac{+2\Sigma \mathrm{U}_i^0 u_i}{\mathrm{G}(dp)} = \frac{2\Sigma \mathrm{V}_i^0 u_i}{\mathrm{H}(dp)}.$$

88. Résumons les propriétés du second ordre des congruences.

Si sur une droite D d'une congruence on se donne une corrélation (dp) de la congruence, il lui correspond une congruence linéaire tangente C dont nous disons qu'elle est osculatrice suivant la corrélation (dp). La congruence C est le lieu des hyperboloïdes osculateurs de toutes les surfaces réglées de la congruence qui se raccordent suivant la corrélation (dp). C'est l'analogue du théorème de Meusnier.

Enfin, la correspondance entre la corrélation (dp) et la congruence C, qui peut être considérée comme l'analogue de celle que définit la relation d'Euler, est donnée par la remarque qui a été faite, que la directrice *al* de la congruence C et la droite D forment un faisceau harmonique avec *at* et $a\theta$ (droites qui sont connues lorsque l'on connaît la corrélation (dp). Cette remarque est complétée par ce théorème que :

Si l'on prend les traces l et m sur un plan des directrices al et bm d'une congruence C *osculatrice suivant une corrélation* (dp), *lorsque cette corrélation varie, la droite lm roule sur une conique.*

89. On peut, d'ailleurs, donner à la correspondance entre la corrélation (dp) et la congruence C une forme analytique la rapprochant de la relation d'Euler.

Appelons α_1 et α_2 les angles de la corrélation (dp) avec les corrélations $dp_2 = 0$, $dp_1 = 0$ de la congruence. Si l'on représente une congruence linéaire tangente par les équations

$$\Sigma u_i^2 + 2\mathrm{R}\Sigma \mathrm{U}_i^0 u_i = 0,$$
$$\Sigma u_i^2 + 2\mathrm{R}'\Sigma \mathrm{V}_i^0 u_i = 0,$$

pour qu'elle soit osculatrice suivant la corrélation (dp), il faut et il

Digitized by Google

suffit qu'on ait

$$\frac{1}{R} = \frac{G(dp)}{M(dp)}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{H(dp)}{M(dp)}.$$

Mais si

$$G(dp) = G_{11}dp_1^2 + 2G_{12}dp_1dp_2 + G_{22}dp_2^2,$$
$$H(dp) = H_{11}dp_1^2 + 2H_{12}dp_1dp_2 + H_{22}dp_2^2,$$

on a

$$\frac{1}{R} = G_{11}\cos^2\alpha_1 + 2G_{12}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + G_{22}\cos^2\alpha_2,$$

$$\frac{1}{R'} = H_{11}\cos^2\alpha_1 + 2H_{12}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + H_{22}\cos^2\alpha_2.$$

Ces formules, on le voit, offrent un certaine ressemblance avec la relation d'Euler.

Si, en particulier, les corrélations $dp_1 = 0$, $dp_2 = 0$ sont orthogonales, $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$\frac{1}{R} = G_{11}\cos^2\alpha_1 + 2G_{12}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + G_{22}\sin^2\alpha_1,$$

$$\frac{1}{R'} = H_{11}\cos^2\alpha_1 + 2H_{12}\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + H_{22}\sin^2\alpha_1.$$

Au lieu de prendre les variables p_1 et p_2 de sorte que $M(dp)$ ait la forme canonique privée des rectangles, on peut choisir ces variables de sorte que G et H soient simultanément ramenées à cette forme. Cela est possible, et d'une seule manière en général. Dans ce cas, les relations précédentes prennent la forme simple

$$\frac{1}{R} = G_{11}\cos^2\alpha_1 + G_{22}\cos^2\alpha_2,$$

$$\frac{1}{R'} = H_{11}\cos^2\alpha_1 + H_{22}\cos^2\alpha_2.$$

On peut donner à ces équations une signification moins abstraite par la remarque suivante. Appelons λ et μ les angles que les droites *al* et *bm* font avec Oz; en vertu des formules du n° 86, on a

$$\frac{A'^2 + B'^2}{\tan g^2\lambda} = \frac{G^2}{M^2},$$

Digitized by Google

d'où

$$\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{\tan\lambda}=\frac{G}{M};$$

de même,

$$\frac{\sqrt{A''^2+B''^2}}{\tan\mu}=\frac{H}{M},$$

et, en posant, $K'=\sqrt{A'^2+B'^2}$, $K''=\sqrt{A''^2+B''^2}$,

$$\frac{K'}{\tan\lambda}=G_{11}\cos^2\alpha_1+G_{22}\cos^2\alpha_2,$$
$$\frac{K''}{\tan\mu}=H_{11}\cos^2\alpha_1+H_{22}\cos^2\alpha_2.$$

Dans ces formules, les premiers membres ont une signification concrète.

Les congruences osculatrices sont alors définies par leurs directrices.

Dans les formules précédentes, on doit remarquer que, si ω est l'angle des corrélations $dp_1=0$, $dp_2=0$ de la congruence, on a sans cesse

$$1=\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+2\cos\omega\cos\alpha_1\cos\alpha_2.$$

Cette équation, jointe aux précédentes, permettrait de trouver l'équation du second degré qui lie $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ ou bien $\cot\lambda$ et $\cot\mu$.

V. — Propriétés du second ordre des complexes.

90. En prenant pour axe Oz une droite D du complexe, l'équation générale des complexes linéaires tangents est la suivante

$$\Sigma u_i^2-2\lambda\Sigma U_i^0 u_i=0, \tag{1}$$

où les notations précédentes sont conservées.

La substitution des coordonnées d'une droite du complexe

$$(du+\tfrac{1}{2}d^2u+\ldots)$$

infiniment voisine de la droite D donne

$$S'=\Sigma(du_i)^2+\lambda U_0(du)+\varepsilon^3,$$

Digitized by Google

où

$$\varepsilon^3 = \Sigma du_i d^2 u_i - \tfrac{1}{3}\Sigma U_i^0 d^3 u_i + \dots.$$

Donc :

Le moment d'une droite d'un complexe, par rapport à sa conjuguée dans un complexe linéaire tangent suivant une droite infiniment voisine de la première, est généralement du quatrième ordre.

On peut déterminer le complexe linéaire tangent de sorte que le moment soit seulement du sixième ordre. Il suffit pour cela de prendre λ de telle sorte que

$$\Sigma(du_i)^2 + \lambda U_0(du) = 0. \tag{2}$$

Ainsi, comme λ ne dépend dans cette équation que des coordonnées de la corrélation (du), on voit qu'à toute corrélation (du) sur une droite D d'un complexe appartenant à ce complexe il correspond en général un complexe linéaire tangent suivant D qui jouit de la propriété que le moment par rapport à sa conjuguée dans ce complexe linéaire de toute droite du complexe proposé, qui définit sur D la corrélation (du), est du sixième ordre.

Inversement, si l'on se donne un complexe linéaire tangent, c'est-à-dire λ, l'équation (2) définit une série quadratique de corrélations dans le réseau linéaire du complexe.

On peut dire que le complexe (λ) *est osculateur du complexe proposé suivant une quelconque des corrélations du complexe appartenant à la série quadratique* (2).

Cette correspondance entre les complexes linéaires tangents et les séries quadratiques (2) était facile à prévoir, d'après ce que nous avons dit sur les singularités des congruences.

En effet, chaque complexe linéaire tangent coupe le complexe proposé suivant une congruence pour laquelle D est une droite double, et la série quadratique (2) est celle qui se rapporte à cette droite double dans cette congruence.

Une série du *deuxième* degré correspond ainsi à un complexe linéaire tangent, de même qu'à toute sphère tangente à une surface en un point il correspond *deux* directions suivant lesquelles elle est osculatrice.

Digitized by Google

91. La correspondance que nous venons de définir est fondamentale dans la théorie des propriétés du second ordre des complexes.

Proposons-nous, en effet, de chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'un *hyperboloïde* mené par la droite D soit *osculateur* pour une surface réglée du complexe suivant la droite D.

Il est clair d'abord que tout hyperboloïde osculateur doit avant tout être *de raccordement*. Il faut et il suffit pour cela qu'il appartienne à un complexe linéaire tangent.

Or, si S désigne une surface réglée du complexe passant par D et déterminant sur cette droite la corrélation (du), il est évident que le complexe linéaire tangent du complexe qui contient son hyperboloïde osculateur est un complexe osculateur de la surface S, et par suite qu'il sera déterminé par l'équation

$$\Sigma(du_i)^2 + \lambda U_0(du) = 0. \tag{2}$$

La réciproque est vraie; considérons en effet l'hyperboloïde défini par les équations suivantes, où g_i, h_i sont des constantes,

$$\begin{cases} \Sigma u_i^2 - 2\lambda \Sigma U_i^0 u_i = 0, \\ \Sigma u_i^2 - 2\Sigma g_i u_i = 0, \\ \Sigma u_i^2 - 2\Sigma h_i u_i = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Les deux derniers complexes linéaires définissent dans le complexe proposé une surface, et il est bien clair que ces deux complexes linéaires, auxquels on associe un complexe osculateur de la surface, définissent l'hyperboloïde osculateur. Si donc le complexe linéaire tangent $\Sigma u_i^2 - 2\lambda \Sigma U_i^0 u_i = 0$ est osculateur de cette surface, c'est-à-dire si l'équation (2) est satisfaite, les équations (3) représentent un hyperboloïde osculateur d'une surface du complexe.

Ainsi :

Le complexe linéaire osculateur suivant une corrélation (du) *du complexe proposé est le lieu des hyperboloïdes osculateurs de toutes les surfaces réglées du complexe qui définissent sur la droite fixe* D *la corrélation anharmonique* (du).

De même que :

La sphère osculatrice en un point d'une surface et suivant une direction

Digitized by Google

déterminée est le lieu des cercles osculateurs des courbes tracées sur la surface et tangentes au point considéré à la direction fixe.

Il suit de là qu'on peut envisager la proposition que nous venons d'obtenir comme analogue au *théorème de Meusnier.*

92. Le théorème d'Euler indique la correspondance entre la sphère de Meusnier et la direction fixe. Dans le cas des complexes, la correspondance analogue est définie par l'équation (2); d'où il résulte qu'on doit envisager cette équation comme l'analogue de la relation d'Euler.

L'emploi de l'angle de deux corrélations rendra le rapprochement plus frappant.

Si l'on effectue une transformation de coordonnées, on peut amener les coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4 de toute droite du complexe à ne dépendre que de trois variables; de sorte que $M(du)$ et $U_0(du)$ deviendront deux formes quadratiques ternaires des différentielles.

Ces trois variables peuvent elles-mêmes être transformées en d'autres qui soient telles que la forme fondamentale *relative à la droite* B, et la forme ternaire en laquelle $U_0(du)$ s'était transformée, et qui est à coefficients constants, se transforment en deux fonctions homogènes ternaires et du second degré, privées des rectangles des variables. Nous écartons les cas d'exception.

On aura ainsi

$$\Sigma(du_i)^2 = dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2,$$

$$-U_0(du) = \frac{dv_1^2}{R_1} + \frac{dv_2^2}{R_2} + \frac{dv_3^2}{R_3},$$

en désignant par v_1, v_2, v_3 les trois nouvelles variables indépendantes.

On détermine de la sorte dans le complexe trois corrélations remarquables, orthogonales deux à deux, et que nous appellerons les *corrélations principales;* ce sont celles que l'on obtient en annulant deux à deux les différentielles dv_1, dv_2, dv_3.

Désignons par α_i l'angle de la corrélation du complexe dont les coordonnées sont dv_i avec la corrélation principale $dv_2 = 0$, $dv_3 = 0$; de même pour les angles que nous appellerons α_2, α_3.

On a

$$\cos\alpha_i = \frac{dv_i}{\sqrt{dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2}}.$$

Digitized by Google

Posons $\lambda = R$: l'équation (2) s'écrit

$$\frac{dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2}{R} = \frac{dv_1^2}{R_1} + \frac{dv_2^2}{R_2} + \frac{dv_3^2}{R_3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_1}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{R_2} + \frac{\cos^2\alpha_3}{R_3}. \tag{2'}$$

L'équation possède ainsi la même forme que la relation d'Euler.

93. Les corrélations principales s'offrent à nous comme les analogues des tangentes aux lignes de courbure d'une surface.

Le théorème suivant rend cette analogie plus évidente.

Les complexes linéaires tangentes qui correspondent à une corrélation principale, c'est-à-dire qui sont osculateurs suivant une corrélation principale, sont des complexes linéaires tangents stationnaires (ce qui signifie que chacun d'eux est tangent au complexe proposé suivant *deux* droites infiniment voisines).

En effet, en général, la série quadratique qui correspond à la congruence que le complexe linéaire tangent (R) définit dans le complexe proposé est définie par l'équation (2), c'est-à-dire

$$dv_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) + dv_2^2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}\right) + dv_3^2\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R}\right) = 0. \tag{2}$$

Or il a été démontré que, chaque fois que la série quadratique relative à la droite double d'une congruence provenant de deux complexes tangents se décomposait en deux séries linéaires, les deux complexes étaient tangents suivant deux droites consécutives. Les deux séries ont dans ce cas une corrélation commune : c'est celle que détermine sur la droite D de contact la droite de contact infiniment voisine D'.

Appliquons ce résultat au cas présent.

Pour $dv_2 = 0$, $dv_3 = 0$, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = 0, \quad \text{ou} \quad R = R_1.$$

Ainsi, à la corrélation principale (1, 0, 0) correspond le complexe

Digitized by Google

linéaire tangent (R_1). Mais il est clair que pour $R = R_1$ la série quadratique se décompose; le théorème est donc démontré.

La corrélation $dv_2 = 0$, $dv_3 = 0$ est bien celle que définit sur D la droite de contact infiniment voisine.

Dans tout complexe il y a donc, en général, pour chaque droite trois complexes linéaires tangents stationnaires.

Ils correspondent à $R = R_1, R_2, R_3$.

C'est M. Klein qui a découvert ces complexes.

Considérons une surface réglée du complexe telle que la corrélation qu'elle définit sur chacune de ses génératrices soit une corrélation principale du complexe.

Nous appellerons, avec M. Klein, *surfaces principales du complexe* de pareilles surfaces.

THÉORÈME. — *Par toute droite du complexe il passe, en général, trois surfaces principales qui sont en involution deux à deux.*

Exprimons en effet en fonction de trois variables p_1, p_2, p_3 les coordonnées des droites d'un complexe. La forme fondamentale devient $M(dp)$, et $U(du)$ devient $G(dp)$, où l'on a

$$\left.\begin{aligned} M(dp) &= \Sigma M_{ij}\, dp_i\, dp_j \\ G(dp) &= \Sigma G_{ij}\, dp_i\, dp_j \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les racines de l'équation

$$\varphi(S) = \begin{vmatrix} M_{11} - SG_{11} & M_{12} - SG_{12} & M_{13} - SG_{13} \\ M_{21} - SG_{21} & M_{22} - SG_{22} & M_{23} - SG_{23} \\ M_{31} - SG_{31} & M_{32} - SG_{32} & M_{33} - SG_{33} \end{vmatrix} = 0$$

sont des invariants absolus. En prenant la droite pour Oz, on trouverait pour racines les quantités R_1, R_2, R_3. Désignons par S une quelconque de ces racines; on sait que $\varphi(S) = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les équations suivantes soient compatibles :

$$\frac{\partial M(dp)}{\partial dp_1} - S\frac{\partial G(dp)}{\partial dp_1} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial dp_2} - S\frac{\partial G}{\partial dp_2} = 0, \quad \frac{\partial M}{dp_3} - S\frac{\partial M}{dp_3} = 0.$$

L'une est alors une conséquence des deux autres. Considérons dès

Digitized by Google

lors les trois groupes d'équations que l'on obtient en faisant successivement : $S = R_1, R_2, R_3$ dans les équations

$$\frac{\partial M}{\partial dp_1} - S\frac{\partial G}{\partial dp_1} = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial dp_2} - S\frac{\partial G}{\partial dp_2} = 0.$$

En intégrant les équations de chaque groupe, on aura trois systèmes d'intégrales contenant chacun deux constantes arbitraires. Or il est clair que chaque intégrale définira une série de surfaces principales du complexe.

En effet, si l'on envisage une droite D de cette surface, en la prenant pour axe Oz, et faisant la transformation qui nous a amené à définir les corrélations principales, on reconnaît qu'elle définit une de ces corrélations sur la droite D.

Par toute droite du complexe on pourra donc, en général, faire passer une surface principale de chaque série, et ces surfaces y seront en involution, puisque les corrélations principales (qui sont les corrélations de Chasles) sont orthogonales.

94. L'espace représentatif qui généralise le système des points de départ de Malus permet de donner une image élégante des propriétés du second ordre des complexes, de les compléter.

L'équation (2) définit effectivement un faisceau de cônes du second degré, comprenant le cône de Malus, et la recherche des surfaces principales du complexe revient à celle du trièdre conjugué commun aux cônes de ce faisceau. Toute courbe dont la tangente en chaque point est l'une des trois arêtes du trièdre qui correspond ainsi à ce point représente une surface principale du complexe.

Les cônes du faisceau ont quatre génératrices communes. Ces génératrices représentent quatre corrélations anharmoniques singulières du complexe, et, par conséquent, quatre couples de la corrélation normale.

Ces couples seront les *couples inflexionnels* du complexe.

Il résulte de ce qui précède que la connaissance du faisceau des cônes suffit pour définir les propriétés du second ordre du complexe,

Digitized by Google

pourvu que l'on sache quel est le complexe linéaire tangent qui correspond à un cône du faisceau déterminé.

Désignons par (o_1, ω_1), (o_2, ω_2), (o_3, ω_3), (o_4, ω_4) les couples inflexionnels.

D'abord, puisqu'ils appartiennent à la corrélation normale du complexe, ils sont en relation anharmonique, c'est-à-dire que les rapports anharmoniques

$$(o_1, o_2, o_3, o_4), \quad (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

sont égaux.

De plus, il est aisé de voir que l'on peut déduire de ces couples les corrélations principales. Cela résulte évidemment de la considération des cônes représentatifs.

Mais on peut le voir encore en effectuant la construction.

Il suffit de grouper deux par deux les couples inflexionnels pour définir par leurs couples focaux six séries linéaires du complexe. Associons deux à deux ces séries, de sorte que deux séries associées n'aient pas de couple focal commun : on obtient trois groupes de séries, et les deux séries d'un même groupe ont leurs couples focaux en relation anharmonique. Les deux séries d'un même groupe ont, par conséquent, une corrélation commune, et les trois corrélations ainsi obtenues sont les corrélations principales.

On remarquera que les plans correspondant au point o_1 dans ces trois corrélations sont les plans ω_2, ω_3, ω_4.

Cette remarque permet de définir par trois couples chaque corrélation principale, ou plus exactement, par quatre couples en relation anharmonique.

C'est ainsi que les quatre couples situés sur une des trois lignes ci-dessous appartiennent à une même corrélation principale :

$$(o_1, \omega_2), \quad (o_2, \omega_1), \quad (o_3, \omega_4), \quad (o_4, \omega_3),$$
$$(o_1, \omega_3), \quad (o_2, \omega_4), \quad (o_3, \omega_1), \quad (o_4, \omega_2),$$
$$(o_1, \omega_4), \quad (o_2, \omega_3), \quad (o_3, \omega_2), \quad (o_4, \omega_1).$$

95. Nous allons, dans ce qui suit, développer quelques propriétés des couples inflexionnels, qui donneront lieu à des rapprochements

Digitized by Google

entre la théorie des complexes et celle des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Supposons qu'on ait pris pour variables les coordonnées a, b, p, q de la ligne droite, l'axe Oz coïncidant avec la droite D, autour de laquelle on étudie le complexe, et la corrélation normale que le complexe définit sur D ayant pour point central l'origine, et pour plan central le plan zOx.

L'équation du complexe supposée développable s'écrira

$$p = \mathrm{K}b + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}b^2 + \mathrm{Q}q^2 + 2\mathrm{A}'bq + 2\mathrm{B}'aq + 2\mathrm{Q}'ab + \mathrm{T}_3,$$

où T_3 désigne l'ensemble des termes d'un degré supérieur au second par rapport à a, b, q.

L'équation générale des complexes linéaires tangents est

$$aq - bp - 2\lambda(\mathrm{K}b - p) = 0.$$

Si l'on substitue les coordonnées d'une droite $(da + \frac{1}{2}d^2a, \ldots)$ dans le premier membre de cette équation, et qu'on suppose que cette droite appartienne au complexe, on aura

$$dp = \mathrm{K}db,$$
$$d^2p - \mathrm{K}d^2b = \mathrm{A}da^2 + \mathrm{B}db^2 + \mathrm{Q}dq^2 + 2\mathrm{A}'db\,dq + 2\mathrm{B}'da\,dq + 2\mathrm{Q}'da\,db,$$

ou, en désignant, pour abréger, par Θ le second membre de la dernière relation,

$$d^2p - \mathrm{K}d^2b = \Theta,$$

et le résultat de la substitution aura pour terme principal

$$da\,dq - \mathrm{K}db^2 + \lambda\Theta.$$

On en conclut que les équations qui définissent les couples inflexionnels sont les suivantes :

$$da\,dq - \mathrm{K}db^2 = 0, \quad \Theta = 0.$$

Posons

$$b = \rho a, \quad p = \sigma a, \quad q = \rho p = \rho\sigma a,$$

et portons ces valeurs dans l'équation du complexe, on trouve, après

Digitized by Google

la suppression du facteur a,

$$\sigma = K\rho + (Q\rho^2\sigma^2 + 2A'\rho^2\sigma + B\rho^2 + 2B'\rho\sigma + 2Q'\rho + A)a + ma^2,$$

où m désigne une série entière par rapport à a.

Les équations de la droite sont les suivantes :

$$x = a(z + \sigma), \quad y = \rho a(z + \sigma),$$

d'où l'on conclut que, si dans l'équation précédente on laisse σ constant et qu'on fasse varier ρ et a, elle représentera le cône du complexe dont les coordonnées du sommet sont o, o, $-\sigma$.

Au contraire, en faisant varier σ et a, on aura, si ρ est constant, l'équation de la courbe enveloppe du complexe dans le plan qui a pour équation

$$y = \rho x.$$

Si l'on suppose a infiniment petit et égal à da, l'équation

$$\sigma = K\rho$$

définit la corrélation normale du complexe.

Or, supposons qu'un couple (ρ_0, σ_0) de cette corrélation soit tel que, en même temps que $\sigma_0 = K\rho_0$, le coefficient de a disparaisse. On exprimera par là même que la droite

$$da, \; db, \; dp, \; dq$$

du complexe, infiniment voisine de D, vérifie les deux équations

$$da\,dq - K\,db^2 = o, \quad \theta = o.$$

On exprime donc que le couple (ρ_0, σ_0), auquel cette droite appartient, est un couple inflexionnel. Mais le système de valeurs (ρ_0, σ_0) peut être atteint en laissant constant soit $\sigma = \sigma_0$, soit $\rho = \rho_0$, et faisant varier soit ρ et a, soit a et σ.

Dans le premier cas, on voit que :

Le plan d'un couple inflexionnel est un plan tangent d'inflexion suivant la droite D *du cône du complexe dont le point du même couple est le sommet.*

Digitized by Google

La seconde manière montre au contraire la propriété corrélative, à savoir que :

Tout point d'un couple d'inflexion est un point de rebroussement de la courbe enveloppe du complexe relative au plan du même couple, et la droite D *est la tangente au point de rebroussement.*

Les couples d'inflexion forment donc, parmi les couples du complexe, une famille particulière. Un couple ordinaire ne contient que *deux* droites *infiniment voisines* du complexe. On peut dire que ce qui caractérise un couple inflexionnel, c'est d'en contenir *trois*.

Si l'on suppose que le complexe soit défini par l'équation générale

$$f(a, b, p, q) = 0,$$

en exprimant que le plan tangent suivant la droite (a, b, p, q) du complexe au cône de ce complexe est un plan tangent d'inflexion, on trouve aisément l'équation suivante qui, sur chaque droite du système, définit les quatre points des couples inflexionnels :

$$0 = \mathrm{L}(f'_b - zf'_q)^2 - 2\mathrm{M}(f'_b - zf'_q)(f'_a - zf'_p) + \mathrm{N}(f'_a - zf'_p)^2.$$

On a posé

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= f''_{a^2} - 2f''_{ap}z + f''_{p^2}z^2, \\ \mathrm{M} &= f''_{ab} - (f''_{aq} + f''_{bp})z + f''_{pq}z^2, \\ \mathrm{N} &= f''_{b^2} - 2f''_{bq}z + f''_{q^2}z^2. \end{aligned}$$

Les plans de ces couples seront donnés par l'équation

$$(\mathrm{X} - a\mathrm{Z} - p)(f'_a - zf'_p) + (\mathrm{Y} - b\mathrm{Z} - q)(f'_b - zf'_q) = 0,$$

qui représente en général le plan tangent suivant la droite (a, b, p, q) au cône du complexe dont les coordonnées du sommet sont

$$az + p, \quad bz + q, \quad z.$$

Il suffira de prendre pour z une des quatre racines de l'équation précédente.

96. Ce que nous venons de voir va nous permettre de définir dans le complexe une nouvelle série de surfaces remarquables.

Digitized by Google

Soient effectivement p_1, p_2, p_3 trois paramètres dont dépendent les coordonnées des droites du complexe, comme précédemment. Si l'on intègre le système d'équations différentielles

$$G(dp) = 0, \quad M(dp) = 0,$$

on obtiendra quatre séries de développables du complexe qui jouiront de cette propriété, que le point où une génératrice D quelconque touchera l'arête de rebroussement et le plan tangent tout du long de cette génératrice forment un couple inflexionnel.

Ce sont ces surfaces qui suffisent pour définir les propriétés du second ordre, puisque nous avons vu qu'on pouvait en déduire les corrélations principales et, par conséquent, les surfaces principales du complexe.

Les surfaces développables que nous venons de définir jouissent de la propriété d'être osculées par tous les complexes linéaires tangents du complexe proposé suivant chacune de leurs génératrices, puisque pour elles on a

$$G(dp) = 0 \quad \text{et} \quad M(dp) = 0.$$

Les courbes qui sont les arêtes de rebroussement de ces développables ne sont pas des courbes intégrales quelconques de l'équation aux dérivées partielles que le complexe définit. Elles admettent, en effet, pour tangentes les génératrices d'inflexion du cône du complexe.

Voici donc un nouveau genre de singularités qui s'offre, et qui est tout à fait analogue à celui que M. Darboux a découvert touchant les équations aux dérivées partielles.

97. Si l'on se donne, en effet, un système géométrique tel que tout point de l'espace soit le sommet d'un cône, et que tout plan de l'espace contienne une courbe déterminée, il y a lieu de distinguer suivant que le cône et la courbe relatifs à un couple du système sont définis l'un par ses plans tangents, l'autre par ses points, ou bien par les génératrices et les tangentes.

Dans la première manière, le système est défini par les surfaces intégrales; dans la seconde, par les courbes et les développables intégrales.

Digitized by Google

Tandis que dans le premier cas le cône admet normalement des plans tangents de rebroussement, et la courbe des points d'inflexion, dans le second, ces singularités sont normalement exclues et remplacées par des génératrices d'inflexion pour le cône, et par des tangentes de rebroussement pour la courbe.

M. Darboux a considéré le premier les courbes intégrales remarquables dont les tangentes sont précisément les arêtes de rebroussement des cônes du système.

Les singularités, à un certain point de vue, corrélatives de celles-là sont celles que nous signalons. Elles sont constituées par les développables enveloppées par les plans tangents d'inflexion, et par les courbes dont les tangentes sont des tangentes de rebroussement des courbes du système.

Dans le cas du complexe, nous trouvons ainsi les développables que nous avons définies plus haut, de même que leurs arêtes de rebroussement.

98. Nous avons, dans ce qui précède, supposé que les racines de l'équation $\varphi(S) = 0$ étaient inégales, finies et différentes de zéro. Les cas exceptionnels qui peuvent se présenter conduisent naturellement à de nouvelles singularités des complexes, et même à de nouveaux complexes particuliers, pour lesquels ces singularités se présentent pour toutes les droites.

Il peut arriver, par exemple, que $G(dp)$ et $M(dp)$ soient réductibles simultanément aux formes

$$a(dp_1^2 + dp_2^2) + a' dp_3^2$$

et

$$dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2,$$

ou que $G(dp)$ ne diffère de $M(dp)$ que par un facteur indépendant des différentielles.

Dans le premier cas, il existe une série linéaire de corrélations principales en involution avec une corrélation principale particulière étrangère à la série.

Dans le second cas, toutes les corrélations du complexe sont principales.

Digitized by Google

Les droites où ces singularités se présentent offrent ainsi certaines analogies avec les ombilies des surfaces.

Mais nous n'entrerons pas dans de plus amples développements sur ce sujet, non plus que sur bien d'autres qui se présentent encore et dont l'étude se déduirait aussi, par des analogies diverses avec l'espace ponctuel, de la considération de la forme quadratique fondamentale.

Il nous suffit d'avoir montré l'importance de cette forme dans la Géométrie de l'espace réglé, et d'y avoir rattaché les propriétés infinitésimales de cet espace.

Digitized by Google

COMPARAISON

DES

COEFFICIENTS D'INDUCTION,

PAR M. MARCEL BRILLOUIN,

CHARGÉ DU COURS DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

INTRODUCTION.

1. On sait de quelle importance, de quel usage journalier sont dans les laboratoires les méthodes de comparaison des résistances électriques, des forces électromotrices, des capacités. Les meilleures dispositions expérimentales ne sont pas toujours celles qui se prêtent le plus facilement au calcul théorique, même quand une très grande précision n'est pas nécessaire; c'est grâce aux méthodes de comparaison qu'il est possible de satisfaire séparément aux deux conditions. Outre les facilités qui en résultent pour les mesures absolues, ces méthodes sont indispensables dans toutes les applications industrielles, alors que les calculs directs seraient inabordables. Jusqu'ici pourtant les méthodes de comparaison des coefficients d'induction ne paraissent pas entrées dans la pratique. Ayant trouvé dans le grand Traité de Maxwell l'indication succincte de méthodes de comparaison, fondées, comme les méthodes précises citées plus haut, sur la réduction à zéro du courant dans un des fils d'un circuit fermé, j'ai entrepris d'étudier les conditions dans lesquelles ces méthodes sont sensibles et exactes.

Digitized by Google

2. Dans toutes ces méthodes, on emploie les courants induits par variation d'intensité. Lorsque, à travers un certain fil, l'intensité du courant permanent et la quantité totale d'électricité du courant instantané produit par la fermeture du circuit qui contient la pile sont nulles, il existe entre les coefficients d'induction des divers fils du circuit et leurs résistances une relation homogène séparément par rapport à ces deux ordres de variables. Sous certaines conditions, deux coefficients d'induction subsistent seuls, et leur rapport est donné par un rapport de résistances. Un galvanomètre sensible, des boîtes de résistances bien graduées et aussi rigoureusement que possible dépourvues de coefficient d'induction propre, sont les instruments essentiels.

L'électrodynamomètre, le téléphone ne pourraient remplacer le galvanomètre que dans une partie des méthodes. Ce sont en effet des instruments qui ne restent au zéro que pour un courant constamment nul. Or cette condition n'est pas satisfaite dans toutes les méthodes. Il est même toujours possible de modifier les circuits de manière que cette condition n'ait plus lieu, sans altérer ni la rigueur théorique de la méthode, ni la précision des mesures au galvanomètre. Le galvanomètre a d'ailleurs le grand avantage que ses indications changent de signe en passant par zéro.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ DES LOIS EXPÉRIMENTALES DES COURANTS INSTANTANÉS.

3. Je commence par rappeler les lois physiques sur lesquelles je m'appuierai. Ces lois, établies expérimentalement dans certains cas simples, ont été excessivement généralisées; je m'efforcerai de préciser dans quelles conditions elles sont strictement applicables; j'en indiquerai les conséquences mathématiquement rigoureuses, sans intervention des principes de la Thermodynamique, et celles qui ont un caractère hypothétique. On se heurte, en effet (n^{os} 5 et 6), en appli-

Digitized by Google

quant les lois telles qu'on les généralise, à une impossibilité logique : il est donc utile de marquer les points douteux, ceux où la généralisation a pu être trop hâtive. Ce n'est que l'ébauche d'une discussion complète, mais elle n'est pas déplacée ici; car elle me permet d'établir que les méthodes décrites dans ce travail s'appuient directement sur les lois expérimentales, dans les conditions mêmes de leur démonstration, et sont indépendantes de toute théorie.

1° *Expériences de Biot et Savart. — Loi de Laplace.* — Cette loi est relative à l'action des courants constants sur les aimants permanents. Le courant est caractérisé en grandeur par un certain facteur qu'on appelle son *intensité*. Les expériences de Colladon (1) ont montré que cette intensité, quand elle est constante, est proportionnelle au flux d'électricité, la quantité d'électricité étant définie par la loi de Coulomb.

2° *Lois de Ohm* (2). — Ces lois, relatives au partage des courants permanents entre divers conducteurs, ont été établies par analogie avec les lois de propagation de la chaleur, et rattachées par Kirchhoff (3) (1849) aux principes de l'électricité statique. Ohm (1826), Fechner (1831), les ont contrôlées au moyen d'appareils électromagnétiques. C'est au moyen des mêmes appareils que Pouillet (4) les a découvertes à nouveau. Le développement de ces lois permet de trouver des méthodes de mesures relatives, simples et précises, pour les résistances des fils et les forces électromotrices des piles.

Les vérifications de ces lois au moyen d'appareils d'électricité statique ont d'abord porté sur la valeur et la distribution des potentiels : Kohlrausch (1853) a montré (5) que les différences de potentiel et les résistances déduites des mesures électrostatiques sont identiques à celles que fournissent les mesures électromagnétiques, quand les unités sont les mêmes. Ces expériences vérifiaient donc indirectement l'iden-

---

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXIII, p. 62. — MASCART, *Traité d'Électricité statique*, t. I, p. 430.

(2) *Voir* en général : MASCART, *Traité d'Électricité statique*, t. II.

(3) *Pogg. Ann.*, t. LXXVIII. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLI.

(4) *Comptes rendus*, t. IV, p. 267.

(5) *Poggendorff Annalen*, t. LXXV et LXXVIII. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLI.

Digitized by Google

tité de l'intensité et du débit établie par Colladon. Une nouvelle confirmation a été fournie par les expériences de M. Gaugain (1) qui, grâce à l'invention de l'électromètre à décharges, a réussi à étudier les lois du débit dans les conducteurs médiocres.

4. Étudions de plus près une des conséquences des lois de Ohm, la relation qui existe entre les intensités et les flux d'électricité dans divers fils qui se réunissent en un même point.

Il est évident que, pendant l'état permanent, il ne peut y avoir accumulation indéfinie d'électricité; la somme totale des quantités d'électricité f apportées au sommet est donc nulle, dans l'état permanent,

$$\Sigma f = 0. \tag{1}$$

Lorsqu'il s'agit des intensités électromagnétiques constantes, la relation correspondante que donnent les lois de Ohm peut se déduire de la définition même de i par la loi de Laplace. On tire de cette loi, par des raisonnements mathématiques rigoureux (2), la relation

$$4\pi i = \int_C F_\sigma \, d\sigma.$$

C désigne une ligne fermée quelconque, sans point double, qui entoure le fil parcouru par le courant i; $d\sigma$ est un élément de cette ligne, et F_σ, la projection sur l'élément $d\sigma$ de la force magnétique totale en ce point de la courbe. Considérons une nappe simple d'une aire superficielle limitée à la courbe C; pour un observateur, debout sur le côté positif de cette surface, et regardant un point de la courbe limite C, l'arc σ croît vers sa gauche. L'intensité i doit être regardée comme positive lorsque le courant traverse la surface, en passant du côté négatif au côté positif.

De même, si la courbe entoure plusieurs courants,

$$4\pi \Sigma i = \int_C F_\sigma \, d\sigma.$$

(1) *Annales de Chimie et de Physique.* — MASCART, *Traité d'Électricité statique*, t. II, p. 465.

(2) MASCART et JOUBERT, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. I, p. 488-492.

Digitized by Google

Prenons le sommet considéré comme centre d'une petite surface sphérique, et, sur cette surface, traçons une courbe géométrique C sans point double (1), qui sépare l'aire de la sphère en deux régions, l'une a que traversent tous les fils, l'autre b, qu'aucun d'eux ne traverse. Choisissons la direction des arcs croissants sur la courbe, de manière que le côté positif de la région a regarde le sommet. On a

$$4\pi \Sigma i = \int_C F_\sigma d\sigma,$$

et les intensités sont regardées comme positives lorsqu'elles sont dirigées vers le sommet. Mais la région b, n'étant traversée par aucun fil, donne

$$-\int_C F_\sigma d\sigma = 0.$$

On a donc, pour toutes les intensités qui aboutissent au sommet,

$$\Sigma i = 0. \tag{2}$$

5. Je ne connais pas d'expériences qui établissent avec certitude que la loi de Laplace subsiste lorsque les courants sont variables. Il semble probable que la loi de la distance et celle de la direction de l'élément de courant restent vraies à cause de leur caractère purement géométrique. Quant à la grandeur du courant à chaque instant, elle est caractérisée par un coefficient, auquel on peut conserver le nom d'*intensité;* mais la relation entre cette intensité et le flux d'électricité statique au même instant n'a pas encore été établie avec certitude. L'application de la loi de Colladon donne lieu à une difficulté qu'il importe de rappeler. Pour cela, revenons aux flux d'électricité et aux intensités électromagnétiques dans des fils qui aboutissent au même sommet.

Le potentiel électrostatique, qui est uniforme quand aucun courant ne traverse les fils, est, au contraire, différent d'un point à l'autre

(1) Lorsque la courbe tracée sur la sphère a des points doubles, les résultats définitifs sont les mêmes, mais exigent une longue discussion dont Gauss a énoncé les principes. GAUSS, *Werke*, t. V, p. 620. — Paul LECORDIER, *Sur les aires sphériques de Gauss* (Thèse), 1870. — *Voir* aussi : B. RIEMANN, *Leçons sur la pesanteur, l'électricité et le magnétisme*, recueillies par Hattendorff.

Digitized by Google

pendant le courant. Le passage du premier état au second est accompagné d'une modification dans la distribution de l'électricité sur le fil. Pour en exagérer les effets, considérons en particulier un sommet qui communique directement avec un conducteur de grandes dimensions; le potentiel final V pour l'état permanent est le même que si ce corps n'existait pas. Les fils conducteurs lui ont donc apporté, pendant l'état variable, une charge totale CV, proportionnelle à sa capacité C : l'équation (1) ne peut donc pas subsister à chaque instant de l'état variable. Elle n'est exacte que pour le flux total entre deux époques o, T, où la distribution des potentiels reprend la même valeur : deux états permanents identiques ou une période entière d'un état périodique;

$$\sum \int_0^T f\,dt = 0.$$

6. Considérons maintenant les intensités électromagnétiques. Si la loi de la distance et de la direction de l'élément de courant sont les mêmes que pour l'état permanent, on en déduit rigoureusement, entre les intensités qui aboutissent au même sommet, la relation

$$\Sigma i = 0$$

à chaque instant. Cette relation, étant différente de celle des flux d'électricité, nous met en présence de trois hypothèses distinctes :

1° La loi de la distance et de la direction de l'élément de courant ne sont pas les mêmes pour des intensités variables que pour des intensités constantes.

Ou bien, ces deux lois restant exactes :

2° L'intensité électromagnétique n'est pas à chaque instant proportionnelle au flux d'électricité;

3° L'intensité électromagnétique est à chaque instant proportionnelle au flux d'électricité; mais, dans l'application de la relation (2) déduite de la loi de Laplace, en ne prenant que les intensités dans les fils conducteurs, nous n'avons pas tout compté : pendant l'état variable, l'espace occupé par le diélectrique est lui-même le siège de phénomènes de la nature d'une intensité, d'un flux d'électricité. Quand la charge totale d'un corps augmente de ΔM, un flux d'électricité égal à ΔM s'échappe du corps et rayonne à travers le diélectrique. C'est

Digitized by Google

l'hypothèse du déplacement électrique de Maxwell. Il faut introduire cette intensité totale dans la relation (2), ce qui la rend identique à l'équation des flux d'électricité.

7. Les très nombreuses expériences qu'on a faites sur les courants variables dans des circuits fermés complexes ne permettent pas de décider entre les deux dernières hypothèses. Dans presque toutes ces expériences, en effet, le galvanomètre mesure l'*intensité intégrale* (1) $\int_0^T i\,dt$, entre deux époques où l'intensité reprend la même valeur : état initial et état final permanents identiques, ou état périodique. L'impulsion de l'aiguille du galvanomètre ou sa déviation moyenne ne mesure le couple magnétique instantané ou moyen qu'à cette condition. Lorsqu'il en est ainsi dans tous les fils du circuit, l'équation des flux d'électricité dans les fils seuls est identique à celle des intensités intégrales dans les fils seuls pour chaque sommet

$$\sum \int_0^T f\,dt = 0, \qquad \sum \int_0^T i\,dt = 0.$$

On peut donc admettre, dans toutes ces expériences, la proportionnalité de l'intensité intégrale au flux total, sans qu'il en résulte aucune contradiction logique. Faraday (2) et Riess (3) ont montré la proportionnalité de la charge électrique totale des bouteilles de Leyde aux impulsions produites par leur décharge à travers un galvanomètre, et les expériences de comparaison des capacités qui reposent sur cette proportionnalité, faites depuis avec plus de précision, n'ont pas révélé de contradiction expérimentale certaine.

Il ne semble pas probable qu'une compensation analogue puisse se produire pour les lois de la distance et de la direction de l'élément.

Il serait facile d'instituer des expériences permettant de contrôler la loi de Laplace et celle de Colladon et Faraday dans les deux cas parti-

(1) VERDET, *Œuvres*, t. IV. — *Conférences*, Ire Partie, p. 365.

(2) *Experimental Researches*, t. I, p. 102.

(3) *Reibungselectricität*, Bd. I, p. 478. — MASCART, *Traité d'Electricité statique*, t. I, p. 433.

Digitized by Google

culiers indiqués plus haut. Une confirmation directe et méthodique serait évidemment préférable à la probabilité que donne l'ensemble des faits connus.

8. Dans quelques autres expériences, l'intensité initiale et l'intensité finale ne sont les mêmes que dans le fil qui contient le galvanomètre, ou bien, on emploie un galvanomètre différentiel, et c'est la fonction linéaire $ai - bj$ des deux intensités i, j qui a des valeurs initiale et finale égales. Dans ces deux cas, l'impulsion de l'aiguille du galvanomètre mesure $\int i\,dt$ et $\int (ai - bj)\,dt$; mais l'équation des flux d'électricité et celle des intensités à chaque sommet sont différentes, et, à prendre les choses en toute rigueur, il faudrait tenir compte de cette différence et choisir entre les hypothèses 2 et 3. Remarquons toutefois que, pour l'effet total, la différence entre les deux équations (1) et (2) est en relation directe avec la grandeur des capacités; elle ne pourrait devenir appréciable que si certains points étaient en communication avec un corps conducteur de grandes dimensions, *éloigné de tout autre conducteur*. C'est dans ce cas seulement que la distribution des courants de l'hypothèse 3 à travers un diélectrique de grande étendue pourrait être mise en évidence. Si certains points communiquent avec un condensateur de grande capacité, l'épaisseur du diélectrique, siège des phénomènes de la troisième hypothèse, est trop faible pour les rendre appréciables; tout l'effet est produit par l'intensité dans les fils qui réunissent les deux armatures du condensateur à deux points du circuit éloignés l'un de l'autre; on peut alors calculer cette intensité au moyen de l'équation de charge du condensateur : l'intensité du courant est à chaque instant égale au produit de la capacité par l'accroissement de la différence de potentiel des deux armatures. On tiendra compte de l'influence totale du condensateur, en appliquant simplement la loi de Colladon et Faraday aux intensités intégrales et aux flux d'électricité, dans tous les fils conducteurs, sans s'occuper de ce qui se passe dans le diélectrique.

Au lieu de s'en tenir à l'effet total, si l'on étudie les diverses phases du phénomène variable, les deux hypothèses 2 et 3 pourront fournir des résultats nettement différents. C'est seulement par une étude expé-

Digitized by Google

rimentale des variations du courant dans un fil dont les extrémités communiquent avec des corps de grande capacité que l'on pourra trouver des raisons de préférer l'une ou l'autre hypothèse.

9. La généralisation de la loi d'Ampère sur les actions mutuelles des courants constants est sujette aux mêmes observations; mais rien ne permet d'affirmer que les facteurs qui caractérisent les deux courants restent proportionnels aux flux d'électricité, ou même (suivant la loi de Weber pour les courants permanents) aux intensités électromagnétiques. Les deux mêmes cas particuliers seraient intéressants pour les mêmes raisons.

L'influence de la forme des circuits dans l'action mutuelle des courants constants est définie par leur *potentiel mutuel électrodynamique.*

10. *Induction* (1). — Dans toutes les expériences qui suivent (n^{os} 10-25), l'emploi du galvanomètre est légitimé par l'extension de la loi de Laplace seule, sans la loi de Colladon et Faraday, tant qu'il ne s'agit que de mesures électromagnétiques.

Lorsque deux circuits fermés immobiles sont voisins l'un de l'autre, et que l'intensité du courant dans l'un d'eux passe d'une valeur constante I, à une autre valeur constante $I + \Delta I$, un courant instantané est produit dans le second circuit.

Si la forme des parties voisines des deux circuits reste la même, quels que soient le diamètre des fils conducteurs, leur nature, la longueur des parties éloignées, il résulte des expériences de Lenz et de Felici, que l'intensité intégrale $\int j\,dt$ du courant induit est donnée par la relation

$$M\Delta I + R\int j\,dt = 0. \qquad (1)$$

R est la résistance du circuit induit déterminée par les méthodes relatives aux courants constants. M est une constante qui ne dépend que

(1) *Voir*, à la fin de ce travail, une Note sur les expériences de Faraday, Lenz et Felici, relatives à l'induction.

Digitized by Google

de la forme et de la position relative des deux circuits : on l'appelle *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits.

Lorsque le circuit induit est parcouru par un courant constant i, j désigne dans l'équation (1) l'excès de l'intensité à chaque instant sur l'intensité constante initiale et finale i. Si plusieurs courants inducteurs agissent à la fois sur le même circuit induit, il faut dans l'équation (1) remplacer le terme unique $M\Delta I$ par la somme des termes correspondants relatifs à chacun des courants inducteurs.

11. La comparaison de l'équation (1) avec l'équation relative à un courant constant dans le même circuit montre que l'effet produit par le changement d'intensité du courant inducteur est de la nature d'une force électromotrice instantanée. Si le circuit induit, au lieu d'être simple, est formé de plusieurs fils se réunissant en différents sommets, et que chacun d'eux soit soumis à l'induction d'un fil voisin, il est naturel de continuer la même comparaison en employant les valeurs des forces électromotrices instantanées, déduites par l'équation (1) d'expériences où le circuit est formé par un seul des fils directement uni au galvanomètre. Nous savons déjà que l'une de ces lois, prises sous la forme que leur a donnée Kirchhoff, la loi relative aux sommets,

$$\Sigma \int j\, dt = 0, \tag{2}$$

subsiste en toute rigueur quand l'état initial et l'état final du circuit sont identiques. Il résulte d'expériences de Felici, qu'il en est de même de la seconde loi,

$$S\left(r\int j\, dt + M\Delta I + \dots\right) = 0, \tag{3}$$

S indiquant qu'on ajoute tous les termes d'un circuit fermé en rapportant toutes les intensités à un même sens de parcours de ce circuit.

12. L'effet produit, étant d'autant plus grand que les deux circuits sont plus rapprochés, doit subsister lorsqu'ils se confondent. Toute variation d'intensité dans un circuit produit dans ce même circuit un

Digitized by Google

courant induit dont Faraday (¹) a réussi à démontrer l'existence. L'étude de la loi du courant ne peut pas se faire avec un circuit simple, car l'intensité finale différant de l'intensité initiale, les indications du galvanomètre n'ont pas de sens. Edlund (²) a imaginé une disposition des fils pour laquelle l'application de lois de la forme (2), (3) (n° 11), fournit des conséquences très simples qu'il a complètement vérifiées par expérience. Si dans un circuit complexe, ne comprenant aucun conducteur de capacité notable (n° 8), les intensités changent de valeurs, les lois (2), (3) s'appliquent encore, pourvu qu'on ajoute dans (3) un terme $L\Delta i$, relatif au changement d'intensité dans le fil lui-même, et que j désigne l'excès de l'intensité variable sur l'intensité finale i. Ce coefficient L porte le nom de *coefficient d'induction propre* ou *coefficient de self-induction.*

13. Reste à déterminer les constantes M et L. Des expériences de Felici, dont le principe est calqué sur celui des expériences fondamentales de l'électrodynamique, établissent que la constante M est proportionnelle au potentiel mutuel des deux circuits, lorsque ces circuits sont distincts et simples. Les circuits restant distincts, s'ils sont formés de plusieurs fils, tels que chacun d'eux fasse partie au moins d'un circuit fermé par des fils différents, il est facile (³) d'établir qu'on peut encore prendre M proportionnel au potentiel mutuel des deux fils, bien que leurs extrémités soient éloignées l'une de l'autre. Il n'y a d'ailleurs aucune ambiguïté dans la pratique, chaque partie du circuit étant formée par une bobine de fil dont les deux extrémités sont réunies au reste du circuit par deux conducteurs très voisins l'un de l'autre; la constante M se rapporte donc toujours à un circuit géométriquement fermé. C'est alors une intégrale double

$$M = \int_0^t \int_0^t m_{ss'}\, ds\, ds',$$

(¹) Janvier 1835. *Experimental Researches*, t. I, p. 322.

(²) 1849. *Poggendorff Annalen*, t. LXXVII, p. 161. *Annales de Chimie et de Physique*, t. III, p. 51.

(³) *Annales de l'École Normale*, janvier 1881. — *Journal de Physique.*

Digitized by Google

$m_{ss'}$ étant une fonction de la distance et de l'orientation des deux éléments ds et ds' (1).

14. Lorsque les deux circuits sont assez rapprochés pour que les dimensions des fils soient de même ordre que leurs distances, la valeur de M, comme celle du potentiel mutuel, doit être mise sous la forme d'une intégrale sextuple, étendue à toute la longueur des deux circuits, et à toute l'aire des sections des deux fils; car l'élément de l'intégrale doit être rapporté aux éléments de courant de dimensions transversales infiniment petites par rapport à leur distance mutuelle. On admet alors que la densité du courant est uniforme dans toute l'aire de chaque section du fil.

Bien que les deux circuits inducteur et induit aient toujours été distincts dans les expériences de Felici, il est naturel de regarder la loi élémentaire comme indépendante de cette condition, et de prendre pour le coefficient L ce que devient M quand les deux circuits sont amenés en coïncidence. Il semble que le dispositif d'Edlund permettrait de contrôler cette extension des résultats de Felici (2).

15. Résumons les résultats auxquels nous sommes arrivé :

Équations de Kirchhoff pour l'état permanent de circuits fermés quelconques :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{Sommets} \ldots\ldots\ldots\ldots & \Sigma i = 0. \\ \text{Circuits fermés} \ldots\ldots & S(ri - e) = 0. \end{cases}$$

Équations de la période variable entière :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \text{Sommets} \ldots\ldots\ldots\ldots & \Sigma \int j\,dt = 0. \\ \text{Circuits fermés} \ldots\ldots & S\left(r\int j\,dt + L\Delta i + M\Delta I + \ldots\right) = 0, \end{cases}$$

avec la restriction du n° 8 pour la première des équations II.

---

(1) Lorsque les circuits sont géométriquement fermés, on peut choisir indifféremment pour $m_{ss'}$ la forme de Neumann $\frac{\cos\varepsilon}{r}$, ou celle de Weber $\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}$.

(2) Ce contrôle peut être obtenu par une des méthodes que j'étudierai plus loin.

Digitized by Google

Telles sont les équations dont nous ferons usage pour établir les méthodes de comparaison des coefficients L et M.

Ces coefficients sont proportionnels aux potentiels électrodynamiques des circuits. Les regarder comme égaux à ces potentiels, c'est choisir l'unité de force électromotrice, et par suite l'unité de résistance électrodynamique. C'est cette unité que détermine directement la méthode de mesure de Rowland (1). Cette méthode est fondée sur les expériences de Lenz et de Felici, sans aucune extension, et sans aucune hypothèse sur la relation entre le flux d'électricité et l'intensité intégrale du courant induit (2).

16. En admettant que les équations (II) s'appliquent non seulement à l'intensité intégrale, mais à l'intensité elle-même, on obtient les équations ordinairement employées dans l'étude des courants induits

---

(1) *American Journal of Sciences and Arts*, 1878. — *Journal de Physique*, t. VIII, p. 256.

(2) Au lieu de faire varier l'intensité du courant inducteur, on peut la conserver constante, mais déplacer le courant de sa position actuelle A, à une position B où les variations d'intensité du courant inducteur soient sans influence sur le circuit induit. Une expérience de Felici montre que l'intensité intégrale due au déplacement du circuit, de B en A, est égale à celle due à l'établissement du même courant en A. Le système II doit donc être remplacé par le suivant :

$$(\mathrm{II}_a)\qquad \begin{cases} \text{Sommets.....} & \Sigma \int j\,dt = 0, \\ \text{Circuits fermés.....} & S\left[r\int j\,dt + \Delta(Li) + \Delta(MI) + \dots\right] = 0, \end{cases}$$

et, en prenant pour L, M les potentiels électrodynamiques eux-mêmes, on choisit une unité de résistance identique à celle du n° 15. C'est celle que donne directement la méthode de Kirchhoff (*Pogg. Ann.*, t. LXXVI; 1849), lorsque i, I ont des valeurs initiale et finale identiques.

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie à un circuit qui contient une roue de Barlow animée d'un mouvement de rotation uniforme dans un champ magnétique constant produit par des aimants ou des courants, on peut établir l'identité des unités de résistance électromagnétique et électrodynamique. C'est l'expérience du disque de Faraday (*Exp. Res.*, série I) ou celle de Lorenz (*Pogg. Ann.*, t. CLXIX; 1873. — *Journal de Physique*, t. II, p. 424).

Quant à l'unité déterminée par la méthode de Sir W. Thomson, ou par celle de Weber (oscillations et amortissement), il faut, pour établir leur identité avec les précédentes, supposer exacte l'équation différentielle de l'induction III (n° 16), à cause de la simultanéité des variations d'intensité et des déplacements de l'aiguille aimantée.

Digitized by Google

par variation d'intensité :

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \text{Sommets} \ldots\ldots\ldots & \Sigma j = 0, \\ \text{Circuits fermés} \ldots\ldots & \mathrm{S}\left(rj + \mathrm{L}\frac{di}{dt} + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{I}}{dt} + \ldots\right) = 0. \end{cases}$$

Pour avoir une conséquence mathématique du système (II), il faudrait ajouter, dans chacune des équations (III), un terme inconnu, soumis à la condition de disparaître par une intégration étendue à toute la durée du phénomène variable, ou à une période entière, quand il est périodique. Aussi, n'emploierai-je pas le système (III) pour établir la formule fondamentale des méthodes que je vais décrire; il servira seulement à en discuter certains détails secondaires (n^{os} 26-29).

C'est à ce système d'équations que conduisent toutes les théories de l'induction; mais cet accord n'ajoute guère à sa probabilité, puisque c'est la forme la plus simple qu'on puisse donner aux équations différentielles de l'induction pour rester d'accord avec l'expérience. On peut invoquer, en faveur du système d'équations (III), les expériences relatives à la meilleure position du commutateur dans les machines magnétiques : les résultats sont d'accord avec les conséquences des équations (III), transformées de manière à tenir compte du mouvement. Le système d'équations (II_a) ne fournirait aucun renseignement sur cette question.

CHAPITRE II.

THÉORIE DES MÉTHODES DE COMPARAISON DES COEFFICIENTS D'INDUCTION.

17. Les méthodes doivent permettre de comparer :

1° Deux coefficients d'induction mutuelle;

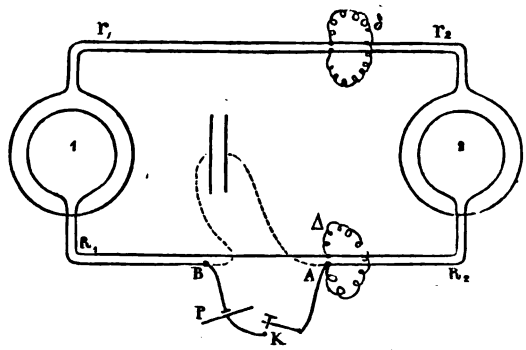
2° Deux coefficients de self-induction;

3° Un coefficient d'induction mutuelle et un coefficient de self-induction.

Digitized by Google

Pour la comparaison des coefficients d'induction mutuelle de deux paires de bobines, le courant d'une pile P (*fig.* 1) traverse successivement les deux bobines inductrices 1 et 2; une dérivation Δ peut être établie sur l'une d'elles; enfin, un interrupteur K permet d'ouvrir ou de fermer le circuit de la pile. Les deux bobines induites sont réunies en un circuit, et une dérivation δ peut être établie sur l'une d'elles.

Fig. 1.



Trois positions distinctes du galvanomètre permettent de faire la mesure :

a, *b*. Les deux bobines induites sont réunies de façon que la plus faible, 1, soit parcourue par la différence de leurs courants. C'est sur le trajet de celle-ci qu'il faut mettre le galvanomètre. On dispose de la dérivation Δ ou de celle δ de manière à annuler l'intensité intégrale du courant qui traverse le galvanomètre au moment de la fermeture du circuit de la pile. L'application des équations du système (I) (n° 15) au circuit inducteur, et du système (II) (n° 15) au circuit induit, donne, en appelant R_1, R_2, r_1 et r_2 les résistances comptées à partir des dérivations Δ et δ :

a. Quand la dérivation Δ existe seule,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\Delta}{\Delta + R_2};$$

b. Quand la dérivation δ existe seule,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\delta}{\delta + r_2}.$$

Digitized by Google

c. La dérivation Δ n'existe pas. Les deux bobines induites sont réunies de façon que la dérivation δ reçoive la différence des courants induits. On y place le galvanomètre, et on ajoute à la bobine 2 des résistances telles que l'intensité intégrale soit nulle dans le galvanomètre au moment de la fermeture du circuit de la pile.

On a alors, par les équations (II) (n° 15),

$$(c) \qquad \frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

C'est cette dernière disposition seule qu'a indiquée Maxwell (t. II, p. 354).

Il importe de remarquer que les coefficients de self-induction de tous les fils n'ont aucune influence; ils peuvent être quelconques. Mais on a écrit les équations en supposant que les dérivations δ, Δ et les fils de jonction ont un coefficient d'induction mutuelle nul, soit entre eux, soit avec les bobines 1 et 2. Il est bon, pour réaliser cette condition, de mettre très près l'un de l'autre les deux fils par lesquels entre et sort le même courant.

18. Dans toute disposition où le circuit induit est distinct du circuit inducteur, le galvanomètre étant l'instrument de mesure, les équations (II) montrent que les coefficients de self-induction n'ont aucun rôle. L'intensité initiale et l'intensité finale, dans chacun des fils du circuit induit, sont, en effet, nulles. Pour que le coefficient de self-induction d'un fil du circuit induit entre dans les équations, il faut que l'intensité du courant qui le traverse change de valeur; il faut donc que ce fil fasse partie du circuit inducteur. Pour que l'équation de l'état variable dans ce fil appartienne au système qui détermine l'intensité intégrale dans le galvanomètre, il faut que le galvanomètre fasse aussi partie du circuit inducteur. Enfin, pour que l'impulsion du galvanomètre mesure l'intensité intégrale, il faut que l'intensité initiale et l'intensité finale du courant qui le traverse soient identiques. L'intensité initiale, qui correspond au circuit ouvert, est nulle; il faut qu'il en soit de même de l'intensité finale. On ne peut obtenir ce résultat que par un réglage convenable de l'état permanent; l'arrangement le plus simple, dans lequel ce réglage soit susceptible de

Digitized by Google

précision, est le pont de Wheatstone; c'est celui que nous allons utiliser (¹).

19. On peut l'employer, sans modification, à la comparaison de deux coefficients de self-induction (MAXWELL, t. II, p. 357).

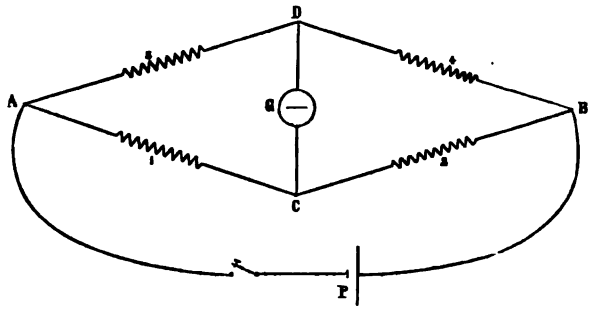
Les équations du pont réglé pour l'état permanent donnent (*fig.* 2):

$$\text{Circuit ACD}\ldots\ldots\quad r_1 i_1 - r_3 i_3 = 0,$$
$$\text{Circuit BCD}\ldots\ldots\quad r_2 i_1 - r_4 i_3 = 0.$$

D'où l'on déduit

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{i_3}{i_1}. \tag{1}$$

Fig. 2.



Les équations (II) (n° 15) du pont, réglé pour que l'intensité intégrale, dans le fil CD du galvanomètre, soit nulle, donnent pour la fermeture de la pile :

$$\text{Circuit ACD}\ldots\ldots\quad r_1 \int j_1\,dt + L_1 i_1 - r_3 \int j_3\,dt - L_3 i_3 = 0,$$
$$\text{Circuit BCD}\ldots\ldots\quad r_2 \int j_1\,dt + L_2 i_1 - r_4 \int j_3\,dt - L_4 i_3 = 0.$$

Entre ces équations et les deux équations (1), on peut éliminer i_1,

(¹) Avec un galvanomètre ordinaire, l'arrangement de Poggendorff pour la mesure des forces électromotrices; avec un galvanomètre différentiel, celui d'Edlund pour l'étude de l'extra-courant, pourraient aussi fournir des méthodes de zéro pour la comparaison des coefficients de self-induction.

Digitized by Google

i_3 et $\int j_1 dt$, $\int j_3 dt$. Il suffit de diviser la première équation par r_1, la seconde par r_2 et de les retrancher; il vient ainsi

$$\left(\frac{L_1}{r_1} - \frac{L_2}{r_2}\right) i_1 - \left(\frac{r_3}{r_1} - \frac{r_4}{r_2}\right) \int j_3 dt - \left(\frac{L_3}{r_1} - \frac{L_4}{r_2}\right) i_3 = 0,$$

et, au moyen des équations (1),

$$\frac{L_1}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0.$$

20. Si l'on dispose d'une résistance r_4, dont le coefficient d'induction propre soit négligeable, et de *deux* boîtes de résistances à division continue, dont le coefficient d'induction soit toujours négligeable, le pont de Wheatstone permettra de comparer les coefficients de self-induction de deux bobines. Les deux boîtes de résistances seront placées sur les côtés 2, 3 ; à l'une d'elles, 3, on ajoutera l'une des bobines, et l'autre bobine sera placée seule sur le côté 1.

Les coefficients d'induction L_2, L_4 étant nuls, les équations de condition se réduisent à

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{L_1}{L_3},$$

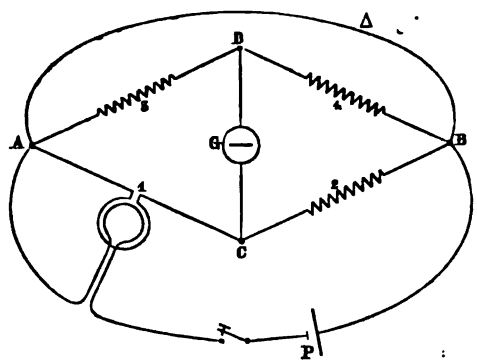
dans lesquelles L_1, L_3, r_1, r_4 sont données et invariables. Pour satisfaire à cette relation, il faut donc modifier r_2 et r_3, ce qui exige bien deux boîtes de résistances divisées. Le rapport des coefficients d'induction est donné par le rapport des deux résistances r_2, r_4, résistances lues directement sur les boîtes, puisque ces côtés ne contiennent pas les bobines étudiées. Malheureusement, l'état permanent ne peut pas être réglé une fois pour toutes; chaque tâtonnement relatif à l'état variable dérègle l'état permanent. On peut modifier l'arrangement de manière à séparer les deux réglages (*Journal de Physique*, mars 1881, p. 109); mais deux nouvelles boîtes de résistances divisées, sans coefficient d'induction, deviennent nécessaires. Aussi n'ai-je pas pu soumettre cette disposition à l'expérience. Je n'en parlerai pas.

21. Pour la comparaison du coefficient d'induction mutuelle M de deux bobines avec le coefficient de self-induction L de l'une d'elles, on

Digitized by Google

peut faire séparément les deux réglages en ajoutant une dérivation variable Δ entre les deux sommets du pont A, B (*fig.* 3), auxquels aboutit la pile. La bobine dont on veut étudier le coefficient de self-induction est placée sur le côté 1 du pont; l'autre peut être placée sur le fil de la pile (MAXWELL, t. II, p. 356).

Fig. 3.



Les équations du pont réglé pour l'état permanent sont, en désignant par I l'intensité dans le fil APB de la pile :

$$\text{Circuit ACD} \ldots\ldots\ldots \quad r_1 i_1 - r_3 i_3 = 0,$$
$$\text{Circuit BCD} \ldots\ldots\ldots \quad r_2 i_1 - r_4 i_3 = 0,$$
$$\text{Circuit } \Delta\text{A DB} \ldots\ldots \quad r_3 i_3 + r_4 i_2 - \Delta(\mathrm{I} - i_1 - i_3) = 0,$$

d'où

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{i_3}{i_1}, \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = k i_1,$$

en posant

$$k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4}\frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

Les équations II (n° 15), quand Δ est choisi de telle sorte que l'intensité intégrale soit nulle dans le galvanomètre pendant la période variable de fermeture du circuit, sont

$$\text{Circuit ACD} \ldots\ldots\ldots \quad r_1 \int j_1\, dt + \mathrm{L}_1 i_1 + \mathrm{MI} - r_3 \int j_3\, dt - \mathrm{L}_3 i_3 = 0,$$

$$\text{Circuit BCD} \ldots\ldots\ldots \quad r_2 \int j_1\, dt + \mathrm{L}_2 i_1 - r_4 \int j_3\, dt - \mathrm{L}_4 i_3 = 0.$$

Divisant la première équation par r_1, la seconde par r_2 et retranchant,

Digitized by Google

on a, en tenant compte des équations de l'état permanent,

$$(1) \qquad \frac{L_1 + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0.$$

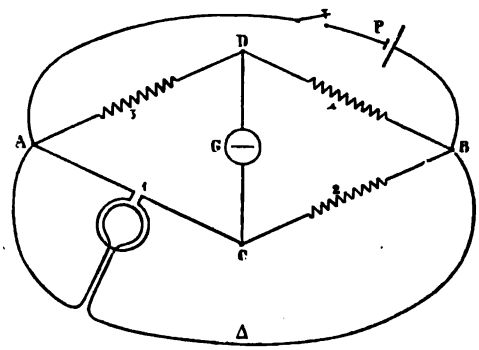
Si l'on dispose de trois boîtes de résistances sans coefficient d'induction, dont *une* à division continue, on en fera les côtés 2, 3, 4 du pont. Sur la dérivation Δ on mettra une boîte à division continue, qui peut avoir un coefficient d'induction quelconque.

L'équation (1) se réduira alors à

$$(2) \qquad L + kM = 0, \qquad k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4}\frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

22. Telle est la méthode de Maxwell, la seule que j'aie expérimentée. Il faut remarquer qu'elle n'est pas générale; elle suppose en effet L supérieur à M, car le nombre k est, quel que soit Δ, supérieur à $1 + \frac{r_2}{r_4}$. Pour la rendre absolument générale, il suffirait de placer la deuxième bobine sur le fil Δ lui-même (*fig.* 4).

Fig. 4.



La résistance Δ n'est plus donnée par la boîte graduée seule; mais ce n'est là qu'un désavantage apparent sur la précédente méthode; même dans cette dernière, pour être sûr que la résistance Δ est exprimée en même unité que les côtés du pont, il est indispensable de la mesurer en la substituant au côté 1, aussitôt le réglage obtenu.

Digitized by Google

Les équations de l'état permanent donnent alors

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{i_3}{i_1}, \quad (1 - i_1 - i_3) = i_1 k,$$

en posant

$$k = \frac{r_2}{r_4} \times \frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

Pour l'état variable, l'équation du circuit ACD est seule changée ; elle devient

$$r_1 \int j_1 dt + L_1 i_1 + M(1 - i_1 - i_3) - r_3 \int j_3 dt - L_3 i_3 = 0,$$

et l'on en déduit l'équation définitive

$$\frac{L + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0.$$

Maintenant k peut prendre une valeur positive quelconque par la variation de Δ.

Aussi est-ce cette disposition que je recommanderai d'employer, tant à cause de sa généralité certaine, que pour la simplicité de la valeur de k. C'est seulement en discutant les résultats des expériences faites au Collège de France que j'ai remarqué les avantages de cette disposition, et je regrette de n'avoir pu l'essayer. Les résultats en seront certainement aussi précis que ceux de la première méthode, avec les mêmes précautions (Chap. IV).

23. Deux expériences par les méthodes des n^{os} **21** ou **22** pourront déterminer le rapport du coefficient de self-induction $\mathfrak{L}$ d'une bobine quelconque au coefficient d'induction mutuelle M de deux bobines connues.

D'une première expérience faite seulement avec les bobines connues, on tirera

$$L + kM = 0.$$

Cette première expérience peut être faite une fois pour toutes avec le soin nécessaire, et l'on peut regarder comme connu le rapport de L à M. Dans une seconde expérience, on ajoute au côté 1 du pont la bobine inconnue, en la mettant à une distance assez grande des deux bobines

Digitized by Google

connues, pour ne pas altérer M. On modifie convenablement r_3 et Δ, et l'on a

$$L + \mathcal{L} + k'M = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$\mathcal{L} + (k' - k)M = 0,$$

ce qui détermine le rapport de $\mathcal{L}$ à M.

Cette méthode me paraît très importante. Il est en effet facile de construire deux bobines dont le coefficient d'induction mutuelle soit théoriquement calculable en unités absolues C.G.S. avec telle précision que l'on voudra. Il suffit que la distance minima entre les fils d'une bobine et ceux de l'autre soit très supérieure au diamètre des fils. L'influence de ce diamètre, celle des irrégularités d'enroulement deviennent alors négligeables. Au contraire, il me paraît difficile de construire une bobine avec assez de précision pour que le calcul théorique de son coefficient de self-induction fournisse une approximation certaine, à cause de l'extrême proximité des portions de fil les plus actives. Ce n'est donc que par comparaison avec le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines étalonnées qu'on pourra déterminer avec précision la valeur absolue du coefficient de self-induction d'une bobine.

24. Si l'on possédait des bobines à résistance constante, ce qui permet de faire une fois pour toutes le réglage relatif au courant permanent, mais à coefficient d'induction mutuelle variable suivant une loi connue, on pourrait substituer leur usage à celui de la dérivation Δ. Je suppose qu'on possède les trois boîtes de résistances nécessaires pour la mesure des résistances par le pont de Wheatstone, et que leur coefficient d'induction soit négligeable. On forme avec l'une de ces boîtes et la bobine inconnue le côté 3 du pont (*fig.* 5), et avec les deux autres, les côtés 2 et 4. On dispose les deux bobines à coefficient d'induction mutuelle gradué sur le côté 1 et le circuit de la pile.

Dans une première expérience, on obtient le réglage en employant une fraction h du coefficient d'induction mutuelle maximum M des deux bobines

$$\frac{L + h\left(1 + \frac{r_2}{r_4}\right)M}{r_1} - \frac{\mathcal{L}}{r_3} = 0.$$

Digitized by Google

Dans une deuxième expérience, on change r_4 et l'on rétablit les deux réglages en changeant convenablement r_3 et h, sans altérer $\mathcal{E}$,

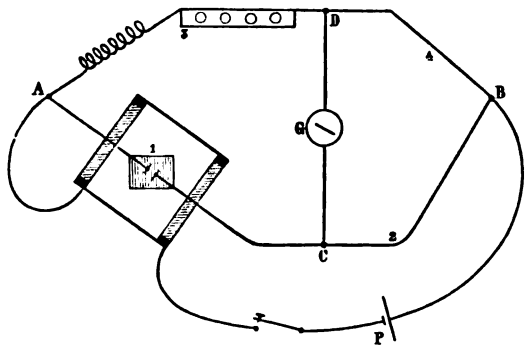
$$\frac{\mathrm{L}+h'\left(1+\frac{r_2}{r'_4}\right)\mathrm{M}}{r_1}-\frac{\mathcal{E}}{r'_3}=0.$$

Éliminant L par soustraction, et tenant compte des équations relatives à l'état permanent, on a

$$\mathrm{M}\left[h'\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r'_4}\right)-h\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}\right)\right]=\mathcal{E}\left(\frac{1}{r'_4}-\frac{1}{r_4}\right);$$

h, h', r_2, r_4, r'_4 sont directement connus par les deux expériences. Quels que soient L, M, $\mathcal{E}$, il est toujours possible de choisir les rapports de r_2 à r_4 et à r'_4, tels que les limites entre lesquelles doivent rester h, h' permettent les réglages. La méthode est donc générale.

Fig. 5.



Les appareils à coefficient d'induction variable ont sur les boîtes de résistances l'avantage pratique que leur graduation peut être obtenue directement, par simple construction, sans aucun tâtonnement. Tels sont, par exemple, les deux appareils que je vais décrire.

25. Le premier appareil donne les multiples entiers d'une valeur déterminée. Il est formé d'une bobine inductrice intérieure, de fil un peu gros, et d'une bobine induite extérieure. Sur celle-ci, le fil n'est pas simple : c'est une corde de vingt fils isolés, légèrement tordus ensemble, et maintenus côte à côte par un large ruban de soie. Le

Digitized by Google

coefficient d'induction entre la bobine intérieure et un quelconque des vingt fils est alors le même, M. Au moyen d'un commutateur à clefs, on peut faire que le courant induit traverse $20 - p$ des fils dans un sens et les p autres en sens inverse. Le coefficient d'induction entre la bobine intérieure et les vingt fils ainsi réunis est $2(10 - p)M$, c'est-à-dire un nombre entier de fois 2M inférieur ou égal à 10. Mais ces fils sont toujours réunis bout à bout, et leur résistance reste la même, quand on change le coefficient d'induction mutuelle. Je désignerai ce premier appareil par la lettre A.

Le second appareil, destiné à fournir des subdivisions variant d'une manière continue, est formé d'une bobine inductrice extérieure cylindrique, sur laquelle un gros fil est très régulièrement enroulé. Une petite bobine intérieure, couverte de fil fin, est placée au centre de la première, et peut tourner autour d'un axe dirigé suivant un diamètre commun aux deux bobines. L'enroulement sur la bobine intérieure n'a d'ailleurs besoin d'aucune régularité. Les angles des axes de figure des deux bobines cylindriques peuvent être lus au dixième de degré sur un cercle divisé extérieur.

Si la bobine extérieure était infiniment longue, le coefficient d'induction mutuelle serait rigoureusement proportionnel au cosinus de l'angle des deux axes des bobines. Cette loi sera encore approchée en choisissant convenablement les dimensions des bobines, et l'appareil pourra servir à fractionner l'unité avec une précision suffisante. Voici les dimensions que j'ai essayées :

	Bobine inductrice.	Bobine induite.
	cm	cm
Longueur.....	19	4,7
Diamètre intérieur.....	10	1,0
Diamètre extérieur.....	12	5,0

Je désignerai ce second appareil par la lettre B.

Ces deux appareils ont été construits : le premier, chez M. Niaudet ; le second, chez M. Carpentier (1). On en a écarté, bien entendu, toute

(1) Pour la construction de ces appareils et pour leurs modifications successives, j'ai toujours trouvé chez M. Niaudet et M. Carpentier une complaisance dont je tiens à les remercier ici. Je dois, en outre, une reconnaissance particulière à l'Association française pour l'avancement des Sciences dont la libéralité m'a permis de faire construire tous les appareils dont j'ai eu besoin dans le cours de ce travail.

Digitized by Google

masse de fer, et même toute masse importante de métal conducteur capable de compliquer les effets d'induction.

CHAPITRE III.

COMPARAISON DE DEUX COEFFICIENTS D'INDUCTION MUTUELLE.

Discussion des méthodes.

26. Pour cette discussion, je me servirai des équations (III), n° 16.

La méthode *a*, n° 17, que j'ai employée dans mes premières expériences, présente un inconvénient sérieux : le passage du courant échauffe beaucoup les résistances Δ et R_2, et d'une manière très inégale; aussi, le rapport $\frac{\Delta}{R_2}$ varie-t-il continuellement pendant l'expérience, ce qui rend le réglage difficile et la connaissance de ce rapport assez incertaine. En revanche, le courant induit, une fois le réglage fait, est constamment nul, ce qui évite toute irrégularité dans l'emploi du galvanomètre.

L'équation du circuit induit est, à chaque instant (*fig.* 1), n° 17,

$$(r_1+r_2+g)\,i+(l_1+l_2+\mathrm{G})\frac{di}{dt}+(\mathrm{M}_1+k\mathrm{M}_2)\frac{d\mathrm{I}}{dt}=0,$$

g, G désignant la résistance et le coefficient d'induction propre du galvanomètre; l_1, l_2 les coefficients d'induction propre des parties du circuit induit dont les résistances sont r_1, r_2.

Le réglage étant obtenu, k est déterminé de telle sorte que $\mathrm{M}_1+k\mathrm{M}_2$ soit nul. L'équation multipliée par i, et intégrée pour toute la période variable, devient

$$(r_1+r_2+g)\int i^2\,dt+(l_1+l_2+\mathrm{G})\int i\frac{di}{dt}\,dt=0.$$

Digitized by Google

Le deuxième terme est nul, puisque les valeurs initiale et finale de i sont nulles. Le premier terme est donc aussi nul. Comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, il faut que tous soient nuls séparément : i est donc constamment nul.

27. Dans les deux méthodes b, c, n° 17, le rapport des coefficients d'induction est donné en fonction des résistances du circuit induit seul. La chaleur produite par le courant instantané qui les traverse est beaucoup moins gênante que dans la disposition a, et il suffit d'espacer un peu les expériences, quand on approche du dernier réglage, pour que la température des bobines soit la même que celle de l'air ambiant. Leur résistance est alors connue au moyen d'expériences faites antérieurement à des températures constantes variées. En revanche, quand l'intensité intégrale est nulle, le courant n'est pas nul à chaque instant; ce sont deux courants successifs de signes contraires qui se compensent, et des difficultés particulières peuvent alors se présenter dans l'emploi du galvanomètre (n^{os} 37 et 38).

28. b. Dans cette méthode, les équations du courant induit sont

$$(r_1+g)\,i_1+(l_1+\mathrm{G})\frac{di_1}{dt}+\mathrm{M}_1\frac{d\mathrm{I}}{dt}=\delta(i_2-i_1)+\lambda\frac{d(i_2-i_1)}{dt},$$

$$r_2\,i_2+l_2\frac{di_2}{dt}+\mathrm{M}_2\frac{d\mathrm{I}}{dt}=-\delta(i_2-i_1)-\lambda\frac{d(i_2-i_1)}{dt},$$

λ désignant le coefficient d'induction propre de la résistance δ; comme le galvanomètre est compris dans la partie du circuit induit qui contient la bobine 1, on a mis les termes correspondants g, G en évidence. La condition pour que $\int_0^\infty i_1\,dt$ soit nul est, n° 17,

$$\mathrm{M}_1(r_2+\delta)+\delta\mathrm{M}_2=0.$$

On voit de suite que $\int_0^\infty i_2\,dt$ ne peut pas être nul en même temps; car cela conduirait à l'égalité des deux rapports $\frac{r_2+\delta}{\delta}$, $\frac{\delta}{r_1+g+\delta}$, dont l'un est supérieur, l'autre inférieur à l'unité.

Digitized by Google

Éliminons $\frac{dI}{dt}$ entre les deux équations, il reste

$$i_1[(r_2+\delta)(r_1+g)+r_2\delta]+\frac{di_1}{dt}[(r_2+\delta)(l_1+G)+r_2\lambda]+\frac{di_2}{dt}(l_2\delta-r_2\lambda)=0,$$

i_1 ne peut être constamment nul; en effet, $\int_0^\infty i_2\,dt$ ne peut pas être nul, donc $\frac{di_2}{dt}$ est différent de zéro à chaque instant; d'autre part, son coefficient n'est pas nul en général, et le dernier terme subsiste dans l'équation.

c. Les équations du circuit induit sont

$$r_1 i_1+l_1\frac{di_1}{dt}+M_1\frac{dI}{dt}= g(i_2-i_1)+G\frac{d(i_2-i_1)}{dt},$$

$$r_2 i_2+l_2\frac{di_2}{dt}+M_2\frac{dI}{dt}=-g(i_2-i_1)-G\frac{d(i_2-i_1)}{dt},$$

la dérivation δ ne contenant que le galvanomètre; sa résistance δ et son coefficient d'induction λ sont remplacés par g, G.

Pour que $\int_0^\infty (i_2-i_1)\,dt$ soit nul, il faut qu'on ait, n° 17,

$$M_1 r_2 = M_2 r_1.$$

Remarquons de suite que $\int_0^\infty i_1\,dt$ ne peut pas être nul en même temps, car il faudrait que $\int_0^\infty i_2\,dt$ fût aussi nul, et nous venons de voir que ces deux intégrales ne peuvent être nulles à la fois.

Éliminons $\frac{dI}{dt}$, il reste

$$[g(r_1+r_2)+r_1r_2](i_2-i_1)+[G(r_1+r_2)+l_2r_1]\frac{d(i_2-i_1)}{dt}+(l_2r_1-l_1r_2)\frac{di_1}{dt}=0.$$

Le réglage de l'intensité intégrale $\int_0^\infty (i_2-i_1)\,dt$ ne suffit pas à rendre (i_2-i_1) constamment nul; car, dans cette équation, ni $\frac{di_1}{dt}$ ni son coefficient ne sont nuls en général.

Digitized by Google

29. Pour rendre l'intensité constamment nulle, il faudrait satisfaire à une condition relative aux coefficients de *self-induction* du circuit

$$\text{Méthode } b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{l_2}{r_2} = \frac{\lambda}{\delta}$$

$$\text{Méthode } c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_1}{r_1}$$

On pourrait donc, en employant l'électrodynamomètre ou le téléphone comme indicateur du courant, tirer de là une méthode de comparaison des coefficients de *self-induction*, sur laquelle l'échauffement par le courant permanent n'aurait pas d'influence. Mais il faudrait toujours deux réglages, qu'il serait d'ailleurs impossible de faire séparément; et ces instruments, n'indiquant pas le sens des courants, guident mal les tâtonnements. Enfin, les raisonnements supposent que la loi du courant à chaque instant est donnée par les seules équations III, n° 16; on verra plus loin, n^{os} 37 et 38, combien elle peut être altérée par une petite capacité placée sur le circuit inducteur.

Expériences faites par la méthode *a*.

(Nancy; mars 1881.)

30. Les deux paires de bobines à comparer sont placées sur une grande table, à environ 2 mètres l'une de l'autre. La dérivation Δ, placée sur une petite table à côté de l'observateur, est formée par une boîte de résistances de Gaiffe, divisée en ohms et en fractions d'ohm. Le fil des bobines n'est pas replié sur lui-même : aussi faut-il placer la boîte assez loin des autres appareils; elle n'est pas réglée à plus de 0,001; toutes les mesures auxquelles elle servira comporteront donc des erreurs de même ordre.

Le galvanomètre a une résistance d'environ 900 ohms; il est posé sur une console en pierre très solide, scellée dans un mur de façade. L'aiguille astatique est formée de deux petits aimants courts; elle porte un petit miroir plan, excellent, qui permet de lire les déviations par réflexion et une toile métallique à mailles très fines, dont le frottement dans l'air amortit les oscillations bien plus rapidement que ne

Digitized by Google

ferait une lame pleine de mêmes dimensions. Le tout est protégé contre les mouvements de l'air extérieur par une boîte en carton qui ne présente qu'une ouverture, fermée par une glace plane, pour le passage de la lumière. A environ 1 mètre du galvanomètre sont placées, sur un support solidement fixé au plancher, la règle divisée en millimètres et la lunette viseur munie d'un réticule. Le grossissement de la lunette permet d'apprécier le quart de millimètre; la stabilité de l'ensemble rend cette lecture absolument sûre.

Tous les fils de jonction cheminent côte à côte, de manière à n'exercer aucune action extérieure.

31. Le galvanomètre (dépourvu d'amortisseur) n'étant pas assez sensible pour faire des mesures précises avec une seule interruption, on a eu recours à un interrupteur tournant (1) (*fig.* 6). A chaque tour, les communications sont établies dans l'ordre suivant :

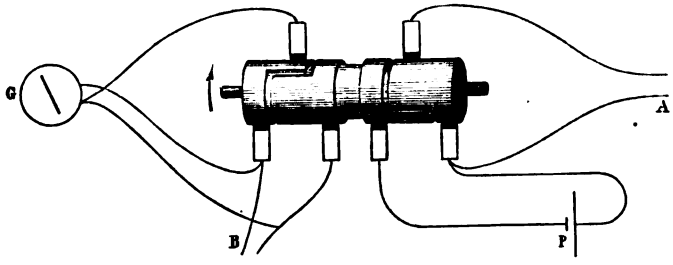
Communication du galvanomètre avec le circuit induit B;

Fermeture du circuit inducteur A;

Fermeture du galvanomètre sur lui-même;

Ouverture du circuit inducteur A.

Fig. 6.



Le galvanomètre ne reçoit ainsi que le courant induit de fermeture; le circuit induit n'est jamais ouvert.

L'interrupteur fait environ dix tours par seconde, et ces dix interruptions donnent à l'aiguille du galvanomètre, suffisamment amortie,

(1) Les roues de Masson, ou mieux le rhéotrope Wartmann, tel que le construit la Société de Genève, rempliraient le même but.

Digitized by Google

une déviation permanente. La sensibilité est accrue tant par la fréquence des interruptions que par la substitution d'une déviation permanente à une impulsion. On sait, en effet, que, si une seule interruption produit une impulsion θ sur l'aiguille non amortie, dont la durée d'oscillation est T, n interruptions par seconde produiront sur l'aiguille amortie une déviation permanente δ, liée à θ par la relation

$$\delta = n \frac{T}{2\pi} \theta,$$

et $\frac{T}{2\pi}$ est toujours plus grand que 1 seconde, pour qu'on puisse lire les impulsions.

L'interrupteur était mis en mouvement par une machine Gramme, à aimant Jamin, dans laquelle passait le courant de 6 éléments d'Arsonval à écoulement (1), qui sont restés montés plusieurs mois. Quatre éléments pareils produisaient le courant inducteur.

L'interrupteur, la machine Gramme et les piles sont placés dans une pièce voisine, à plus de 5 mètres de tous les autres appareils. On a vérifié, par des expériences directes, que ni l'aimant de la machine Gramme, ni le courant qui traverse son anneau n'ont aucune action soit sur le galvanomètre, soit sur les diverses parties des circuits inducteur et induit; que les diverses parties du circuit inducteur n'ont aucune action directe sur le galvanomètre ou sur les parties du circuit induit autres que les deux paires de bobines à étudier.

32. La résistance R_2 a été évaluée à diverses températures, en la comparant, par la méthode du pont de Wheatstone, à la boîte de Gaiffe, les deux autres côtés du pont étant formés par des bobines de 10 et 1000 ohms. Les expériences ont porté sur l'appareil A, à vingt fils, n° 25, et sur une paire de bobines auxiliaires D, intermédiaire entre le maximum et le minimum de l'appareil A.

Première série : $hM_A > M_D$. — La résistance R_2 est celle de la bobine inductrice de l'appareil A. Dans les limites de température des expé-

(1) *La lumière électrique*, t. V, p. 121; 1881.

Digitized by Google

riences, on a

$$R_2 = 44,95 + 0,218(t - 10°,2),$$

l'unité étant la résistance à la température t de la bobine numérotée 1 ohm, dans la boite de Gaiffe. Désignant par M_A le maximum du coefficient d'induction de l'appareil A, et par h la fraction de ce maximum que l'on emploie, on a

$$\frac{h M_A}{M_D} = \frac{\Delta + R_2}{\Delta}.$$

Voici quelques-unes des expériences :

TABLEAU I.

h.	t.	Δ.	$\frac{+R_2}{\Delta}$.	$\frac{M_A}{M_D}$.
1.....	15°	68,5 ± 0,1	1,671	1,671
0,9.....	14,2	91,6 ± 0,1	1,500	1,666
0,8'.....	14,7	138,9 ± 0,1	1,338	1,672
0,8.....	14,8	139,2 ± 0,1	1,330	1,662
0,8.....	14,2	137,6 ± 0,1	1,333	1,666
			Moyenne.....	1,667

La dernière colonne contient les valeurs du rapport $\frac{M_A}{M_D}$ déduites des nombres de l'avant-dernière colonne. Leur concordance est à peu près satisfaisante, les différences avec la moyenne étant inférieures à $\frac{1}{300}$. La valeur inscrite de Δ est la valeur lue, augmentée de la résistance des fils de jonction $0^{ohm},37$.

33. *Deuxième série :* $h M_A < M_D$. — Toutes les expériences de cette série ont été faites à la même température 12°,6. La résistance R_2 est celle de la bobine inductrice D, augmentée d'une résistance près de sept fois plus grande, pour que les valeurs de Δ ne soient pas trop petites,

$$R_2 = 18,49.$$

La formule de calcul est

$$\frac{h M_A}{M_D} = \frac{\Delta}{\Delta + R_2}.$$

Digitized by Google

La dernière colonne contient les valeurs de $\frac{M_A}{M_D}$, déduites des nombres de l'antépénultième. L'avant-dernière colonne est calculée au moyen des trois premières lignes du tableau, seules.

TABLEAU II.

h.	Δ.	$\frac{\Delta}{\Delta + R_2}$.	Calculé.	$\frac{M_A}{M_C}$.
0,1	3,69	0,1663		1,663
0,2	9,35	0,336		1,680
0,2'	9,33	0,335		1,675
0,1 + 0,2	18,62	0,5017	0,502	1,672
0,1 + 0,2'	18,70	0,5028	0,501	1,676
0,2 + 0,2'	37,5	0,669	0,671	1,672
0,1 + 0,2 + 0,2' ...	92,7	0,8336	0,837	1,667
0,5	92,5	0,8334		1,667

L'accord des valeurs de ce tableau paraîtra encore satisfaisant, si l'on considère la petitesse de la dérivation Δ et l'erreur considérable qu'elle comporte par cette raison.

Avec les trois premières lignes et la dernière, nous pouvons former les mêmes combinaisons que dans le tableau I; voici la comparaison des résultats directs du tableau I et de ceux obtenus par addition des nombres du tableau II.

TABLEAU III.

h.	Direct.	Par addition.
1,0 = 0,1 + 0,2 + 0,2' + 0,5	1,671	1,670
0,9 = 0,2 + 0,2' + 0,5	1,500	1,504
0,8' = 0,2' + 0,1 + 0,5	1,338	1,334
0,8 = 0,2 + 0,1 + 0,5	1,333	1,335

On doit conclure des tableaux qui précèdent que les expériences sont impuissantes à mettre en évidence une différence entre la véritable valeur de h et celle qu'on a admise comme fournie par la construction, non par défaut de sensibilité, mais à cause des incertitudes sur la valeur des résistances employées.

Digitized by Google

Expériences faites par la méthode *c*.

(Paris, septembre-octobre 1881. — Laboratoire de M. Mascart.)

34. Pour obtenir une stabilité suffisante, le galvanomètre, l'échelle divisée et la lunette ont été installés sur la surface horizontale qui termine un des murs de façade, à la hauteur d'une fenêtre. Le galvanomètre de Thomson à grande résistance (7000 ohms environ) est très sensible; son aiguille astatique est munie d'un petit miroir concave de $0^m,60$ de distance focale principale. C'est à cette distance qu'on a placé l'échelle divisée en millimètres; on la regarde avec une lunette à réticule, pointée à l'infini. Le dixième de millimètre de l'échelle est facile à apprécier.

Les paires de bobines à comparer sont placées sur une table; l'appareil A, à plus de $2^m,50$ du galvanomètre, et l'appareil B, dont la bobine induite est à orientation variable, environ $2^m,50$ plus loin. Ces distances n'étaient pas suffisantes pour que l'action directrice des bobines sur l'aiguille du galvanomètre fût négligeable dans toutes les positions; mais on les a orientées séparément de manière qu'il en soit ainsi. Le déplacement du zéro dû à l'appareil A était, dans l'orientation la plus défavorable, 1^{mm} environ; mais on pouvait tourner de $\pm 10°$ environ à droite et à gauche de la position la plus favorable, sans observer la moindre déviation. Pour l'appareil B, placé bien plus loin, l'effet du courant inducteur était très faible (valeur maximum, $0^{mm},4$) et les limites de l'orientation convenable très étendues. Quant à l'effet de la bobine induite, dont l'orientation est variable, on s'est assuré directement, en la fermant sur elle-même, que, dans aucune orientation, le courant induit n'a d'action directe sur le galvanomètre.

Enfin, en fermant le circuit induit sur lui-même d'une part, le galvanomètre sur lui-même d'autre part, on s'est assuré que les bobines, ainsi orientées, n'induisent dans le galvanomètre aucun courant.

Les résistances additionnelles placées sur la même table que les deux appareils, à peu près à égale distance de chacun d'eux, sont celles d'une excellente boite d'Elliott (n° 434), appartenant au laboratoire de Physique du Collège de France. Elle est construite en alliage platine-

Digitized by Google

argent. Le fil de toutes les bobines a été ployé en double avant d'être enroulé; il n'a aucune action extérieure.

Tous les fils de jonction sont doublés et soigneusement isolés. La pile se compose de dix éléments Daniell, moyen modèle; le galvanomètre étant très sensible, je n'ai pas eu recours à l'interrupteur tournant : je me suis contenté d'observer les impulsions produites, par l'ouverture et la fermeture du circuit inducteur, entre une pointe de cuivre amalgamé et du mercure. Pour le dernier réglage, les mouvements étaient amplifiés par la méthode de Weber, en ouvrant et fermant le circuit inducteur à chaque passage de l'aiguille du galvanomètre par le zéro. On suppose, en agissant ainsi, que les impulsions produites à l'ouverture et à la fermeture du circuit sont identiques, comme le sont, en effet, les intensités intégrales du courant induit. On verra plus loin (n^{os} 37-38) quelle précaution est nécessaire dans le réglage du galvanomètre.

35. Dans la méthode actuelle, le passage du courant induit n'échauffe pas sensiblement les fils dont la résistance entre dans la formule. La température de ces fils est donc la même que celle de l'air ambiant, pourvu que celle-ci ne varie que très lentement; elle fait connaître leur résistance au moyen d'une table ou d'une courbe, construites à l'aide de quelques expériences préliminaires.

Toutes ces résistances ont été déterminées par la méthode du pont de Wheatstone, en fonction de l'ohm de la boîte d'Elliott, à la même température variable. L'unité de résistance dépend donc de la température, mais cela n'a aucune influence, puisque les formules ne contiennent que des rapports de résistances. Les expériences de graduation ont été faites à un petit nombre de températures stationnaires, comprises entre 12° et 18°. Elles ont servi à tracer une courbe, d'où l'on déduit la résistance à une température quelconque. Entre ces limites de température, la courbe se réduit, en général, à une droite; pourtant, celle de l'appareil B s'en écarte sensiblement. En outre, l'inclinaison de la droite n'est pas la même pour trois bobines de provenances différentes, toutes trois construites en fil de cuivre.

36. Il est très important de ne faire les mesures qu'à une tempéra-

Digitized by Google

ture stationnaire. Ayant voulu faire une série de déterminations dans la même journée, un fourneau à gaz, placé dans la salle à grande distance des appareils, fut allumé dès le matin. Vers dix heures, la température de l'air au voisinage des appareils était de 14°; à deux heures et demie, elle atteignait 18°. Le gaz fut alors éteint, et la température baissa peu à peu. Bien que la variation n'eût pas été rapide (4° en quatre heures et demie), les résistances déterminées à des températures égales du thermomètre placé près des appareils, pendant l'élévation et la diminution de la température, différaient très notablement.

Pour restreindre autant que possible les incertitudes qui proviennent de cette cause, toutes les expériences sur les coefficients d'induction ont été faites à des températures comprises entre 15°,9 et 16°,6, et les corrections appliquées seulement à ces petites différences. Pour cela, tout l'air de la salle était chauffé lentement par des fourneaux à gaz, éloignés des appareils; quand la température atteignait 15°,7 environ, la flamme était baissée, puis éteinte. Pendant ces journées d'automne, où la température extérieure était de 12° à 13°, on pouvait disposer de près de trois heures, pendant lesquelles la température continuait à monter jusqu'à 16°, puis baissait très lentement.

Les expériences ont été faites au jour ou à la lumière d'une bougie placée très près de l'échelle divisée. Toutes les sources de lumière un peu intenses, placées de manière à éclairer l'échelle entière, produisaient un déplacement lent et continu du zéro suffisant pour ôter toute concordance aux expériences.

37. Avec ces précautions, j'espérais obtenir de suite de bons résultats. J'ai été arrêté pendant quelque temps par un phénomène bizarre. Quand le réglage des résistances approchait de la perfection, les impulsions produites, à la fermeture et à l'ouverture du circuit inducteur, n'étaient pas symétriques par rapport au zéro. L'impulsion produite à l'ouverture différait d'environ $-0^{mm},7$ de l'impulsion produite à la fermeture. En outre, cette différence conservait sa grandeur et *son signe*, dans quelque sens que le galvanomètre ou la pile fussent attachés aux circuits induit et inducteur.

En étudiant la méthode, je reconnus alors que le courant n'est pas constamment nul lorsque les résistances sont réglées, et je cherchai à

Digitized by Google

modifier la loi du courant sans altérer le réglage du circuit induit, en plaçant une capacité en dérivation entre les deux points A, B du circuit inducteur (*fig.* 1, n° 17). (*Voir* n° 74.)

L'influence de la capacité est *nulle* sur l'impulsion produite à la fermeture du circuit inducteur.

L'impulsion produite à l'ouverture du circuit inducteur varie considérablement avec la capacité, comme le montre le tableau suivant :

Capacité en microfarads.	0,00	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,60	1,00
Impulsion en millimètres.	−0,7	−2,1	−4,1	−6,0	−6,0	−5,7	−4,0	−2,1	−1,0

L'impulsion ne change ni en grandeur ni en signe, quand on change le sens d'attache de la pile ou du galvanomètre au reste des circuits.

38. Ainsi, l'effet est en relation directe avec la loi de variation du courant induit. Or l'aiguille du galvanomètre porte un amortisseur formé d'une mince palette d'aluminium, qu'on ne peut enlever sans tout détruire. Si cette lame métallique n'est pas orientée d'une manière absolument symétrique par rapport aux bobines du galvanomètre, des courants peuvent y être induits même quand l'intensité intégrale est nulle. L'action électrodynamique totale qui s'exerce entre ces courants et ceux du galvanomètre est évidemment indépendante en grandeur et en signe du sens de ceux-ci. En déplaçant le zéro du galvanomètre au moyen de l'aimant directeur, on doit donc changer la grandeur et le signe de l'effet observé, mais non la loi de variation avec la capacité. On constate en effet que l'impulsion maximum a toujours lieu quand la capacité est 0, 25 microfarad, mais que sa valeur dépend de la position du zéro.

Zéro	139	155	172	180	185	211
Impulsion pour C = 0,25	− 2,3	− 1,5	− 0,7	0,0	+ 0,4	+ 1,5

On peut donc trouver une position du zéro pour laquelle l'impulsion à l'ouverture est nulle, en même temps que l'impulsion à la fermeture. Cette position est déterminée avec précision grâce à la capacité additionnelle. Pour toutes les observations qui seront citées, le zéro est ainsi déterminé, et la capacité ensuite enlevée. La symétrie des impul-

Digitized by Google

sions de fermeture et de rupture rend alors applicable la méthode d'amplification de Weber.

Résultats.

39. 1° *Comparaison de l'appareil* A *avec l'appareil* B *fixé dans une position invariable.* — Toutes ces expériences ont été faites à la température de 16°,1. La formule de calcul est

$$\frac{h\mathrm{M_A}}{\mathrm{M_B}} = \frac{r_\mathrm{A} + r}{r_\mathrm{B}},$$

où l'on a

$$r_\mathrm{A} = 1264,1, \quad r_\mathrm{B} = 974,2.$$

TABLEAU IV.

h.	r.	O.	C.	$\frac{\mathrm{O}-\mathrm{C}}{\mathrm{O}}$.
0,1	191 ± 0,5	1,493 ± 0,001	1,491	+ 0,0013
0,2	1639 ± 3	2,980 ± 0,003	2,981	— 0,0003
0,2'	1640 ± 3	2,981 ± 0,003	2,981	0,0000
0,5	5994 ± 3	7,450 ± 0,003	7,452	— 0,0003

La colonne C donne le nombre qu'on obtiendrait en prenant la fraction indiquée par h du total de la colonne O. La dernière colonne, comparée aux erreurs probables des mesures, montre qu'en adoptant pour h la valeur donnée par construction, on ne s'expose pas à une erreur supérieure au millième de la valeur exacte; elle est même probablement bien inférieure.

40. 2° *Comparaison de l'appareil* B *à graduation continue avec* 0,5 *de l'appareil* A. — Je me contenterai de citer l'une des séries d'expériences. Le zéro (position d'induction mutuelle nulle) déterminé directement est dans cette série à + 5°,60 exactement. Le vernier au dixième de degré permet d'apprécier le vingtième; l'angle d'une direction quelconque avec la direction du zéro est donc connu à moins de 0°,1 près. Néanmoins l'erreur qui peut en résulter est très supérieure à celle qui provient de la détermination électrique. Le tableau suivant résume les résultats. Dans la première colonne sont les angles α comptés à partir du zéro; dans la seconde, les valeurs corres-

Digitized by Google

pondantes observées du rapport de M_B pour chaque angle, à $0{,}5\,M_A$. La valeur du maximum, 0,5272, a été déterminée au moyen des angles de 70°, 80°, 90°, 100° et 110°, par l'application de la loi du sinus. Une petite erreur dans la détermination de ces angles est complètement inappréciable sur le sinus. Le maximum est donc très bien connu; les nombres de la colonne C_1 ont été calculés au moyen de ce maximum et de la loi du sinus. La colonne $O - C_1$ contient les différences, qui atteignent des valeurs très supérieures aux erreurs possibles de mesure électrique, erreurs toujours inférieures à $\frac{1}{300}$ de la valeur mesurée. L'erreur qu'entraînerait une incertitude de 0°,1 sur la mesure de l'angle est inscrite dans la colonne θ. Enfin, la colonne ε contient la somme des deux erreurs possibles, dans la lecture de l'angle et dans la mesure électrique.

TABLEAU V.

α.	O.	C_1.	$O - C_1$.	θ.	ε.	C_2.	$O - C_2$.
5°,1	471	469	+ 2	9	10	464	+ 7
10,1	918	924	— 6	9	11	914	+ 4
15,1	1364	1373	— 9	9	12	1361	+ 3
20,1	1800	1812	— 12	9	12,5	1795	+ 5
25,1	2217	2236	— 19	8	12,5	2217	0
30,1	2635	2645	— 10	8	13	2630	+ 5
35,1	3010	3032	— 22	7,5	13,5	3011	— 1
40,1	3386	3397	— 11	7	13,5	3383	+ 3
45,1	3715	3745	— 30	6,5	14	3725	— 10
50,1	4035	4045	— 10	6	14	4032	+ 3
60,1	4555	4572	— 17	4,6	13,6	4563	— 8
70,1	4950	4959	— 9	3	13	4957	— 7
80,1	5192	5193	— 1	1,6	12,6	5198	— 6
90,1	5279	5272	+ 7	0	10,5	5278	+ 1
100,1	5191	5190	+ 1	— 1,6	12,6	5196	— 5
110,1	4950	4953	+ 3	— 3	13	4954	— 4

N. B. — Tous les nombres ont été multipliés par 10^4 avant d'être inscrits.

Ainsi, l'application de la loi du sinus à cet appareil est permise, si on ne lui demande pas une précision supérieure au centième. On pourrait même choisir une valeur du maximum un peu inférieure, 0,5258, qui donne une différence inférieure à $\frac{1}{200}$; mais j'ai préféré conserver la valeur du maximum déterminée directement.

Digitized by Google

41. Les différences peuvent provenir de deux causes distinctes :

1° L'appareil étant bien centré, la bobine extérieure n'est pas assez longue pour que la loi du sinus soit exacte. Alors le coefficient d'induction peut être développé en sinus et cosinus de l'angle et de ses multiples; mais le coefficient d'induction doit évidemment changer de signe sans changer de valeur absolue, quand on remplace α par $-\alpha$, ou par $\pi+\alpha$, cet angle étant compté à partir de la position d'induction mutuelle nulle. Le développement ne doit donc contenir aucun cosinus et seulement les sinus des angles impairs; le premier terme de correction sera de la forme $a\sin 3\alpha$.

2° L'axe autour duquel tourne la bobine intérieure ne passe exactement ni par le centre de la bobine mobile, ni par celui de la bobine fixe. L'erreur qui en provient change de signe quand la bobine mobile occupe deux positions distantes de 180°; elle est donc de la forme $b\sin 2\alpha + c\cos 2\alpha$.

Malheureusement les différences sont trop faibles, surtout eu égard à l'incertitude sur la valeur de l'angle, pour déterminer avec certitude la forme de la correction. Toutefois la comparaison avec les résultats obtenus de l'autre côté du zéro et le soin apporté à la construction me font regarder la seconde cause d'erreur comme très faible.

J'ai inscrit, dans la colonne C_2, les nombres calculés par la formule

$$10^4 M_\alpha = (5272 - 10)\sin\alpha - 15\sin 3\alpha,$$

et les différences $O - C_2$ sont toutes inférieures aux nombres de la colonne ε. La formule permet alors de déterminer M_α avec une erreur moindre que $\frac{1}{300}$ du maximum.

Les deux appareils A et B n'auraient besoin que de très faibles modifications pour donner, par construction, des coefficients compris entre o et 10M, à moins de $\frac{1}{1000}$ près de M. Ils pourraient donc servir, comme je l'ai indiqué au n° 24.

Valeurs absolues.

42. M. Mascart a mis à ma disposition deux bobines cylindriques de même longueur, destinées à des mesures de courant en valeur absolue par la balance électrodynamique. Je les désignerai par la lettre C.

Digitized by Google

Voici leurs dimensions, telles qu'elles ont été déterminées pendant la construction même :

	Diamètre moyen déduit de la longueur totale du fil.	Longueur de la bobine.	Nombre total des tours.
	cm	cm	
Grande bobine 1.....	10,9	48,5	3263
Petite » 2.....	4,98	48,5	3272

Leur coefficient d'induction mutuelle est donné par la formule (MAXWELL, t. II, p. 282)

$$M = 4\pi^2 \frac{n_1 n_2}{l_1 l_2} R_2^2 (l_1 - 2R_1 \varepsilon),$$

$$\varepsilon = 0,500 + 0,0625 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \ldots + \frac{l_1 - \sqrt{l_1^2 + R_1^2}}{2R_2}$$

lorsque leurs axes et leurs milieux coïncident. On trouve ainsi

$$M_C = 4,79 \times 10^7 \text{ C.G.S},$$

en négligeant l'influence du diamètre des fils et de l'épaisseur des quatre couches. La valeur calculée par la formule simple, où l'on néglige l'influence des extrémités, serait notablement différente, $5,39 \times 10^7$. Je pense que la valeur $4,79 \cdot 10^7$ est exacte à $\frac{1}{500}$ près environ. On peut alors se faire une idée de la valeur absolue des deux autres appareils.

43. Voici les résultats de la comparaison directe avec l'appareil A tout entier :

$r_C = 108$ ohms à 16°,6. Sa valeur a été ramenée dans chaque cas à la température t.

t.	r.	$\frac{r_A}{r_C + r}$.	Observations.
16°,3	135,7 ± 0,5	5,190	La bobine intérieure C est à peu près au centre de l'autre; les milieux des longueurs sont en coïncidence.
17,07	136,5 ± 0,2	5,177	
17,05	136,8 ± 0,2	5,170	La bobine intérieure est très excentrique; elle repose sur la bobine la plus large. Les milieux des longueurs sont en coïncidence.
17,2	137,5 ± 0,5	5,154	
17,0	129,5 ± 0,2	5,328	Bobines excentrées; milieux des longueurs à 3cm,8 l'un de l'autre.

Digitized by Google

On voit, par ce Tableau, que l'excentricité des axes n'a qu'une influence médiocre sur la valeur du coefficient d'induction mutuelle. La distance du milieu des longueurs a, au contraire, une importance considérable.

Les deux premières expériences donnent

$$1\,M_A = 5,18\,M_C = 5,18 \times 4,79 \times 10^7 = 2,48 \times 10^8$$

et (n° 40)

$$\max M_B = 0,5\,M_A \times 0,5272 = 0,527 \times 1,24 \times 10^8 = 6,53 \times 10^7.$$

Telles sont, à peu près, les valeurs absolues des coefficients d'induction mutuelle des deux appareils A et B.

CHAPITRE IV.

COMPARAISON D'UN COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION ET D'UN COEFFICIENT D'INDUCTION MUTUELLE.

Méthode de Maxwell. — Discussion.

44. Je n'ai employé que la méthode de Maxwell (n° 21).

Pour obtenir un changement de signe des impulsions du galvanomètre, il faut choisir r_2 et r_4 tels que l'on ait

$$\frac{L}{M} > 1 + \frac{r_2}{r_4},$$

ce qui exige déjà que L soit supérieur à M. Il faut, en outre, que M soit négatif, ce qu'on obtient en attachant convenablement les fils.

Pour que la relation simple (2) (n° 21) soit applicable, il faut que les côtés 2, 3, 4 du pont n'aient qu'un coefficient d'induction insensible. Lorsque le fil des boîtes de résistances n'est pas ployé en double, les

Digitized by Google

valeurs de k peuvent être très différentes, pour la même paire de bobines; je n'en citerai qu'un exemple : c'est un essai fait avec les boites de Gaiffe dont je disposais à Nancy :

	r_1.	r_2.	r_3.	r_4.	Δ.	k.
Appareil A.....	1000	106,3	84	212,4	23,6
»	1000	102,3	81,16	3000	14

Cet essai, fait au moyen de l'interrupteur tournant (n° 31), m'a pourtant montré avec quelle précision on peut régler la résistance Δ. On peut donc espérer de bons résultats, mais il est indispensable que les fils soient ployés en double; cette condition elle-même n'est pas toujours suffisante (n^{os} 60 et 61); au moins elle rend possible l'élimination du coefficient inconnu.

45. *Discussion.* — Examinons ce qui se passerait si les résistances du pont n'étaient pas bien réglées.

1° *État permanent.* Désignons par j l'intensité du courant dans le galvanomètre, dont la résistance est g, par I l'intensité du courant qui traverse la pile P, et posons

$$J = i_1 + i_2;$$

les équations des circuits fermés ACD, BCD, AΔBD (*fig.* 3, n° 21) sont

$$\begin{aligned} &r_1 i_1 + gj - r_3 i_3 = 0, \\ &r_2 i_1 - r_2 j - gj - r_4 i_3 - r_4 j = 0, \\ &\Delta(I - J) = r_3 i_3 + r_4 (i_3 + j). \end{aligned}$$

De ces équations on peut tirer, par des calculs faciles,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &r_2 r_3 - r_1 r_4 = D \frac{j}{J}, \\ &i_1 = J \frac{r_3}{r_1 + r_3} - j \frac{g}{r_1 + r_3}, \\ &i_3 = J \frac{r_1}{r_1 + r_3} + j \frac{g}{r_1 + r_3}, \\ &I = J\left(1 + \frac{\mathfrak{P}'}{\Delta \mathfrak{R}}\right) + j \frac{r_1 r_4 - r_2 r_3}{\Delta \mathfrak{R}}, \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

en posant, comme on en a l'habitude,

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \\ \mathfrak{P} = (r_1 + r_3)(r_2 + r_4), \qquad \mathfrak{P}' = (r_1 + r_2)(r_3 + r_4), \\ \mathrm{D} = g\mathfrak{R} + \mathfrak{P}. \end{cases}$$

46. *Période variable.* — Pour simplifier l'écriture, désignons par la lettre q les intensités intégrales qui entrent dans les équations (II) (n° 15); en se rappelant la définition de cette quantité (n^{os} 10 et 12) quand l'intensité finale n'est pas nulle, on voit que, pendant un temps t supérieur à la durée de la période variable, le galvanomètre a été parcouru par une intensité intégrale $jt + q$; j est déterminé par le paragraphe précédent, occupons-nous de q.

Les équations (II) (n° 15), appliquées aux circuits fermés ACD, BCD, donnent

$$r_1 q_1 + \mathrm{L}_1 i_1 + \mathrm{MI} + gq + \mathrm{G}j - r_3 q_3 - \mathrm{L}_3 i_3 = 0,$$
$$r_2 q_1 + \mathrm{L}_2 i_1 - r_4 q_3 - \mathrm{L}_4 i_3 - (r_2 + r_4 + g)q - (\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_4 + \mathrm{G})j = 0,$$

où G désigne le coefficient de self-induction du galvanomètre.

Je vais tirer de ces équations la valeur de q en fonction de la somme $q_1 + q_3$, que j'appelle Q. Cette substitution, faite dans les équations, donne

$$-\mathrm{D}q - (r_1 r_4 - r_2 r_3)\mathrm{Q} - \mathfrak{R}\mathrm{G}j - (r_1 + r_3)(\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_4)j$$
$$- (r_2 + r_4)(\mathrm{L}_1 i_1 + \mathrm{MI} - \mathrm{L}_3 i_3) + (r_1 + r_3)(\mathrm{L}_2 i_1 - \mathrm{L}_4 i_3) = 0,$$

et, en substituant les valeurs de i_1, i_3, I, tirées de (1) (n° 45),

$$(3)\qquad \begin{cases} -\mathrm{D}q + \mathrm{D}\dfrac{j}{\mathrm{J}}\mathrm{Q} - \mathfrak{R}\mathrm{G}j + (\mathrm{L}_2 r_3 - \mathrm{L}_4 r_1)\mathrm{J} - j(\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_4)(r_1 + r_2 + g) \\ -(r_2 + r_4)\left[\mathrm{L}_1 \dfrac{r_3 \mathrm{J} - gj}{r_1 + r_3} + \mathrm{M}\dfrac{(\Delta\mathfrak{R} + \mathfrak{P}')\mathrm{J} + (r_1 r_4 - r_2 r_3)j}{\Delta\mathfrak{R}} - \mathrm{L}_3 \dfrac{r_1 \mathrm{J} + gj}{r_1 + r_3}\right] = 0. \end{cases}$$

47. Or on a

$$r_2 r_3 - r_1 r_4 = \frac{\mathrm{D}j}{\mathrm{J}},$$

d'où, en ajoutant et retranchant $r_3 r_4$,

$$(r_2 + r_4)r_3 - (r_1 + r_3)r_4 = \mathrm{D}\frac{j}{\mathrm{J}}.$$

Digitized by Google

Remplaçons D par sa valeur, et multiplions les deux membres par $\frac{J}{r_1+r_3}$, il vient

$$\frac{r_2+r_4}{r_1+r_3}r_3J-r_4J=j\left(g+g\frac{r_2+r_4}{r_1+r_3}+r_2+r_4\right),$$

d'où enfin

$$\frac{r_2+r_4}{r_1+r_3}r_3J-\frac{r_2+r_4}{r_1+r_3}gj=r_4J+j(g+r_2+r_4).$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient de L_1 dans l'équation (3) (n° 46); on peut mettre ce terme sous la forme plus simple

$$-[r_4J+j(g+r_2+r_4)]L_1. \tag{4}$$

On trouvera de même

$$\frac{r_2+r_4}{r_1+r_3}r_1J+gj\frac{r_2+r_4}{r_1+r_3}=r_2J-j(g+r_2+r_4),$$

d'où, pour le terme en L_3,

$$+L_3[r_2J-j(g+r_2+r_4)]. \tag{5}$$

48. Transformons maintenant le terme en M,

$$-(r_2+r_4)M\left(J+\frac{r_1+r_2}{\Delta}\frac{r_3+r_4}{\mathfrak{R}}J+j\frac{r_1r_4-r_2r_3}{\Delta\mathfrak{R}}\right),$$

et mettons-y en évidence la quantité k (n° 21).

En remarquant qu'on a

$$r_4k=r_2+r_4+r_2\frac{r_3+r_4}{\Delta},$$

quelques réductions très simples donnent au terme M la forme

$$-r_4kM-\frac{(r_3+r_4)J+(r_2+r_4)j}{\Delta\mathfrak{R}}(r_1r_4-r_2r_3)M,$$

et successivement

$$-r_4kM-\frac{DJ}{\Delta\mathfrak{R}}M\left[r_3+r_4+\frac{I}{J}(r_2+r_4)\right],$$

Digitized by Google

au moyen de la relation

$$r_1 r_4 - r_2 r_3 = -\mathrm{D}\frac{J}{\mathrm{J}},$$

et enfin

$$(6) \qquad -r_4 k\mathrm{M} + \frac{j}{\Delta}[g(r_3+r_4)+r_3(r_2+r_4)\mathrm{M}.$$

49. Les expressions (4), (5), (6) donnent, pour le dernier terme de l'équation (3),

$$\mathrm{J}[-r_4(\mathrm{L}_1+k\mathrm{M})+\mathrm{L}_3 r_2] + j\left[-(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3)(g+r_2+r_4)+\mathrm{M}\frac{g(r_3+r_4)+r_3(r_2+r_4)}{\Delta}\right],$$

et cette équation peut alors s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} -\mathrm{D}q+\mathrm{D}\dfrac{j}{\mathrm{J}}\mathrm{Q}-\mathfrak{R}\mathrm{G}j \\ \quad -j\left[(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3)(g+r_2+r_4)+(\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_4)(g+r_1+r_3)-\mathrm{M}\dfrac{g(r_3+r_4)+r_3(r_2+r_4)}{\Delta}\right] \\ \qquad\qquad -\mathrm{J}[r_4(\mathrm{L}_1+k\mathrm{M})-r_2\mathrm{L}_3-r_3\mathrm{L}_2+r_1\mathrm{L}_4]=0 \end{cases}$$

ou

$$-\mathrm{D}q+\mathrm{D}\frac{j}{\mathrm{J}}\mathrm{Q}-\mathfrak{R}\mathrm{G}j+\mathrm{D}j\left(\frac{\mathrm{L}_3}{r_3}+\frac{\mathrm{L}_2}{r_2}\right) -j\left[(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3)(g+r_2+r_4)+(\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_4)(g+r_1+r_3)-\mathrm{M}\frac{g(r_3+r_4)+r_3(r_2+r_4)}{\Delta}\right] -r_1 r_4\mathrm{J}\left(\frac{\mathrm{L}_1+k\mathrm{M}}{r_1}-\frac{\mathrm{L}_2}{r_2}-\frac{\mathrm{L}_3}{r_3}+\frac{\mathrm{L}_4}{r_4}\right)=0,$$

et, en la résolvant,

$$(8)\quad \frac{q}{j}=\begin{cases} -\dfrac{r_1 r_4}{\mathrm{D}}\dfrac{\mathrm{J}}{j}\left(\dfrac{\mathrm{L}_1+k\mathrm{M}}{r_1}-\dfrac{\mathrm{L}_2}{r_2}-\dfrac{\mathrm{L}_3}{r_3}+\dfrac{\mathrm{L}_4}{r_4}\right) \\ +\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{J}}-\dfrac{\mathfrak{R}\mathrm{G}}{\mathrm{D}}+\dfrac{\mathrm{L}_3}{r_3}+\dfrac{\mathrm{L}_2}{r_2}+\mathrm{M}\dfrac{g(r_3+r_4)+r_3(r_2+r_4)}{\Delta\mathrm{D}} \\ -\dfrac{(\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3)(g+r_2+r_4)}{\mathrm{D}}-\dfrac{(\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_4)(g+r_1+r_3)}{\mathrm{D}}. \end{cases}$$

50. Il est facile de se rendre compte de l'ordre relatif des différents termes du second membre. Je suppose que $\frac{\mathrm{M}}{r_1}$ soit de l'ordre de 10^{-n}

Digitized by Google

C.G.S. On peut regarder l'ensemble des deux dernières lignes comme étant à peu près du même ordre; n est ordinairement compris entre 2 et 4.

L'équation (8) pourra donc s'écrire

$$\frac{q}{j} = 10^{-n}\left[-\frac{r_1 r_4}{D}\left(\frac{L_1}{M} + k - \frac{r_1 L_2}{r_2 M} - \frac{r_1 L_3}{r_3 M} + \frac{r_1 L_4}{r_4 M}\right)\frac{J}{j} + h\right],$$

h étant un nombre peu différent de l'unité.

On a réglé l'état permanent de manière que

$$\frac{r_1 r_4}{D}\frac{J}{j}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} - 1\right)^{-1},$$

soit de l'ordre de 10^{α}, et on veut régler l'état variable de manière que

$$\frac{L_1}{M} + k - \frac{r_1}{r_2}\frac{L_2}{M} - \frac{r_1}{r_3}\frac{L_3}{M} + \frac{r_1}{r_4}\frac{L_4}{M}$$

soit de l'ordre de $10^{-\beta}$. Il faudra que l'on ait

$$\frac{q}{j} = 10^{-n}(h' 10^{\alpha-\beta} + h),$$

en désignant par h' un nombre peu différent de l'unité. On voit d'abord qu'on ne peut pas donner à β une valeur supérieure à α, parce que le terme h, qui n'a aucun rapport avec ce qu'on veut mesurer, deviendrait prédominant. On peut atteindre en toute sécurité pour β la valeur $\alpha - 2$ ou même $\alpha - 1$, lorsque M ne diffère pas trop de L.

Par exemple, pour déterminer k à 0,0001 près, il faudrait avoir réglé les résistances à 0,000001 ou au moins 0,00001 près. C'est donc une limite qu'il paraît à peu près impossible de dépasser et même difficile d'atteindre.

51. Le terme en h étant négligeable, on voit qu'on a sensiblement

$$\frac{q}{j} = h' 10^{\alpha-\beta-n},$$

et $\alpha - \beta - n$ est compris entre $1 - n$ et $2 - n$; c'est donc toujours un nombre négatif, généralement compris entre -2 et -3; et, pour

Digitized by Google

obtenir toute la précision dont la méthode est susceptible, il faudrait que le galvanomètre fût cent à mille fois plus sensible aux courants instantanés qu'aux courants constants. Or, le rapport des quantités q et j qui produisent une impulsion et une déviation permanente du même nombre de divisions est

$$\frac{q}{j} = \frac{T}{\pi}.$$

C'est l'inverse du rapport des sensibilités, et, dans les galvanomètres ordinaires, ce temps varie de une à trois secondes environ (¹). Il est donc indispensable de recourir à un interrupteur tournant, employé comme au n° 31. L'aiguille prend alors une déviation fixe, et le rapport des sensibilités est égal au nombre N des fermetures du circuit par seconde.

52. Rappelons l'ordre des contacts établis par l'interrupteur :

1° La pile étant ouverte, le galvanomètre, dans lequel tout courant a disparu, est réuni aux sommets C, D du pont;

2° Un quart de tour après, la pile est fermée; le galvanomètre est alors parcouru, pendant un quart de tour, par un courant dont l'intensité intégrale est (n° 46)

$$j \times \frac{1}{4N} + q,$$

à condition que le temps $\frac{1}{4N}$ soit suffisant pour arriver à l'état permanent;

3° A la fin de ce second quart de tour, le galvanomètre est fermé sur lui-même. Il était parcouru par un courant j, qui tombe à zéro en

(¹) Un choix convenable des diverses pièces mobiles permet de diminuer notablement ce rapport $\frac{T}{\pi}$, en conservant toute la sensibilité au courant permanent; mais c'est encore insuffisant. Il faudrait atteindre au moins une sensibilité dix fois plus grande au courant instantané qu'au courant permanent, c'est-à-dire réduire T à moins de $\frac{1}{3}$ de seconde, sans augmenter la force directrice; et, à cause de la rapidité du mouvement, l'impulsion ne pourrait être lue qu'en lui donnant une amplitude constante, par l'ouverture et la fermeture du circuit à chaque passage au zéro (méthode de Weber), c'est-à-dire plus de six fois par seconde. Un mécanisme serait donc encore nécessaire.

Digitized by Google

produisant un extra-courant dont l'intensité intégrale q' est donnée par

$$gq' - Gj = 0 \quad \text{(Ch. II, n° 15)};$$

4° Puis la pile est ouverte sans produire aucun effet sur le galvanomètre, et tout recommence.

On remarquera que, par cette manière d'employer l'interrupteur, les circuits ACD, BCD, qui seuls ont fourni des équations de l'état variable employées aux n^{os} 21, 22, 23, 24 et 46, ne sont jamais ouverts. Le courant de fermeture étant seul recueilli par le galvanomètre, on est bien dans les conditions auxquelles correspondent les équations.

L'intensité intégrale qui parcourt le galvanomètre en une seconde est donc

$$\frac{1}{4}j + (q + q')N.$$

L'intensité $\frac{1}{4}j$ est insensible, puisque l'intensité j était elle-même insensible pendant l'état permanent. Quant au terme q', il ne modifie pas sensiblement la valeur du coefficient de j tout entier (8) (n° 49), et les conclusions du n° 50 subsistent entièrement.

53. Le terme principal est donc

$$-N\frac{r_1 r_4 J}{D}\left(\frac{L_1 + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4}\right).$$

En le rapprochant de la valeur de j,

$$j = \frac{r_1 r_4}{D} J\left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} - 1\right),$$

on voit :

1° Que *les conditions du maximum de sensibilité du pont sont les mêmes que pour l'état permanent*. Elles ne dépendent, en effet, que du facteur $\frac{r_1 r_4}{D} J$; il y a évidemment tout avantage à ce que Δ soit le plus grand possible, ce qui rapproche la valeur de J de celle de I;

2° Que *l'erreur sur le rapport* $\frac{L}{M}$ *des coefficients d'induction sera* $\frac{1}{N}\frac{r_1}{M}$ *fois l'erreur sur le rapport des résistances dans la même expérience, lorsque* L_2, L_3, L_4 *sont négligeables*. Par exemple, avec les bobines que

Digitized by Google

j'employais (appareil C), on avait environ

$$\frac{M}{r_1} = 0{,}0005 \text{ C.G.S.}$$

Supposons que N soit égal à 10 (¹); pour connaître k à 0,0005 près, il faut avoir réglé les résistances à environ $\frac{1}{400000}$ près.

Lorsque les bobines sont très éloignées, et que $\frac{M}{r_1}$ est petit, le rapport k ne peut plus être déterminé avec précision. On peut bien augmenter N, mais jusqu'à une certaine limite seulement, limite qui est fixée non par la grandeur de M, mais par celle de L, puisqu'il faut que l'état permanent soit atteint avant de rompre le circuit.

Disposition des expériences.

54. Les appareils ont été disposés à peu près comme dans la précédente méthode de mesure. L'ensemble des deux bobines à comparer formant le côté 1 du pont est placé à plus de 4 mètres du galvanomètre. Sur une table voisine de l'observateur est placée la boîte de résistances qui forme les côtés 2, 3, 4 du pont. C'est une boîte construite par MM. Elliott (n° 434), qui appartient au laboratoire de Physique du Collège de France; elle est divisée en trois parties : deux (I, II) qui ne contiennent que les bobines de 10, 100, 1000 et 10000 ohms; et la troisième (III) qui permet de former toutes les résistances exprimées par un nombre entier d'ohms compris entre 1 et 11110. De nombreuses vérifications faites au cours des expériences ont montré que le rapport réel des résistances ne diffère pas de $\frac{1}{2000}$ du rapport indiqué. Pour plusieurs des bobines, les rapports d'égalité sont même exacts à moins de $\frac{1}{10000}$ près. Tant qu'on ne voudra connaître le rapport k qu'à $\frac{1}{2000}$ près, les erreurs de la boîte sont absolument négligeables.

Cette boîte est construite en alliage platine-argent; les fils sont ployés en double avant d'être enroulés, et isolés par de la soie et de la paraffine. Leurs dimensions, telles qu'elles m'ont été fournies par MM. Elliott, sont les suivantes :

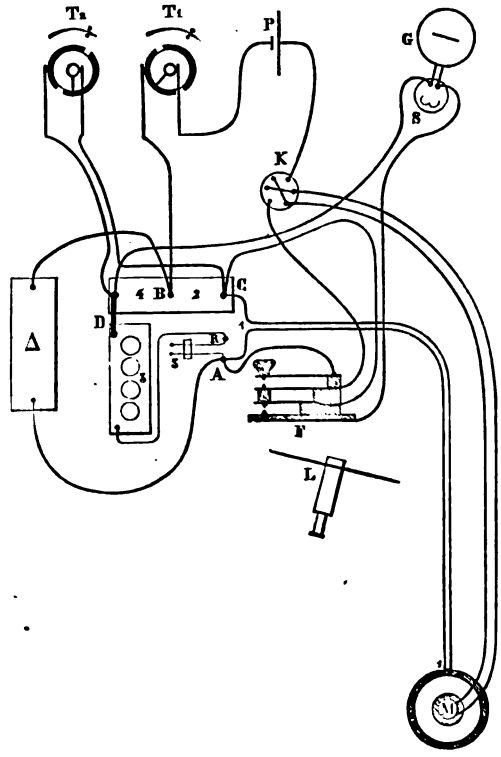
Résistances en ohms.....	1	10	100	1000	10000
Diamètre du fil en millimètres...	0,609	0,305	0,177	0,106	0,063
Longueur du fil en mètres.....	0,914	2,54	9,29	24,4	107,4

(¹) En réalité, la vitesse employée était souvent plus grande, double ou triple.

Digitized by Google

Ce sont les seules résistances qui entrent dans la construction des

Fig. 7.



Les lettres et les numéros communs à la figure actuelle et au diagramme correspondant (*fig.* 3, Ch. II) ont la même signification.

A, B, C, D, 1, 2, 3, 4, sommets et côtés du pont de Wheatstone.

R, rhéostat de Pouillet, sur le côté 3.

F, clef AB, pour le réglage de l'état permanent. On la maintient constamment fermée pour le réglage de l'état variable.

Δ, dérivation employée seulement pendant l'état variable.

K, commutateur placé sur le trajet de la bobine inductrice M, seule; il permet de changer le sens du courant dans cette bobine, sans le changer dans le pont. On le place de telle sorte que les impulsions de fermeture soient de signes contraires pour Δ nul et pour Δ infini.

T_1, T_2, les deux parties de l'interrupteur tournant, dans la position où on l'arrête pour régler l'état permanent.

T_1 est sur le trajet direct de la pile.

T_2 est en dérivation sur le galvanomètre. En tournant dans le sens des flèches, au moment de l'ouverture du circuit, T_2 forme un shunt de résistance nulle sur le galvanomètre.

G, S, galvanomètre et son shunt.

L, lunette et échelle divisée.

Digitized by Google

trois parties (I, II, III). Toutes sont enroulées sur des bobines de buis, de mêmes dimensions :

Diamètre intérieur.....	8^{mm} à 9^{mm}
Longueur.....	19^{mm}

Les bobines de 1, 10, 100 ohms ne semblent avoir qu'une seule épaisseur de fil; celles de 1000 ohms, deux, et celles de 10000, un plus grand nombre.

55. Comme le galvanomètre, employé avec toute sa sensibilité, devait rester aussi rigoureusement que possible au zéro (nos 50-52), les divisions discontinues de la boîte III ne suffisaient pas. Je lui ai ajouté un rhéostat continu de Pouillet.

Sur une planche sont tendus parallèlement deux fils de maillechort. Une extrémité de chacun d'eux est isolée, l'autre communique avec le reste du circuit par une large lame de cuivre plongeant dans des godets pleins de mercure. Dans un bouchon est creusée une rigole remplie de mercure, qui réunit les deux fils, à une distance variable de leur point d'attache avec le reste du circuit. Une division collée le long de la planchette fait connaître cette distance.

Avec des fils de $0^{m},005$ de diamètre et de $0^{m},20$ de longueur, on peut faire varier la résistance de 0 à 0,5 ohm, par le déplacement du bouchon. Une longueur du même fil, ayant environ 0,5 ohm de résistance et ployée en double, pouvait aussi être ajoutée à la boîte III. On pouvait donc graduer la résistance de l'une des branches du pont par millièmes d'ohm; cela a toujours été suffisant, mais souvent nécessaire. Des expériences de comparaison ont donné la valeur de ces fils auxiliaires; mais, à cause des variations de température, on a toujours mesuré les résistances r_1 et Δ en choisissant les autres côtés du pont, de manière à utiliser toute la boîte III, quelles que soient d'ailleurs les résistances des côtés du pont employées dans la mesure du phénomène d'induction. Le rôle du rhéostat a été réduit à maintenir exactement le galvanomètre au zéro pendant les expériences.

56. La boîte qui forme la dérivation Δ est placée soit sur la même table que la boîte qui constitue le pont, quand elle est peu encombrante,

Digitized by Google

soit sur une table différente. J'ai d'abord employé une très bonne boîte d'Elliott (n° 339), appartenant au laboratoire de recherches de la Sorbonne (¹). Cette boîte, très bien graduée, est construite en maillechort; elle a été étalonnée à une température différente de celle qui forme le pont. Pour ces deux raisons, les résistances qu'elle indique sont rapportées à une unité différente de celle du pont, et variable. J'ai donc dû, dans chaque expérience, faire suivre le réglage de Δ de sa mesure. Les communications permettent de substituer rapidement la résistance Δ au côté 1 du pont. Aussitôt après, on vérifie que cette valeur de Δ est bien celle qui convient à l'expérience d'induction.

J'ai employé plus tard un simple rhéostat médical de Gaiffe (²); la nécessité de mesurer Δ en fonction des résistances du pont rend inutile la précision de la boîte d'Elliott (339). Le fil de ce rhéostat n'est pas doublé, mais ce n'est qu'un défaut secondaire pour cette partie du circuit, dont le coefficient d'induction propre n'intervient pas dans la méthode. Il suffit de l'éloigner assez de tout le reste du circuit pour qu'aucun coefficient d'induction mutuelle n'apparaisse; il n'y a même à s'occuper que du galvanomètre et du côté 1 du pont, car, les trois autres côtés du pont étant formés de fils ployés en double, une distance de quelques centimètres est suffisante. Tous les fils de jonction sont bien isolés et tordus ensemble.

57. *État permanent.* — L'état permanent a été établi au moyen d'une clef qui ferme d'abord la pile, et, quelques centièmes de seconde plus tard, le galvanomètre, comme la clef de l'Association britannique; seulement les contacts sont obtenus par de gros fils de cuivre nickelés plongeant dans du mercure propre. Les contacts platine-platine par simple pression sont souvent irréguliers, par suite des moindres poussières. Le contact à mercure, dont j'avais craint les variations, s'est montré excellent; commençant toujours par lui attribuer les difficultés que j'ai rencontrées, je l'ai très fréquemment contrôlé.

(¹) Cette boîte a été mise à ma disposition par M. Bouty pendant près de trois semaines, avec une complaisance dont je suis heureux de lui témoigner ici ma reconnaissance.

(²) Comme ils sont construits actuellement avec des bobines de fil, et non avec le mélange kaolin-charbon, dont les contacts sont très insuffisants.

Digitized by Google

État variable. — Le pont étant réglé le mieux possible, un commutateur à mercure établit les communications avec l'interrupteur tournant, qui est placé sur une table éloignée. Cet interrupteur (n° 31) est entraîné par une grande roue mue à la main (1); au besoin, le mouvement est réglé sur un métronome.

Les communications sont établies avec la diagonale de la pile et avec celle du galvanomètre, comme l'indiquent les figures 6 (n° 31) et 7 (n° 54).

58. La clef de l'Association britannique, ou toute clef analogue, par un arrangement convenable des fils, permet d'opérer une seule fois la même série de communications que l'interrupteur répète à chaque tour (n° 31). Cela suffit, avec le galvanomètre du Collège de France, pour faire les mesures à plus de $\frac{1}{100}$. On peut alors reconnaître toute l'efficacité de la méthode qui consiste à shunter le galvanomètre presque aussitôt le courant fermé. On constate qu'on peut dérégler les quatre côtés du pont au point de faire sortir l'image de l'échelle pendant l'état permanent et conserver néanmoins la même impulsion pour l'état variable :

r_3.	2100.	2150.	2200.	2250.
Déviation permanente....	+ 12000	+ 7000	+ 2050	— 2600
Impulsion.....	+ 23,5	+ 22,3	+ 23,0	+ 23,3

Il suffit pour cela d'abaisser la clef par un coup très sec. Un centième de seconde suffit pour l'établissement du courant; et l'extra-

---

1) C'est une roue en fonte, qui fait partie d'une sirène de Seebeck. A la distance de $1^m,5$ du galvanomètre, elle exerçait encore une très faible action sur l'aiguille aimantée, $\pm 0^{mm},2$. Pour en tenir compte, on a constaté que la position d'équilibre de l'aiguille quand on fait tourner rapidement la roue est la même que quand la roue est très éloignée. Puis on a cherché la position d'arrêt pour laquelle l'aiguille marque la même division que quand la roue tourne, et l'on a eu soin de toujours arrêter la roue dans cette position. On a reconnu que le déplacement maximum du zéro se produisait pour une position de la manivelle à angle droit avec la précédente, et n'atteignait guère que $\pm 0^{mm},2$. Les lectures les plus précises ne se faisant qu'à $0^{mm},1$ près, on voit que cette cause d'erreur n'aurait pu devenir sensible que dans les derniers réglages. La roue était, d'ailleurs, assez éloignée de tout le circuit pour n'avoir aucune aimantation variable.

Digitized by Google

courant dû à la fermeture du galvanomètre sur lui-même (n° 52 compense presque exactement l'effet dû à ce courant lui-même pendant un temps d'environ $\frac{1}{100}$ de seconde $\left(\frac{G}{g} = 0{,}01 \text{ environ}\right)$.

59. Les appareils étant ainsi disposés, on s'est attaché d'abord à obtenir un bon état permanent. Or, dans les premières expériences, même avec la clef de l'Association britannique, l'état d'équilibre n'était pas atteint instantanément; quand le pont était réglé, l'aiguille commençait par dévier un peu ($1^{mm},5$ dans le cas du maximum de sensibilité, par exemple), puis revenait lentement au zéro, au bout de plusieurs secondes; même effet à l'ouverture du circuit, mais en sens inverse. Après plusieurs essais, j'ai reconnu que cet effet provenait de la bobine 1 (appareil B); elle se comportait comme une résistance qui croît graduellement de $\frac{1}{25000}$ de sa valeur environ. Dans cette bobine, le fil est couvert par de la soie, et l'isolement, de spire à spire, est insuffisant quand le temps est humide. Une partie du courant se dérive à travers la soie, jusqu'à ce que la polarisation du liquide rende l'isolement parfait (1). En employant des bobines dans lesquelles la soie a été séchée et paraffinée, aucun effet semblable n'a été observé; l'aiguille ne quitte pas le zéro quand le réglage du pont est fait. On peut donc procéder au réglage de l'état variable sans craindre aucune perturbation.

(1) Une bobine dans laquelle deux fils distincts a, b, recouverts de soie, avaient été enroulés côte à côte, met très bien cet effet en évidence. La résistance à l'isolement entre les deux fils est de même ordre que celle des fils eux-mêmes : 162 ohms au début; moins d'une minute après, 185 ohms, et elle continue à croître. On enlève alors la pile : le galvanomètre est dévié de 55 divisions. On met sur le côté 1 le fil a seul, le fil b ayant ses deux extrémités libres; les mêmes effets se produisent. On enlève la pile; on met rapidement sur le côté 1, non plus le fil a, mais l'isolement entre les deux fils a, b; sans rétablir la pile, le galvanomètre est dévié, et, pour ramener l'image sur l'échelle, à 17 divisions du zéro, il faut mettre sur le galvanomètre le shunt de $\frac{1}{99}$.

Il s'agit donc bien d'une force électromotrice considérable et durable, produite par le passage du courant.

J'ai fait refaire la bobine, en couvrant les fils de paraffine, et séparant les couches successives par du papier paraffiné. La résistance à l'isolement a aussitôt atteint 100 mégohms. Désormais, la résistance des fils prend instantanément sa valeur finale, sans irrégularités.

Digitized by Google

60. Cet effet éliminé, les expériences sont devenues très régulières.

Dans les premières mesures faites au Collège de France, j'ai essayé de me passer de l'interrupteur tournant. Le circuit était ouvert et fermé à chaque demi-oscillation de l'aiguille, au moyen de la clef de l'Association britannique, disposée pour que les communications s'établissent dans l'ordre indiqué (n° 58). J'ai obtenu avec l'appareil B, fixé dans une position invariable, les résultats suivants, extraits de deux séries d'expériences faites à des températures un peu différentes :

TABLEAU VI.

r_2, I.	r_4, II.	r_3, III.	Δ.	k.
100	100	970	$153{,}2 \pm 0{,}4$	$23{,}35 \pm 0{,}05$
100	1000	9727	849 ± 2	$23{,}33 \pm 0{,}02$
100	1000	9725	852 ± 2	$23{,}27 \pm 0{,}02$
1000	1000	967	$90{,}3 \pm 0{,}3$	$23{,}37 \pm 0{,}08$
10000	10000	967	$86{,}9 \pm 0{,}2$	$23{,}39 \pm 0{,}06$
1000	10000	9724	$504{,}5 \pm 0{,}5$	$23{,}17 \pm 0{,}02$
1000	10000	9673	501 ± 1	$23{,}20 \pm 0{,}04$

Dans les mêmes conditions, l'appareil C (n° 42) a donné :

TABLEAU VII.

r_2, I.	r_4, II.	r_3, III.	Δ.	k.
1000	10000	1173,9	$367 \pm 0{,}5$	$4{,}636 \pm 0{,}005$
»	»	1168	$364{,}5 \pm 0{,}5$	$4{,}642 \pm 0{,}005$
»	»	1174	$366{,}7 \pm 0{,}2$	$4{,}639 \pm 0{,}003$

On voit que, dans de bonnes conditions de sensibilité du pont, les mesures peuvent être concordantes à près de $\frac{1}{1000}$. Mais, quand les côtés du pont changent, le désaccord s'accentue, en restant compris dans les limites des erreurs expérimentales possibles. Il faut cependant remarquer dans le premier tableau l'influence d'une bobine de 10000 ohms, qui semble certaine.

61. Pour faire une étude sérieuse de la méthode, il faut pouvoir s'écarter beaucoup du maximum de sensibilité du pont et conserver néanmoins une sensibilité de $\frac{1}{1000}$ à $\frac{1}{2000}$. J'ai été forcé de recourir à

Digitized by Google

l'interrupteur tournant. En même temps, il faut rendre la température stationnaire pendant chaque série d'observations, sans qu'il soit nécessaire de la connaître.

Voici les résultats de ces expériences :

TABLEAU VIII (Appareil B).

r_2, I.	r_4, II.	r_3, III.	Δ.	k.
100	100	972,6	50,33	23,306
200	200	972,2	55,03	23,302
1000	1000	973,8	92,60	23,315
10000	10000	973,8	514,86	23,314
100	1000	9736,8	48,39	23,288 ± 0,01
100	1000	9702,5	48,15	23,329 ± 0,02
100	1000	9702,5	48,20	23,307 ± 0,02
1000	10000	9704	89,15	23,202 ± 0,02

TABLEAU IX (Appareil C).

r_2, I.	r_4, II.	r_3, III.	Δ.	k.
100	100	117,72	81,886	4,659 ± 0,002
200	200	117,65	119,40 ± 0,06	4,660 ± 0,002
1000	1000	117,72	420,0 ± 0,3	4,661 ± 0,002
10000	10000	117,73	3806 ± 10	4,658 ± 0,005
100	200	235,0	68,85 ± 0,05	4,661 ± 0,002
200	1000	587,4	91,79 ± 0,04	4,659 ± 0,002
100	1000	1175,5	61,13 ± 0,03	4,659 ± 0,002
1000	10000	1176,3	315,8	4,639
1000	10000	1176,3	316,2	4,642
1000	10000	1165	315,4 ± 0,2	4,640 ± 0,003
1000	10000	1164,8	315,6 ± 0,2	4,638 ± 0,003
10000	10000	116,57	3805,5 ± 10	4,659 ± 0,005

Tant que la bobine de 10000 ohms ne forme pas un des côtés du pont, les valeurs de k sont égales, aux erreurs expérimentales près, bien que les côtés du pont et Δ changent considérablement. Dans le tableau VIII, la moyenne des sept premiers nombres est 23,309; les plus grandes différences n'atteignent pas $\frac{1}{1000}$ pour les nombres mal déterminés et, pour ceux qui proviennent de bonnes expériences, la différence avec la moyenne tombe à $\frac{1}{4000}$. Dans le tableau IX, les sept premiers nombres et le dernier ont comme moyenne 4,6595; pour aucun d'eux la différence ne dépasse $\frac{1}{3000}$. Les quatre autres, qui cor-

Digitized by Google

respondent au rapport $\frac{1000}{10000}$ pour les côtés x et 4, ont comme moyenne 4,6397, et l'accord subsiste au même degré entre eux. Mais, comme on le voit, ces deux moyennes diffèrent considérablement.

62. Les valeurs de k ne représentent donc pas le rapport $\frac{L}{M}$, et les coefficients d'induction des côtés 2, 3, 4 du pont ne sont pas négligeables, au moins dans le cas de la bobine de 10 000 ohms. Il faut alors examiner quelle conclusion ces tableaux fournissent, et trouver un moyen d'éliminer les coefficients d'induction inconnus.

Prenant la formule complète (1) (n° 21)

$$\frac{L + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0,$$

les premières expériences, où k a la même valeur, montrent que l'ensemble des termes $\left(\frac{L_2}{r_2} + \frac{L_3}{r_3} - \frac{L_4}{r_4}\right)$ ne change pas d'une manière appréciable tant que l'on n'introduit pas une des bobines de 10 000 ohms seule. Or les trois parties de la boîte de résistances ne contiennent que des bobines de 1, 10, 100, 1000 et 10 000 ohms. Si l'on en tient compte en écrivant l'équation que fournit chaque expérience, et qu'on discute l'ensemble de ces équations, on reconnaît que le rapport $\frac{L}{r}$ a sensiblement la même valeur pour les bobines de 1, 10, 100 et 1000 ohms, et, par conséquent, est indépendant de la résistance dans la partie III de la boîte, laquelle ne contient pas de bobine de 10 000 ohms; du moins, les variations ne sont pas appréciables dans les conditions de l'expérience.

63. Cette conclusion, déduite de mesures indirectes, où le résultat ne pouvait aucunement être prévu, me semble ainsi très bien établie. Je n'ai pourtant pas négligé les vérifications directes que me permettait la boîte de résistances. On peut former avec la partie III de cette boîte deux côtés du pont, qui est ainsi complètement constitué par la boîte du Collège de France. Si le rapport $\frac{L}{r}$ est indépendant de la résistance, l'équilibre une fois établi pour l'état permanent, grâce au rhéostat de Pouillet, doit subsister pour l'état variable, tant qu'une bobine de

Digitized by Google

10000 ohms n'intervient pas seule. On jugera, par le Tableau suivant, qu'il en est bien ainsi.

TABLEAU X.

r_1, III.	r_2, I.	r_3, III.	r_4, II.	Déviation pour l'état variable.	Vitesse du commutateur
10 × 100	1000	1000	1000	— 0,2	Grande.
10 × 100	10000	1000	10000	< 0,1	Très grande.
10 × 100	1000	10 × 1000	10000	+ 2,3	Ordinaire.
100	1000	1000	10000	+ 1,5	Id.
100	100	1000	1000	+ 0,1	Très grande.
100	10	1000	100	— 0,1	Id.
100	10	2 × 1000	2 × 100	— 0,1	Id.
5 × 10	10	1000	2 × 100	— 0,1	Id.
10	10	2 × 100	2 × 100	0,0	Id.
5 × 1	10	100	2 × 100	— 0,1	Id.

On voit, en outre, que la bobine 10000 donne une déviation très notable. Il ne suffit donc pas qu'un fil ait été ployé en double, avant d'être embobiné, pour qu'il soit sans influence sensible sur la période variable (*voir* Chap. VI, n^{os} 81, 88).

Examinons l'importance de l'erreur qui peut en résulter : ce qui entre dans la formule, c'est le rapport de ce coefficient de self-induction à la résistance; pour deux bobines identiques, mais construites avec différents métaux, ce rapport varie comme la conductibilité. Il faut donc construire la bobine en cuivre pur, pour mettre en évidence l'influence du coefficient de self-induction; en maillechort ou en platine pour l'éliminer autant que possible.

64. Quand un fil est ployé en double, puis embobiné, il est très rapproché non seulement du fil de retour, mais de tous les autres doubles fils; aussi est-il difficile de décider quel est l'effet total. Il n'y a qu'un moyen d'avoir un coefficient d'induction très faible et d'un ordre de grandeur connu, c'est de prendre un fil court ployé en double et de le tendre en ligne droite, ou de l'enrouler sur un cadre de grandes dimensions, suivant une hélice dont le pas soit très grand par rapport à la distance des deux fils voisins. C'est ce que j'ai fait avec un fil de maillechort de $0^{mm},05$ de diamètre, ayant une résistance d'environ 120 ohms par mètre. Une longueur $2l$, de $2^{m},20$, a été ployée en double; la distance b

Digitized by Google

des deux fils étant environ $0^m,001$. Ces deux fils ont été enroulés sur un cadre rectangulaire, dont les côtés ont $0^m,10$ et $0^m,50$, formé par des tiges de verre encastrées à leurs deux extrémités dans deux planchettes. Le fil est assujetti sur les tiges de verre par quelques gouttes de paraffine, et ainsi parfaitement isolé. Il forme à peu près une spire et demie; les deux spires sont à plus de $0^m,02$ de distance.

Le coefficient d'induction, calculé comme si le fil double était rectiligne, est donné par la formule (MAXWELL, t. II, p. 289) (1)

$$2l\left(\log\frac{4b^2}{d^2}+\frac{1}{2}\right)=220\left(\log\frac{4}{0,0025}+\frac{1}{2}\right)=1738 \text{ C.G.S.}$$

La résistance est environ 242 ohms; le rapport $\frac{L}{r}$ est donc de l'ordre de $\frac{1738}{242\times10^9}$ ou 7×10^{-9} C.G.S., c'est-à-dire négligeable quand on le compare aux rapports correspondants relatifs à une bobine sur elle-même ou à deux bobines très voisines : 0,0005 ou 0,001 au moins quand le fil des bobines est en cuivre. Si les deux bobines à étudier étaient éloignées, ce rapport 7.10^{-9} C.G.S. pourrait, tout en restant petit, n'être plus tout à fait négligeable.

65. Nous voilà désormais capables de changer considérablement la résistance d'un des côtés du pont, sans apporter de modification appréciable à son coefficient d'induction. Cela rend possible, dans certains cas, l'élimination des coefficients d'induction des trois autres côtés du pont.

Lorsque la boîte de résistances, qui forme les côtés 2, 3, 4 du pont, est quelconque au point de vue de l'induction, il m'a été impossible de trouver un procédé général d'élimination au moyen d'un jeu restreint de résistances, construites comme je viens de l'indiquer. Tous les essais que j'ai tentés exigeaient, en fin de compte, la construction complète des trois boîtes I, II et III, sans coefficient d'induction sur elles-mêmes.

L'élimination est possible, comme on va le voir, au moyen d'une seule résistance, sans induction, quelles que soient les boîtes I, II, pourvu que le rapport $\frac{L}{r}$ de la boîte III soit indépendant de r; c'est ce

(1) Il me semble que le dernier terme $\frac{1}{2}$ doit être remplacé par 1; mais cela n'a pas d'influence sur mes conclusions.

Digitized by Google

qui avait lieu dans la boite d'Elliott (n° 434) du Collège de France (nos 62 et 63). Mais il n'est pas nécessaire que ce coefficient soit très petit; le rapport $\frac{L}{r}$ serait constant si, toutes les bobines ayant des dimensions identiques, le diamètre et la longueur du fil changeaient seuls, sans altérer la résistance spécifique, et si, de plus, les bobines étaient assez éloignées les unes des autres pour n'avoir pas de coeffcient d'induction mutuelle sensible.

66. Une première expérience, faite comme celles que j'ai décrites, donne

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}, \qquad \frac{L + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} - \frac{L_4}{r_4} = 0,$$

$$k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4}\frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

Dans une seconde expérience, on ajoute à r_1 la résistance ρ dont le coefficient d'induction est négligeable, et on modifie r_3 de manière à rétablir l'équilibre sans changer r_2 et r_4, puis on choisit convenablement Δ'; on a alors

$$\frac{r_1 + \rho}{r'_3} = \frac{r_2}{r_4}, \qquad \frac{L + k'M}{r_1 + \rho} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L'_3}{r'_3} + \frac{L_4}{r_4}$$

$$k' = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4}\frac{r'_3 + r_4}{\Delta}.$$

Comme $\frac{L'_3}{r'_3}$ ne diffère pas de $\frac{L_3}{r_3}$, le côté 3 étant formé par la partie III de la boite, une simple soustraction donne

$$\frac{L + kM}{r_1} - \frac{L + k'M}{r_1 + \rho} = 0,$$

d'où

$$L + M\left[k + (k - k')\frac{r_1}{\rho}\right] = 0.$$

Deux expériences déterminent alors le rapport $\frac{L}{M}$.

Digitized by Google

TABLEAU XI (appareil C).

r_2.	r_4, II.	r_3, III.	Δ.	k'.	$\frac{L}{M}$.
1000	10000	3785	$394,5 \pm 0,5$	$4,594 \pm 0,004$	$4,660 \pm 0,005$
1000	1000	379,6	$518,2 \pm 0,5$	$4,662 \pm 0,004$	$4,661 \pm 0,003$

Les valeurs de k, introduites ici, sont les moyennes du n° 61, tableau IX.

67. Une autre résistance ρ' a été construite avec 5^m du même fil de maillechort, doublé, enroulé sur une petite bobine et bien paraffiné. Elle a d'abord été comparée seule à la boîte d'Elliott, on a trouvé ainsi :

TABLEAU XII.

r_1.	r_2, I.	r_3, III.	r_4, II.	Déviation pour l'état variable.	Vitesse du commutateur.
ρ'	1000	591,7	1000	$< 0,1$	Très grande.
»	10000	591,7	10000	$< 0,1$	Id.
»	1000	5922	10000	2,8 à 3,0	Ordinaire.
»	100	5920	1000	$< -0,1$	Très grande.

Comme on devait le prévoir, d'après sa forme et ses dimensions, cette bobine a la même influence que la boîte III sur l'état variable. La bobine de 10000 ohms est toujours la seule importante. Cette résistance, employée comme la résistance ρ, a donné les résultats suivants :

TABLEAU XIII (appareil C).

r_2, I.	r_4, II.	r_3, III.	Δ.	k'.	$\frac{L}{M}$.
1000	10000	7087,3	$497,1 \pm 0,5$	$4,537 \pm 0,005$	$4,660 \pm 0,005$
1000	10000	7089	$496,6 \pm 0,5$	$4,541 \pm 0,004$	$4,660 \pm 0,005$
1000	1000	707	642	4,661	4.661
1000	1000	707,3	$641,7 \pm 0,5$	$4,661 \pm 0,002$	$4,661 \pm 0,002$
1000	10000	7085	$496,2 \pm 0,5$	$4,543 \pm 0,004$	$4,659 \pm 0,005$

68. Enfin j'ai encore essayé une troisième bobine ρ'' à deux fils de cuivre (n° 59, note).

Digitized by Google

TABLEAU XIV. — *Comparaison avec la boîte Elliott.*

r_1.	r_2, I.	r_3, III.	r_4, II.	Déviation.	Vitesse du commutateur.
ρ''	10000	175	10000	0,0	Très grande.
»	1000	175	1000	+ 0,1 à 0,2	Ordinaire.
»	100	1760,7	1000	+ 0,5 à 0,7	Id.

Sans être absolument négligeable, l'effet est encore petit. Employée comme les deux précédentes, cette bobine donne les résultats suivants :

TABLEAU XV (appareil C).

r_2, I.	r_4, II.	r_3, III.	k'.	Δ.	$\frac{L}{M}$.
1000	10000	2913,4	$368,5 \pm 0,5$	$4,604 \pm 0,005$	$4,664 \pm 0,005$
1000	10000	2911	$368,0 \pm 0,3$	$4,608 \pm 0,003$	$4,661 \pm 0,004$
1000	1000	291	484,5	4,664	4,663

Les valeurs obtenues pour $\frac{L}{M}$ sont peu différentes de celles des Tableaux XI et XIII, mais ont une tendance marquée vers une valeur plus grande.

69. De la comparaison des nombres des tableaux XI, XIII et XV, il résulte que la valeur du rapport $\frac{L}{M}$ pour l'appareil C est 4,660. La concordance des nombres indique une erreur probable inférieure à $\frac{1}{3000}$. La somme de toutes les erreurs possibles évaluées par excès atteint au plus $\frac{1}{1000}$. Ce nombre est précisément celui que donnent toutes les expériences où une bobine de 10000 ohms n'entre pas (n° 61). Une seule expérience suffit donc dans ce cas.

Ce nombre se rapporte aux deux bobines dont les dimensions sont connues (42), lorsqu'elles sont centrées. On peut donc le comparer à la valeur théorique. J'ai fait le calcul par la formule (MAXWELL, t. II, p. 282)

$$L = 4\pi^2 R_1^2 \frac{n_1^2}{l_1^2}(l_1 - 2R_1\varepsilon),$$

$$\varepsilon = 0,500 + 0,0625 + 0,0065 + \ldots + \frac{l_1 - \sqrt{l_1^2 + R_1^2}}{2R_1},$$

Digitized by Google

qui tient compte des extrémités de la bobine, mais la suppose réduite à une seule couche sans épaisseur.

J'ai trouvé ainsi

$$L = 2,273.10^8 \text{ C.G.S.}$$

Or, on a trouvé (42)

$$M = 4,79.10^7 \text{ C.G.S.}$$

Le rapport est donc théoriquement

$$\frac{L}{M} = \frac{22,73}{4,79} = 4,74,$$

valeur très supérieure à 4,660 que donne l'expérience.

Pour obtenir la concordance, il faudrait donc tenir compte dans le calcul :

1° De l'épaisseur des quatre couches de fil;

2° De ce que les fils conducteurs sont séparés les uns des autres.

Il est facile de reconnaître que cette influence est très petite sur M, mais importante pour L; elle a pour effet une diminution du coefficient de self-induction, puisqu'elle éloigne les parties agissantes. Elle tend donc à rapprocher la valeur théorique de la valeur observée.

CHAPITRE V.

COMPARAISON DE DEUX COEFFICIENTS DE SELF-INDUCTION.

70. Je ne dirai que peu de mots de cette méthode. Je l'ai étudiée dans un seul cas, où les lois de la similitude des bobines permettaient de prévoir à très peu près les résistances à donner aux quatre côtés du pont pour obtenir à la fois l'équilibre pendant l'état permanent et pendant l'état variable. C'est donc la méthode même indiquée par Maxwell, laquelle ne sépare pas les deux réglages.

Digitized by Google

Cette méthode exige *deux* boites de résistances à division continue et sans induction propre. C'est pour ces expériences que la boite d'Elliott (n° 339), qui m'a été prêtée par le laboratoire de la Sorbonne, était indispensable. J'ai admis que son coefficient d'induction propre était négligeable, ces expériences ayant été faites avant les dernières du Chapitre IV. Quand j'ai eu trouvé le moyen de faire l'élimination, j'avais déjà rendu cette boite, et, d'ailleurs, les circonstances ne me laissaient pas le temps de recommencer ces expériences.

Les données de construction fournies par MM. Elliott sont les suivantes :

Nature de l'alliage : maillechort.

Résistances en ohms.....	1	10	100	1000
Diamètre du fil en millimètres...	1,219	0,66	0,406	0,228
Longueur du fil en mètres.....	4,00	10,97	40,23	129,89

Le fil est ployé en double, mais sa longueur est plus grande que dans la boite du Collège de France, et les bobines sont de dimensions beaucoup plus considérables. Il est très possible que l'influence de la bobine de 1000 ohms sur la période variable ne soit pas négligeable; mais, en tout cas, elle est faible.

71. J'ai fait construire chez M. Carpentier les bobines suivantes :

	Poids du fil.	Diamètre du fil en millimetres	Diamètre extérieur de la bobine en centimètres.	Diamètre intérieur de la bobine en centimètres.	Longueur de la bobine en centimètres.
α.....	p	0,25	5	2	5
β.....	p	0,50	5	2	5
γ.....	$8p$	0,50	10	4	10

Il est facile de démontrer que, dans des bobines de même métal et de forme extérieure identique, le rapport $\frac{L}{r}$ est constant, quel que soit le diamètre du fil. Dans des bobines de forme extérieure semblable, le rapport $\frac{L}{r}$ varie comme le carré du coefficient de similitude.

Ce sont ces propositions que j'ai voulu vérifier.

Digitized by Google

TABLEAU XVI. — *Comparaison de α, β.*

r_1.	r_2.	r_3 (III).	r_4 (II).	$\frac{L_\beta}{L_\alpha}$.
$\beta + \varepsilon$	α	700,0	10000	0,0700
$\beta + \varepsilon'$	α	70,0	1000	0,070

TABLEAU XVII. — *Comparaison de α, γ.*

r_1.	r_2.	r_3 (III).	r_4 (I, II).	$\frac{L_\gamma}{L_\alpha}$.
γ augmenté d'environ 258 ohms de la boîte 339.	α	203,80	100	2,038
	α	815,5	400	2,039
	α	2039,3	1000	2,0393
	α	4076,0	2000	2,038

L'accord de ces différents nombres, quand on change le rapport de r_2 à r_4, est très bon, et montre bien la précision des expériences.

72. Une mesure directe a donné, pour le rapport des résistances de α et β sans fil additionnel,

$$\frac{r_\beta}{r_\alpha} = 0,06815.$$

On a donc

$$\frac{L_\beta}{r_\beta} : \frac{L_\alpha}{r_\alpha} = \frac{700}{681,5} = 1,027,$$

au lieu de 1,000. Pour α et γ, on a eu

$$\frac{r_\gamma}{r_\alpha} = \frac{1}{2,014},$$

d'où

$$\frac{L_\gamma}{r_\gamma} : \frac{L_\alpha}{r_\alpha} = 2,039 \times 2,014 = 4,106,$$

au lieu de 4,000. Mais, de ces deux mesures, nous pouvons déduire la comparaison des deux bobines β, γ qui sont construites avec le même fil de $0^{mm},50$ de diamètre, et nous trouvons

$$\frac{L_\gamma}{r_\gamma} : \frac{L_\beta}{r_\beta} = \frac{4,106}{1,027} = 3,998,$$

c'est-à-dire exactement 4. La vérification de cette deuxième proposition est donc excellente.

Digitized by Google

Plusieurs causes rendent la première proposition plus difficile à vérifier : d'abord, la différence de diamètre du fil de cuivre qui rend très peu probable l'identité de la matière, et, par suite, de sa conductibilité spécifique; puis, la difficulté de satisfaire aux conditions de similitude pour l'épaisseur de l'isolant.

Une vérification plus rigoureuse exigerait que les bobines soient construites avec tous les soins que l'on donne aux bobines étalons, et que l'on détermine directement, pour chaque fil employé, sa résistance spécifique.

Les deux propositions s'appliquent, en effet, à ce qu'on peut appeler *la résistance géométrique du fil.*

CHAPITRE VI.

INFLUENCE DE LA CAPACITÉ.

73. Dans ce qui précède, nous avons laissé de côté toute influence de la capacité des fils, supposant, comme on le fait ordinairement, que cette influence est absolument négligeable dans les circuits fermés. C'est ce qu'il importe d'examiner. Pour cela, nous admettrons la proportionnalité du flux d'électricité statique et de l'intensité électromagnétique intégrale, sans nous arrêter aux difficultés générales qui peuvent en résulter, car elles sont sans influence sensible dans le cas qui nous occupe (n° 8).

Lorsqu'un point d'un des fils communique avec une armature d'une capacité, il faut regarder ce point comme un sommet dans les équations II (n° 15). La première équation s'applique encore pourvu que l'on compte parmi les fils qui aboutissent au sommet considéré celui qui le réunit à la capacité (n° 8). Nous admettrons que la seconde équation s'applique encore, à condition de séparer chaque fil en autant de tronçons que l'exigent les nouveaux sommets.

Digitized by Google

74. On obtient l'effet total en superposant aux quantités d'électricité calculées sans tenir compte des capacités, dans chaque fil ou tronçon de fil, les quantités d'électricité provenant de la charge des capacités. Ces dernières quantités se partagent en raison des résistances seules. Considérons, en effet, les équations complètes, telles qu'elles résultent du numéro précédent :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Sommets anciens} \ldots\ldots\ldots\ldots & \Sigma q = 0, \\ \text{» nouveaux ou modifiés.} & \Sigma q = Q, \\ \text{Circuits fermés} \ldots\ldots\ldots\ldots & S(rq + L\Delta i + M\Delta I + \ldots) = 0, \end{cases}$$

Q désignant le changement total de la charge de chaque capacité.

Regardons chaque quantité q comme la somme de deux autres q' et q'', dont l'une, q', est déterminée par les phénomènes d'induction seuls; celle-ci satisfait aux équations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \text{Sommets anciens et nouveaux.} & \Sigma q' = 0, \\ \text{Circuits fermés} \ldots\ldots\ldots\ldots & S(rq' + L\Delta i + M\Delta I + \ldots) = 0. \end{cases}$$

Les quantités q'', déterminées par différence, satisfont aux équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \text{Sommets anciens} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Sigma q'' = 0, \\ \text{» nouveaux ou modifiés} \ldots\ldots & \Sigma q'' = Q, \\ \text{Circuits fermés} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & S(rq'') = 0. \end{cases}$$

Elles ne dépendent donc que des capacités et des résistances.

D'ailleurs, les capacités ne changent rien aux intensités initiales et finales, et le système (2) est identique au système directement obtenu par l'induction seule. On peut le montrer facilement au moyen des équations des sommets nouveaux et des lois d'addition des coefficients d'induction. Il est presque évident que les équations définitives de l'induction ne peuvent être modifiées, parce que l'on traite comme un sommet un point quelconque de l'un des fils; et c'est à cela que se réduit la différence entre les équations (2) et les équations directes.

75. *Comparaison des coefficients d'induction mutuelle.* — Pour se rendre compte de l'influence possible de la capacité des fils, on peut simplifier le problème en supposant cette capacité concentrée en certains points, et traitant le reste comme dépourvu de capacité.

Digitized by Google

1° Une capacité en dérivation sur le circuit inducteur ne change pas l'intensité finale I du courant qui le parcourt. Son effet total est donc nul, quand on emploie un galvanomètre bien réglé (nos 37-38).

2° Une capacité en dérivation sur le circuit induit ne change ni l'état initial, ni l'état final; comme ses deux armatures sont au même potentiel, leur charge est nulle. L'intensité intégrale, de part et d'autre du point d'attache, est donc la même, et rien ne distingue ce point d'un autre quelconque du reste du fil. L'effet total est nul.

3° Une capacité dont une armature A communique avec le circuit inducteur, l'autre A′ avec le circuit induit, ne change pas l'intensité permanente I dans le circuit inducteur.

Si les deux circuits sont distincts et isolés l'un de l'autre, le circuit induit est élevé tout entier, sans aucune charge, au potentiel final V de l'armature qui communique avec le circuit inducteur. Rien n'est donc modifié dans les équations de l'induction totale.

Mais il n'en est plus de même si les deux circuits communiquent par un point B. Alors tout le circuit induit est, à la fin de la période variable, au potentiel V_B du point B dans le circuit inducteur. Une quantité d'électricité $-C(V_A - V_B)$ est transportée de l'armature A à celle A′, en passant par le point B, et se partageant entre les fils du circuit induit suivant leurs résistances.

Deux capacités en deux points différents des circuits inducteur et induit produisent un effet analogue (1).

---

(1) Voici les résultats du calcul pour la méthode de Maxwell (n° 17, *fig.* 1) :

1° Les deux capacités sont sur le même fil (2); soit ρ la résistance qui les sépare. En appelant V, V′ les potentiels des armatures de C et C′ qui communiquent avec le circuit inducteur, les équations (3) du n° 74 donnent facilement la quantité d'électricité q'' qu'il faut ajouter à celle qui traverse déjà le galvanomètre par suite de l'induction :

$$q'' = \frac{CC'}{C + C'} (V' - V) \frac{\rho r_1}{g(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

2° Les deux capacités C_1, C_2 sont sur les fils 1, 2. Désignons par ρ_1, ρ_2 les résistances qui les séparent du même point d'attache au galvanomètre, et par V_1, V_2 les potentiels des armatures qui sont liées au circuit inducteur; on trouvera de même pour la quantité q'' :

$$q'' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2) \frac{r_1 \rho_2 - r_2 \rho_1}{g(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

Dans ce second cas, le terme $r_1 \rho_2 - r_2 \rho_1$ permet une compensation des deux capacités.

Digitized by Google

76. Si une seule des deux paires de bobines a une capacité notable, il faut, pour que la méthode soit rigoureuse, que les deux circuits soient parfaitement isolés.

Si les deux paires de bobines avaient une capacité notable, il faudrait régler les résistances de manière à obtenir une compensation.

La capacité ne peut être notable que si un des appareils est formé de deux bobines emboîtées l'une dans l'autre. Il faut donc que l'appareil étalon soit formé de deux parties éloignées l'une de l'autre; cette condition doit être imposée, pour cette cause, aux reproductions de l'appareil étalon, comme elle est imposée à cet appareil lui-même pour la simplicité du calcul théorique.

77. *Comparaison des coefficients de self-induction.* — Le circuit induit n'est plus différent du circuit inducteur; les circonstances dans lesquelles la capacité des fils a une influence en sont modifiées. Occupons-nous d'abord de la comparaison d'un coefficient d'induction mutuelle à un coefficient de self-induction. Dans ce cas, la capacité de la paire de bobines unique peut modifier les résultats. Supposons qu'elle se réduise à un condensateur dont une armature est liée à un point du circuit de la pile, et l'autre à un point du côté 1 du pont (*fig.* 3) (n° 21). Soient ρ et ρ_1 les résistances qui séparent ces points du sommet A. Lorsque le pont est réglé pour l'état permanent, la quantité d'électricité, due à la capacité, qui traverse le galvanomètre, outre celle due à l'induction, se calcule facilement, grâce à la remarque du n° 74. Sa valeur est

$$q'' = \frac{r_2\rho_1 C(\rho I + \rho_1 i_1)}{g(r_1+r_2)+r_1(r_2+r_4)}$$

et, d'après la valeur de I en fonction de i_1 (n° 21),

$$q'' = \frac{r_2\rho_1 C(\rho_1 + k\rho) i_1}{g(r_1+r_2)+r_1(r_2+r_4)},$$

avec

$$k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4}\frac{r_3+r_4}{\Delta},$$

ou enfin, d'après la valeur de i_1 en fonction de J (n° 45),

$$q'' = \frac{r_2 r_3}{g(r_1+r_2)+r_1(r_2+r_4)}\frac{\rho_1+k\rho}{r_1+r_3} C\rho_1 J.$$

Digitized by Google

Or la partie principale de la quantité q' due à l'induction est (n° 49)

$$q' = -\frac{r_1 r_4}{D} J\left(\frac{L_1 + kM}{r_1}\right).$$

78. Le rapport de q' à q'' est de l'ordre du rapport de la parenthèse $\frac{L_1 + kM}{r_1}$ à $C\rho_1$. Si l'on connaît k à $\frac{1}{2000}$ près, et que $\frac{M}{r_1}$ soit, comme dans les expériences (n^{os} 42, 43), égal à 0,0005 environ, le terme $\frac{L_1 + kM}{r_1}$ est de l'ordre de $0,25 \times 10^{-6}$. La résistance ρ_1 étant environ la moitié de r_1, ou 50 ohms, pour que la capacité ne produise aucune erreur, il faut que, exprimée en microfarads, elle satisfasse à l'inégalité

$$C \times 10^{-15} \times 50 \times 10^{9} < 0,25\ 10^{-6},$$

ou

$$C < 0,005 \text{ microfarad.}$$

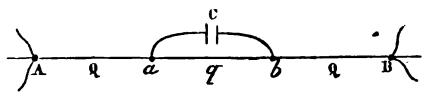
Or, la capacité mutuelle de ces deux bobines C, traitées comme un condensateur cylindrique, peut être évaluée, d'après leurs dimensions (n° 42). Elle est environ $0,6 \times 10^{-19}$ C.G.S; c'est-à-dire 0,00006 microfarad. Avec cet écart considérable des deux bobines ($0^{m},025$), leur capacité mutuelle est négligeable.

Pour l'appareil A, dont la résistance est dix fois plus grande, et dont les bobines ne sont séparées que par un demi-centimètre d'épaisseur, je n'oserais pas affirmer que la capacité serait encore négligeable.

79. Lorsque le circuit induit est différent du circuit inducteur, une capacité placée sur l'un des fils en dérivation n'avait aucune influence; il n'en est plus de même lorsque l'intensité finale diffère de l'intensité initiale.

Considérons un fil AB (*fig.* 8), qui fait partie d'un circuit fermé,

Fig. 8.



et entre les deux points a, b duquel est une capacité C en dérivation.

Digitized by Google

Dans l'équation du circuit fermé dont il fait partie, j'écris seulement les termes qui se rapportent au fil AB, le reste n'étant pas altéré par la capacité C (n° 74),

$$(R - r)Q + rq + L\Delta i + \ldots + (\ldots) = 0.$$

R est la résistance totale du fil; r la résistance de la partie ab; $Q - q$ est la quantité d'électricité nécessaire pour modifier la charge de la capacité

$$Q - q = C r \Delta i.$$

L'équation du circuit fermé est donc

$$RQ + (L - Cr^2)\Delta i + \ldots + (\ldots) = 0.$$

La forme de l'équation du circuit fermé n'est donc pas changée; il suffit de retrancher du coefficient de self-induction le produit de la capacité par le carré de la résistance qui sépare ses armatures.

80. Une expérience montrera l'importance de cette influence.

On a trouvé (n° 71), pour le rapport $\frac{L_\beta}{L_\alpha}$, la valeur 0,0700. On a refait la mesure en mettant en dérivation sur la bobine α une capacité de 0,75 microfarad.

r_1.	r_2.	r_3 (III).	r_4 (II).	$\frac{L_\beta}{L_\alpha - Cr_\alpha^2}$.
$\beta + 1 + \varepsilon$	α	759,5	10000	0,0759

Cette capacité suffit à accroître la rapport de près de $\frac{1}{11}$.

De la comparaison des deux expériences, on peut déduire grossièrement la valeur absolue de ces coefficients d'induction, L_α, L_β; on trouve ainsi

$$L_\beta = 1,9.10^7, \quad L_\alpha = 2,7.10^8 \text{ C.G.S.}$$

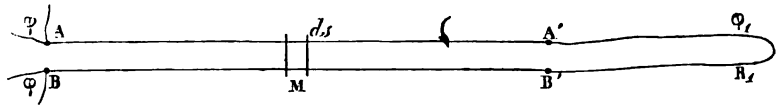
81. Lorsqu'un fil est ployé en double, les parties voisines sont à des potentiels très différents; leur capacité, quoique faible, peut avoir une influence notable.

Supposons que deux fils AA', BB', d'égale longueur l (*fig.* 9), soient tendus parallèlement, et communiquent par les points A, B avec le

Digitized by Google

reste du circuit; les points A′, B′ sont réunis soit directement, soit par un fil de grande résistance R_1, dont le coefficient d'induction et la capacité sont négligeables.

Fig. 9.



Comptons les arcs à partir des points A et B. La capacité mutuelle est uniforme; je désigne par c sa valeur rapportée à l'unité de longueur; la capacité mutuelle totale C est égale à cl. La résistance des fils par unité de longueur est r; la résistance totale R des deux fils AA′, BB′ est égale à $2rl$.

La quantité d'électricité qui traverse, en sens inverse, deux sections contiguës des fils AA′, BB′, est évidemment la même q_s; et les termes relatifs au fil AA′B′B, dans l'équation d'un circuit fermé dont il fait partie, sont (n° 74)

$$(1) \qquad R_1 Q_1 + \int_0^l 2 r q_s \, ds + L \Delta i + \dots .$$

L'équation de la capacité donne, pour un élément de longueur ds,

$$\frac{-\partial q_s}{\partial s} = c \Delta i (R_1 + R - 2rs),$$

d'où

$$q_s = Q - c \Delta i [(R_1 + R)s - rs^2],$$

et

$$\int_0^l q_s \, ds = Q l - c \Delta i \left[(R_1 + R) \frac{l^2}{2} - r \frac{l^3}{3} \right].$$

Cette valeur, portée dans l'expression (1), lui donne, après quelques transformations, la forme suivante :

$$(2) \qquad (R_1 + R) Q + \Delta i [L - C(R_1^2 + R_1 R + \tfrac{1}{3} R^2)] + \dots .$$

C'est la forme qu'elle aurait si le fil, dénué de capacité, avait pour coefficient d'induction

$$L - C(R_1^2 + R_1 R + \tfrac{1}{3} R^2) = L - C[R_1 (R_1 + R) + \tfrac{1}{3} R^2].$$

Digitized by Google

Le fil étant ployé en double, L est petit, et, si R est très grand, l'influence de la capacité peut être notable ou même considérable.

82. Occupons-nous d'abord du cas où le fil est tout simplement ployé en double; R_1 est nul. Dans les équations des nos 19, 21, 22, 46-49, 62, 66, à la place des rapports $\frac{L}{r}$, il faut introduire des termes $\left(\frac{L}{r}-\frac{Cr}{3}\right)$ un peu moins simples, mais qui forment un tout inséparable. La méthode d'élimination du n° 66 est donc toujours exacte, et la comparaison des deux valeurs de k (n° 61) nous permet une évaluation du terme $\left(\frac{L}{r}-\frac{Cr}{3}\right)$ pour la bobine de 10000 ohms de la boîte Elliott (n° 434), qui a seule une influence notable.

Expérience avec la bobine de 10000 ohms :

$$\frac{L_1+kM}{r_1}+\left(\frac{L}{r}-\frac{Cr}{3}\right)_1=0.$$

Expérience sans cette bobine :

$$\frac{L_1+k_0M}{r_1}=0.$$

De là, on tire

$$\left(\frac{L}{r}-\frac{Cr}{3}\right)_1=-(k_0-k)\left(-\frac{M}{r_1}\right),$$

et l'on doit remarquer que, L_1 et k_0 étant positifs, $(-M)$ est une quantité positive.

Or, les expériences ont toujours donné k_0 supérieur à k (n° 61) :

Appareil B.....	$k_0=23,31$	$k=23,20$,
Appareil C.....	$k_0=4,660$	$k=4,640$.

Donc $\frac{L}{r}-\frac{Cr}{3}$ est *négatif*, et l'influence de la bobine de 10000 ohms est due, non à son coefficient d'induction, mais *à sa capacité*.

83. Ce signe n'est pas douteux; on en verra d'ailleurs plus loin la confirmation. Mais voyons dès maintenant quelques conséquences numériques de ce résultat inattendu.

Digitized by Google

On a :

$$\text{Appareil C.....} \begin{cases} -M = 4,8.10^{7}\ \text{C.G.S.} & (\text{n}^{\circ}\ 42), \\ r_1 = 108.10^{9}\ \text{C.G.S.} & (\text{n}^{\circ}\ 43). \end{cases}$$

Donc

$$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_1 = -0,00000089.$$

Les expériences faites sur l'appareil B (nos 82, 43, 39) fournissent, pour la même quantité, la valeur — 0,0000073, qui, à cause de la petitesse des différences $k_0 - k$, est identique à la précédente. Adoptons, pour les calculs suivants, la valeur intermédiaire $-0,8.10^{-5}$.

Nous pouvons en tirer une valeur de C, en supposant que $\frac{L}{r}$ soit négligeable, et voir si elle est compatible avec les dimensions du fil employé (n° 54).

On trouve ainsi 0,003 microfarad pour la capacité mutuelle des deux moitiés du fil considérées comme armatures d'un condensateur. Cherchons quelle épaisseur, e, il faudrait laisser entre une moitié du fil et une enveloppe cylindrique concentrique pour avoir la même capacité :

Longueur du fil.....	1074^{0}cm	
Diamètre du fil.....	$0^{cm},006$	(n° 54).

L'équation de condition est, en unités électrostatiques C.G.S.,

$$\frac{10740}{2}\,3,14 \times \frac{0,006}{e} = 0,003 \times 10^{-15} \times 9 \times 10^{20},$$

d'où l'on tire

$$e = 0^{cm},037,$$

c'est-à-dire $\frac{4}{10}$ de millimètre pour une enveloppe cylindrique complète. La valeur numérique elle-même est donc en parfait accord avec les dimensions du fil ployé en double.

Si l'on calcule le coefficient de self-induction pour ce fil ployé en deux moitiés, dont la distance est $0^{cm},04$, et tendu en ligne droite, on trouve environ (n° 64)

$$10740\left[\log 4\left(\frac{0,04}{0,006}\right)^{2} + \frac{1}{2}\right] = 10740 \times 5,7 = 0,6.10^{-5},$$

Digitized by Google

et, pour $\frac{L}{r}$, environ

$$+ 0,6.10^{-8} \text{ C.G.S.},$$

c'est-à-dire une valeur absolument négligeable en comparaison de l'influence réelle de cette bobine, -10^{-5}.

84. Pour contrôler le signe, j'ai encore fait les observations suivantes : Le pont formé par la boîte d'Elliott seule (n° 434) est réglé avec le plus grand soin pour l'état permanent. On met l'interrupteur en mouvement, et l'on observe la déviation moyenne (n° 63). Toutes les bobines autres que la bobine de 10000 ohms étant sans influence (n^{os} 62, 63), la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre (courant induit de fermeture) est liée au coefficient d'induction de cette bobine par la formule

$$q = -N\frac{r_1 r_4}{D} J\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_4 \quad (\text{n° 53}).$$

On arrête l'interrupteur et on dérègle le pont; la déviation du galvanomètre est liée aux résistances par la formule

$$j = +\frac{r_1 r_4}{D} J\left(\frac{r'_2 r'_3}{r'_1 r'_4} - 1\right) \quad (\text{n° 53}).$$

Dans deux expériences, on a déréglé la résistance r_1 seule, et l'on a trouvé :

q.	j.	$\frac{r'_1}{r_1}$.	$\frac{r'_2 r'_3}{r'_1 r'_4} - 1$.	$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_4$.
+ 2,3	− 11	1 + 0,001	− 0,001	< 0
+ 1,5	− 105	1 + 0,01	− 0,01	< 0

85. La bobine à deux fils de cuivre δ (n° 59, Note) a été essayée de la même manière; elle était placée sur le côté 3 du pont, et les autres côtés formés par la boîte d'Elliott (n° 434) sans intervention des bobines de 10 000 ohms. La déviation pendant l'état variable est liée au coefficient d'induction par la formule

$$q = +N\frac{r_1 r_3}{D} J\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_3 \quad (\text{n° 53}).$$

Digitized by Google

On a trouvé :

q.	j.	$\frac{r'_1}{r_1}$	$\frac{r'_2 r'_3}{r'_1 r'_4} - 1$.	$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_3$.
$-0,6$	-12	$1 + \frac{1}{1749}$	$-\frac{1}{1750}$	< 0
$-0,2$	-87	$1 + \frac{1}{175}$	$-\frac{1}{176}$	< 0
$-0,4$	-106	$1 + \frac{1}{175}$	$-\frac{1}{176}$	< 0

C'est encore la capacité de cette bobine qui influe, et non le coefficient d'induction.

Cela peut même être établi par une expérience directe, sans discussion. Laissons de côté les bobines de 10000 ohms, qui, seules, ont une influence sensible, et équilibrons le pont avec la bobine δ à deux fils de cuivre sur le côté 1. L'équilibre permanent étant atteint, mettons l'interrupteur en mouvement, nous constatons une déviation $+ 0^{div},6$; elle est due à la bobine δ seule.

Mettons ensuite en dérivation sur cette même bobine δ une capacité de 0,1 microfarad, la déviation devient $+ 6,5$ quand l'interrupteur est mis en mouvement; elle est de même signe que celle due à la bobine δ seule.

Enlevons la capacité et réunissons les deux fils de la bobine δ bout à bout, de manière à rendre l'induction prédominante; l'image sort de l'échelle, du côté *négatif*.

Donc, quand le fil est doublé, l'effet produit est de signe contraire à celui que produit un coefficient d'induction, de même signe que celui qui est dû à une capacité en dérivation. Aucun doute ne peut subsister après cette expérience.

86. Tout étant disposé comme dans la dernière expérience décrite, et le fil de la bobine δ étant doublé, l'équilibre permanent est obtenu avec les résistances suivantes :

r_1.	r_2 (I).	r_3 (III).	r_4 (II).
δ	1000	176,5	1000

Quand on prend, pour r'_3, 175,5 ohms, l'image est déviée de $-156^{div},5$.

Digitized by Google

L'intensité j_0, qui correspond à une division, est donnée (n° 53) par

$$-156,5 j_0 = \frac{J r_1 r_4}{D} \times \frac{-1}{176,5} \quad \text{C.G.S.}$$

On rétablit l'équilibre permanent du pont; on place en dérivation sur δ des capacités variées; on fait tourner l'interrupteur avec une vitesse constante, et on lit les déviations correspondantes de l'image du galvanomètre.

Or, en tenant compte de toutes les circonstances (n^{os} 53, 79, 81), on a, pour la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre en une seconde,

$$q = -N \frac{J r_1 r_4}{D} \left(\frac{L_1}{r_1} - \tfrac{1}{3} C_1 r_1 - C r_1 \right),$$

en appelant C_1 la capacité mutuelle des deux moitiés du fil de la bobine δ, et C la capacité mise en dérivation. Si q_0 correspond au cas où C est nul, on a

$$q - q_0 = +N \frac{J r_1 r_4}{D} r_1 C,$$

et l'on peut, par la simple condition de proportionnalité, déduire de chaque expérience la déviation qu'aurait donné 1 microfarad. C'est ainsi qu'ont été déterminés les nombres de la dernière colonne; on voit qu'ils sont sensiblement égaux.

TABLEAU XVIII.

Capacité C en microfarads	Déviation.	Effet calculé de 1 microfarad
0,5	+ 30,0	59,0
0,3	+ 18,0	58,0
0,1	+ 6,5	59,0
0,0	+ 0,6	

De l'effet produit par un microfarad on déduit, pour la bobine δ seule,

$$-\frac{L_1}{r_1} + \tfrac{1}{3} C_1 r_1 = \frac{0,6}{59} \times r_1 10^{-15} = 0,0010 r_1 10^{-15} \text{ C.G.S.},$$

et, en regardant le premier terme comme négligeable,

$$C_1 = 0,030 \text{ microfarad.}$$

Digitized by Google

Enfin, en comparant $q - q_0$ à j_0, on a

$$59 j_0 = + N \frac{J r_1 r_4}{D} . 1 . 10^{-15} . 176{,}5 . 10^9 \quad \text{C.G.S.},$$

et, d'autre part,

$$156{,}5 j_0 = \frac{J r_1 r_4}{D} \frac{1}{176{,}5} \quad \text{C.G.S.};$$

d'où, par division,

$$N = \frac{59}{156{,}5} \frac{10^6}{(176{,}5)^2} = 12{,}0,$$

ce qui est précisément le nombre de tours de l'interrupteur en une seconde.

87. On a recommencé les mêmes expériences, en réunissant l'un à l'autre les deux fils de la bobine δ, non plus directement, mais par l'intermédiaire de la résistance ρ de 260 ohms (n° 64), comme cela est indiqué au n° 81.

Équilibre permanent du pont :

r_1.	r_2 (I).	r_3 (III).	r_4 (II).
$\delta + \rho$	1000	436	1000

Déviation pour $r'_3 = 435$:

$$- 105^{\text{div}},0,$$

d'où

$$105{,}0 j_0 = \frac{J r_1 r_4}{D} \frac{1}{436} \text{ C.G.S.}$$

L'équilibre permanent du pont étant rétabli, quand on met une capacité C entre les sommets A, C (*fig.* 2, n° 19) en dérivation sur le côté 1, et qu'on fait tourner l'interrupteur, on a

$$q = - N \frac{J r_1 r_4}{D} \left[\frac{L_1}{r_1} - C_1 \frac{r_1 (r_1 - \rho) + \frac{1}{3} (r_1 - \rho)^2}{r_1} - C r_1 \right].$$

Digitized by Google

TABLEAU XIX.

Capacité C en microfarads.	Déviation.	Effet calculé de 1 microfarad.
0,7	+ 163,0	+ 240
0,5	+ 120,0	+ 235
0,3	+ 75,0	+ 231
0,1	+ 28,5	+ 226
0,0	+ 4,5	

Les nombres de la dernière colonne sont encore peu différents. Leur comparaison avec la déviation obtenue pour C = 0 donne

$$-\frac{L_1}{r_1}+C_1\frac{r_1(r_1-\rho)+\frac{1}{3}(r_1-\rho)^2}{r_1}=\frac{4,5}{230}\times r_1 10^{-15}\,\text{C.G.S.}$$

Négligeant, comme au numéro précédent, le premier terme, et tirant C_1 de cette équation, on a

$$C_1\frac{436.176+\frac{1}{3}(176)^2}{436}=\frac{4,5}{230}\times 436\ 10^{-15}\,\text{C.G.S.},$$

ou

$$C_1=0,029\ \text{microfarad},$$

c'est-à-dire identiquement la même valeur qu'au numéro précédent.

Nous en concluons :

1° Que le terme $\frac{L_1}{r_1}$ est bien réellement négligeable ;

2° Que la formule trouvée au n° 81 pour exprimer l'influence de la capacité d'un fil ployé en double est exacte.

On avait eu soin de tourner l'interrupteur avec la même vitesse que dans l'expérience du n° 86. On trouve, en effet, par un calcul tout semblable,

$$N=11,6.$$

Il serait facile de s'assurer aussi que le fil sans induction ρ a un effet très différent quand il est placé non plus entre les deux fils de la bobine δ, mais en dehors; si l'induction existait seule, la position de ce fil ρ serait indifférente.

88. Je crois donc qu'il est hors de doute que, dans un fil long ployé en double, l'influence de la capacité est prédominante sur celle de l'induc-

Digitized by Google

tion. Le signe, l'ordre de grandeur de l'effet observé sont parfaitement d'accord pour justifier cette manière de voir.

Pour deux bobines de même forme, l'effet dû à l'induction est d'autant plus grand que le métal est plus conducteur et que les dimensions absolues sont plus grandes. Si l'effet de l'induction existait seul, on ne comprendrait pas que la bobine à deux fils de cuivre, dont les dimensions sont quadruples de la bobine de 10000 ohms, et dont le fil est en cuivre, ne produise qu'un effet moindre (3.10^{-6} au lieu de 8.10^{-6}, nos 85, 83), malgré une longueur de fil 40 fois plus grande. Ce résultat est, au contraire, naturel s'il s'agit de la capacité. Dans la bobine de cuivre, les deux fils sont séparés par une grande épaisseur de paraffine. Pour des formes identiques, l'effet produit par la capacité est d'autant moindre que le métal est plus conducteur; et la diminution d'effet due à la nature et à la distance du fil peut bien compenser l'augmentation produite par sa longueur.

D'une manière générale, toutes les fois qu'on allonge les fils doublés, on ne change pas le rapport $\frac{L}{r}$, et on augmente le produit Cr proportionnellement au carré de la longueur. On finit donc toujours par le rendre prédominant. On comprend pourquoi les dix bobines de 1000 ohms n'ont qu'un effet insensible, bien que la bobine de 10000 ohms soit très gênante; pour chacune d'elles le produit Cr n'est environ que le centième de ce qu'il vaut pour la bobine de 10000 ohms; et pour elles toutes, environ le dixième, ce qui suffit à le rendre presque insensible (n° 63).

Le procédé tout indiqué, pour rendre négligeable l'influence de la bobine de 10000 ohms, est donc de séparer les 107^{m} du fil qui la forme en dix ou vingt parties à peu près égales; de ployer chacune d'elles en double, avant de l'embobiner, et, au besoin, d'embobiner une partie du fil sans la doubler, pour que son coefficient d'induction neutralise une partie de l'influence de sa capacité.

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

J'ai entrepris l'étude des méthodes de mesure des coefficients d'induction. J'ai établi la théorie de ces méthodes, dans le Chapitre II, après avoir rappelé au Chapitre I les lois expérimentales des courants instantanés.

Dans les Chapitres suivants, III, IV, V, j'ai étudié ces méthodes en détail, tant au point de vue expérimental qu'au point de vue théorique. J'ai cherché les meilleures conditions de sensibilité et de précision, et j'ai indiqué les moyens d'éliminer les principales causes d'erreur. J'ai réussi à obtenir des résultats dont la plus grande erreur possible n'atteint pas $\frac{1}{1000}$, et qui concordent, en effet, à moins de $\frac{1}{3000}$, malgré la variété des conditions expérimentales.

La comparaison avec les valeurs absolues calculées approximativement montre la difficulté du calcul théorique d'un coefficient de self-induction.

Dans un dernier Chapitre, j'ai examiné l'influence possible de la capacité des bobines; et, tant par la discussion des résultats du Chapitre IV que par de nouvelles expériences, je crois avoir mis hors de doute que l'erreur qu'on commet en négligeant l'influence d'un fil long ployé en double est due à la capacité de ce fil.

J'ai contrôlé la graduation théorique des coefficients d'induction mutuelle de deux appareils simples (Ch. III), et vérifié les lois de similitude des bobines (Ch. V).

Toutes les expériences précises citées dans cette thèse ont été exécutées au Laboratoire de Physique du Collège de France, dont les meilleurs appareils électriques ont été mis à ma disposition par M. Mascart. Qu'il me soit permis de lui témoigner ici toute ma reconnaissance pour la bienveillante attention avec laquelle il a suivi les progrès de ce travail.

Digitized by Google

NOTES AU CHAPITRE I.

N° 10. *Équation* (1).

Il m'a été impossible de découvrir, dans les deux premières séries d'expériences de Faraday (traduites dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. L, 1832, p. 5 et 113), la démonstration expérimentale, ni même l'énoncé précis que l'effet produit par l'induction est une force électromotrice instantanée. Cette loi n'est soupçonnée que dans le § 214, mais sans netteté. Ce que ces deux Mémoires démontrent, c'est l'analogie complète des effets observés avec les aimants et les courants (1).

Le Mémoire fondamental de Lenz (1833) (*Pogg. Ann.*, t. XXXIV, p. 385; 1835) est relatif à l'induction magnéto-électrique. Pour un changement d'aimantation toujours le même, la quantité d'électricité induite dans un circuit quelconque de forme constante est proportionnelle à la conductibilité du circuit, quelles que soient la nature, la longueur, l'épaisseur du fil. L'effet produit est donc bien une force électromotrice instantanée. Cette force électromotrice est proportionnelle au nombre des tours de fil induit, pourvu que chaque tour pris isolément donne le même effet. Donc les forces électromotrices produites dans les diverses parties du circuit s'ajoutent.

A cause de l'analogie établie par Faraday, il est naturel d'admettre qu'il en est de même dans l'induction produite par les courants électriques.

---

(1) Le Mémoire de Faraday ne permet de décider que si la question a été posée à peu près en ces termes : Dans les phénomènes d'induction, quelle est la quantité indépendante de la nature du conducteur? Est-ce l'intensité du courant produit? Est-ce une force électromotrice qui engendre le courant conformément aux lois de Ohm, supposées applicables? Cette seconde hypothèse est seule conforme aux expériences (§ 193-212). Mais il ne semble pas que Faraday ait jamais posé la question en des termes aussi nets. On trouve, en effet, dans la 29e série des *Recherches expérimentales* (1851) des essais infructueux pour reconnaître l'influence des dimensions des conducteurs; il espère obtenir des intensités égales en conservant la même masse à la portion du fil directement soumise à l'induction (§ 3206-3213). Il semble donc qu'il n'ait pas connu les lois d'Ohm, qui s'appliquent immédiatement à l'une de ses expériences de cette série (§ 3207), ni même les travaux exécutés dix-huit ans auparavant par Lenz, sur l'induction magnéto-électrique. C'est pourtant dans cette série (29e) et dans la précédente (28e) qu'il résume d'une manière absolument nette les lois qui lient l'intensité induite dans un circuit de forme variable, mais toujours constitué par le même fil, au nombre de lignes de force coupées par le circuit induit.

Digitized by Google

Quant à l'influence de l'intensité du champ magnétique, le Mémoire de Lenz ne contient rien. Nous ne pouvons donc rien en tirer par voie d'analogie pour la forme du premier terme de l'équation (1), $M\Delta I$. Dans le cas de l'extra-courant, cette forme a été justifiée par les expériences d'Edlund (1849) (*Pogg. Ann.*, t. LXXVII, p. 161, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LIII, p. 51).

N° 11. *Expériences de Felici* (1).

Felici admet que l'effet produit est une force électromotrice instantanée; ses expériences ont pour but de déterminer comment elle dépend de la forme, des dimensions et de la nature des circuits.

Je citerai d'abord l'expérience suivante, que Matteucci, dans son Cours sur l'induction, attribue à Felici, mais que je n'ai pas trouvée dans les extraits de ses Mémoires publiés aux *Annales de Chimie et de Physique*.

Deux bobines inductrices sont parcourues par le courant d'une même pile. Deux bobines induites communiquent chacune à l'un des fils d'un bon galvanomètre différentiel. Une roue de Masson établit et supprime alternativement la communication de la pile avec les bobines inductrices, et envoie dans le galvanomètre les courants induits de fermeture seuls. Un rhéostat permet de modifier la résistance d'un des circuits induits, et, pour ramener l'aiguille du galvanomètre au zéro, on change le nombre de tours induits de l'autre circuit. On trouve que le changement relatif du nombre de tours induits est égal au changement relatif de la résistance.

Donc la force électromotrice est proportionnelle au nombre de tours induits; les forces électromotrices produites dans les diverses parties de l'induit s'ajoutent. C'est le résultat que Lenz avait déjà obtenu pour l'induction magnéto-électrique.

Passons maintenant aux expériences décrites dans les *Annales de Chimie et de Physique*.

Les deux bobines induites, au lieu de former deux circuits distincts, sont réunies en un seul circuit qui contient le galvanomètre à fil unique.

1° Quand les deux paires de bobines sont identiques (et attachées dans un sens convenable), le galvanomètre reste au zéro. Il en est de même quand on change l'épaisseur ou la nature d'un des fils inducteurs, ou d'un des fils induits, la forme des bobines restant la même.

La force électromotrice d'induction est donc indépendante de la nature des circuits; elle ne dépend que de leur forme géométrique.

2° Le galvanomètre est mis au zéro, quand chacune des bobines n'a qu'un seul tour de fil. On fait ensuite, pour l'une des paires de bobines, m tours

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXXIV; 1852.

Digitized by Google

de fil inducteur, n tours de fil induit; pour l'autre paire, m' et n'. L'équilibre subsiste si l'on a

$$mn = m'n'.$$

La force électromotrice ne dépend donc que du produit mn. Comme, d'après l'expérience citée par Matteucci, pour m constant, elle est proportionnelle à n, nous devons en conclure : la force électromotrice est proportionnelle au produit du nombre des tours de fil induit et inducteur, tant que ces tours sont identiques.

Traduisant en langage ordinaire, on en déduit, par une généralisation naturelle, que la force électromotrice totale est la somme des forces électromotrices correspondant à tous les éléments des deux circuits pris deux à deux de toutes les manières possibles :

$$\mathcal{E} = \int\int e_{ss'}\, ds\, ds'.$$

Cela suffit aussi à justifier la forme générale de l'équation (3) du n° 11, relative aux circuits fermés.

3° L'équilibre existant entre les deux paires de circuits, chacun à un seul tour de fil, on remplace dans l'une des bobines inductrices le fil unique par m fils égaux placés côte à côte, en dérivation. L'équilibre subsiste. Or chaque fil est parcouru par un courant $\frac{I}{m}$; la force électromotrice due aux m fils est m fois celle due à chacun d'eux (exp. 2), et elle équivaut à celle d'un seul fil parcouru par le courant I.

Donc la force électromotrice est proportionnelle à la variation de l'intensité de l'inducteur quand il passe d'un état permanent à un autre état permanent; ce qui justifie la forme adoptée dans les équations (1), (3) des n°s 10 et 11.

Avant de terminer les expériences de Felici, j'en rappellerai quelques-unes de Gaugain. Dans un Mémoire présenté à l'Institut, et qui n'est connu que par des extraits (*Comptes rendus*, t. XXXIX, p. 909-1023; 1859), Gaugain a établi par des mesures directes ce que nous avons pu conclure des expériences de Lenz et de celles de Felici citées jusqu'ici.

L'intensité du courant induit est en raison directe de la somme des forces électromotrices mises en jeu, et en raison inverse de la somme des résistances du circuit. Elle est proportionnelle à l'intensité du courant inducteur.

L'intensité du courant inducteur est mesurée à la boussole des tangentes; celle du courant induit par l'impulsion de l'aiguille d'un galvanomètre Nobili.

L'addition des forces électromotrices est démontrée très simplement par l'expérience suivante : Le fil inducteur et le fil induit bien isolés sont légèrement tordus ensemble sur une très grande longueur. On en fait successivement, en utilisant toute la longueur, un cercle de grand diamètre, et d'un seul tour; un cercle de diamètre moitié moindre formé de deux tours côte à

Digitized by Google

côte, etc. Tant que le diamètre des cercles est grand par rapport à la distance mutuelle des deux fils, les impulsions sont sensiblement proportionnelles aux nombres de tours.

N° 13. *Suite des expériences de Felici.*

5° Le principe des courants sinueux peut être exprimé ainsi : Si, dans l'une des paires de bobines, les fils sont bien tendus, et que, dans l'autre paire, l'inducteur ou l'induit soient rendus sinueux (avec les restrictions habituelles), l'équilibre subsiste.

On peut donc remplacer un élément par ses projections, quand les deux circuits sont fermés, seul cas où l'expérience puisse être réalisée. On en déduit, par une analyse calquée sur celle d'Ampère pour l'électrodynamique,

$$\mathcal{E} = I \int\int [\varphi(r)\cos\theta\cos\theta' + \psi(r)\cos\omega]\, ds\, ds',$$

et, par suite d'une équivalence connue dans le cas des circuits fermés,

$$\mathcal{E} = I \int\int f(r)\cos\theta\cos\theta'\, ds\, ds' = I \int\int f(r)\cos\omega\, ds\, ds',$$

$$f(r) = \varphi(r) + \psi(r).$$

θ et θ' sont les angles des deux éléments ds, ds' avec leur distance r; et ω l'angle de ces deux éléments entre eux; $f(r)$ est une fonction de la distance à déterminer.

6° Les deux paires de bobines sont de formes semblables. Leur rapport de similitude est k. Pour que l'équilibre existe, il faut que le nombre des tours de fil de l'inducteur soit dans le rapport inverse $\frac{1}{k}$, le nombre de tours de l'induit étant le même.

Par exemple, l'une des paires de bobines est formée de polygones plans égaux, parallèles, à distance déterminée. Pour l'autre paire, les polygones sont semblables, et le rapport de leur distance aux côtés homologues est le même.

Pour un tour du fil inducteur et un tour du fil induit, on a

Première paire..... $\mathcal{E}_1 = I \int\int f(r)\cos\omega\, ds\, ds'$

Deuxième paire..... $\mathcal{E}_2 = I \int\int f(kr)\cos\omega\, k\, ds\, k\, ds'$

et l'expérience montre qu'on a

$$\mathcal{E}_2 = k\mathcal{E}_1;$$

Digitized by Google

d'où

$$k\int\int f(r)\cos\omega\, ds\, ds' = \int\int k^2 f(kr)\cos\omega\, ds\, ds'$$

ou

$$\int\int [f(r) - k f(kr)]\cos\omega\, ds\, ds' = 0.$$

Et comme cette relation subsiste quelle que soit la forme du circuit, on en déduit

$$f(r) - k f(kr) = 0, \qquad f(r) = \frac{C}{r}.$$

On a donc, pour deux circuits fermés, la force électromotrice d'induction au moyen de l'intégrale double

$$\mathcal{E} = I\int\int \frac{C}{r}\cos\omega\, ds\, ds',$$

C étant une constante numérique dont la valeur dépend des unités adoptées.

Je ne suivrai pas Felici dans les essais qu'il a faits pour déterminer la forme de la fonction dans le cas des circuits ouverts géométriquement, mais physiquement fermés, parcourus par un courant uniforme. Je n'en ai pas besoin ici, et je ne les trouve pas démonstratifs.

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS

ET

APPLICATIONS DE CERTAINES FONCTIONS

ANALOGUES A LA FONCTION Θ,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

SECONDE PARTIE.

Équations différentielles.

25. Considérons, avec les p intégrales normales de première espèce, un système de q intégrales normales de troisième espèce et de r intégrales normales de seconde espèce. On pourra représenter ces intégrales par les expressions

$$u^{(i)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\varphi_i(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx,$$

$$v^{(k)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\psi_k(x, y)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]\, F'_y(x, y)}\, dx,$$

$$w^{(h)}(x) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\chi_h(x, y)}{[\zeta^{(h)}]\, F'_y(x, y)}\, dx,$$

φ_i, ψ_k et χ_h étant des polynômes ayant les mêmes degrés et les mêmes

Digitized by Google

propriétés que ceux du n° 20. Considérons le système suivant de $p+q+r$ équations différentielles :

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+q+r} \frac{\varphi_i(x_j,y_j)}{F'_y(x_j,y_j)}\,dx_j = du_i & (i=1,2,\ldots,p), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+q+r} \frac{\psi_k(x_j,y_j)}{[\xi^{(k)},\eta^{(k)}]_j\,F_y(x_j,y_j)}\,dx_j = dv_k & (k=1,2,\ldots,q), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+q+r} \frac{\chi_h(x_j,y_j)}{[\zeta_h]_j\,F'_y(x_j,y_j)}\,dx_j = dw_h & (h=1,2,\ldots,r). \end{cases}$$

L'indice j de $[\xi^{(k)},\eta^{(k)}]$ et de $[\zeta^{(h)}]$ signifie que l'on a remplacé x et y par x_j, y_j dans les fonctions linéaires que représentent ces symboles. Nous regarderons dans les équations (1) les x_j comme fonctions des $p+q+r$ quantités u_i, v_k, w_h. En appelant $x_j^{(0)}$ les valeurs initiales des x_j pour les valeurs initiales $u_i^{(0)}$, $v_k^{(0)}$, $w_h^{(0)}$ des variables, le système (1) peut s'écrire

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+q+r} [u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(x_j^{(0)})] = u_i - u_i^{(0)}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+q+r} [v^{(k)}(x_j) - v^{(k)}(x_j^{(0)})] = v_k - v_k^{(0)}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p+q+r} [w^{(h)}(x_j) - w^{(h)}(x_j^{(0)})] = w_h - w_h^{(0)}. \end{cases}$$

Si, dans les équations (1), on regarde u_i, v_k, w_h comme fonctions des x_j, les conditions d'intégrabilité sont évidemment satisfaites, puisque le coefficient de dx_j ne contient que la variable x_j. On en conclut que, réciproquement, l'on peut considérer les x_j comme fonctions des u_i, v_k, w_h, et, d'après un théorème de M. Bouquet, ces fonctions resteront holomorphes tant que les coefficients différentiels seront eux-mêmes holomorphes par rapport aux x_j. Pour avoir ces coefficients, il faut résoudre les équations (1) par rapport aux dx_j. Le

Digitized by Google

dénominateur commun est le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1,y_1) & \varphi_1(x_2,y_2) & \dots & \varphi_1(x_{p+q+r},y_{p+q+r}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi_p(x_1,y_1) & \varphi_p(x_2,y_2) & \dots & \varphi_p(x_{p+q+r},y_{p+q+r}) \\ \dfrac{\psi_1(x_1,y_1)}{[\xi^{(1)},\eta_i^{(1)}]_1} & \dfrac{\psi_1(x_2,y_2)}{[\xi^{(1)},\eta_i^{(1)}]_2} & \dots & \dfrac{\psi_1(x_{p+q+r},y_{p+q+r})}{[\xi^{(1)},\eta_i^{(1)}]_{p+q+r}} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\psi_q(x_1,y_1)}{[\xi^{(q)},\eta_i^{(q)}]_1} & \dfrac{\psi_q(x_2,y_2)}{[\xi^{(q)},\eta_i^{(q)}]_2} & \dots & \dfrac{\psi_q(x_{p+q+r},y_{p+q+r})}{[\xi^{(q)},\eta_i^{(q)}]_{p+q+r}} \\ \dfrac{\chi_1(x_1,y_1)}{[\zeta^{(1)}]_1} & \dfrac{\chi_1(x_2,y_2)}{[\zeta^{(1)}]_2} & \dots & \dfrac{\chi_1(x_{p+q+r},y_{p+q+r})}{[\zeta^{(1)}]_{p+q+r}} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\chi_r(x_1,y_1)}{[\zeta^{(r)}]_1} & \dfrac{\chi_r(x_2,y_2)}{[\zeta^{(r)}]_2} & \dots & \dfrac{\chi_r(x_{p+q+r},y_{p+q+r})}{[\zeta^{(r)}]_{p+q+r}} \end{vmatrix}$$

divisé par le produit $\prod_{j=1}^{j=p+q+r} F'_y(x_j,y_j)$. Appelons Δ_{ij} le mineur obtenu, en supprimant dans Δ la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, on aura

$$dx_j = (-1)^j F'_y(x_j,y_j)\left[\sum_{i=1}^{i=p}(-1)^i \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\,du_i + \sum_{k=1}^{k=q}(-1)^{p+k}\frac{\Delta_{p+k,j}}{\Delta}\,dv_k + \sum_{h=1}^{h=r}(-1)^{p+q+h}\frac{\Delta_{p+q+h,j}}{\Delta}\,dw_h\right].$$

Les coefficients différentiels ne peuvent cesser d'être holomorphes que si les fonctions x_j acquièrent des valeurs annulant Δ, ou bien si l'une ou plusieurs d'entre elles coïncident avec des points situés sur les droites $(\xi^{(k)},\eta^{(k)})$, $(\zeta^{(k)})$, Δ devenant alors infini en même temps que Δ_{ij}, ..., ou bien, enfin, si l'une ou plusieurs d'entre elles deviennent infinies.

26. Le déterminant Δ s'annule quand un certain nombre de points (x_1,y_1), (x_2,y_2), ... coïncident. Supposons que les n points (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) coïncident avec un point (a,b), que nous supposerons d'abord un point simple de $F(x,y)=0$ non situé sur les

Digitized by Google

Digitized by Google

$z_2, \ldots, z_n$. Ce quotient ne s'annule pas en général avec les quantités $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; il conserve d'ailleurs une valeur finie pour de petites valeurs de ces variables.

Le déterminant mineur $N_t^{(t)}$ se déduit de Δ en remplaçant les n premiers termes de la $t^{\text{ième}}$ ligne horizontale par les quantités

$$t x_1'^{t-1} F'_y(x_1, y_1), \ldots, \quad t x_n'^{t-1} F'_y(x_n, y_n),$$

et les autres par zéro. Après la substitution, il deviendra une fonction alternée de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, divisible par le même produit de facteurs binômes que précédemment. En supprimant ces facteurs, le coefficient de du_i dans dz_t deviendra une fonction holomorphe de $z_1, \ldots, z_n$, $x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$ pour de petites valeurs de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. On en conclut que les fonctions $z_1, \ldots, z_n, x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$ restent holomorphes dans le voisinage des valeurs considérées, et que les fonctions intégrales x_1, $x_2, \ldots, x_n$ se permutent entre elles comme les racines d'une équation algébrique (1).

27. Supposons que les n points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, n pouvant être l'unité, coïncident avec un point (a, b), situé sur la droite $(\xi^{(g)}, \eta^{(g)})$. Le déterminant Δ, développé par rapport aux éléments de la $p+g^{\text{ième}}$ ligne horizontale, a ses n premiers termes infinis et du premier ordre. Après avoir posé, comme précédemment,

$$x_1 = a + x'_1, \quad \ldots, \quad x_n = a + x'_n,$$

et remplacé les y par leur développement en série relatif à la branche de courbe qui contient le point simple (a, b), les dénominateurs des n termes de Δ, dont il a été question, contiendront en facteurs le premier x'_1, le second $x'_2, \ldots$, le $n^{\text{ième}}$ x'_n. En développant maintenant le déterminant $N_t^{(t)}$ par rapport à la $p+g^{\text{ième}}$ ligne horizontale; le dénominateur des n premiers termes contiendront aussi respectivement les facteurs x'_1, x'_2, x'_n,. On voit, en chassant les dénominateurs, que le coefficient de du_i est une fraction qui reste finie. Il en est de même du coefficient de dw_h et de celui de dv_k si k est différent de g. Pour $k=g$, le déterminant $N_g^{(t)}$ ne devient pas infini, et Δ est infini, en sorte que le

(1) *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 90.

Digitized by Google

coefficient de dv_g est nul. Si n est différent de 1, on continuera la démonstration comme dans le cas précédent, en introduisant au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Les coefficients de du_i, dv_k, dw_h dans la différentielle dz_t seront des fonctions rationnelles en $z_1, \ldots, z_n, x_{n+1}, \ldots, x_{p+q+r}$, holomorphes pour de petites valeurs des variables z. Dans cette nouvelle hypothèse, un certain nombre de fonctions intégrales peuvent se permuter.

Il n'y a évidemment rien à changer au raisonnement, si le point (a, b) est sur une droite $(\zeta^{(h)})$, à moins qu'il ne soit au point de contact, auquel cas les termes qui étaient infinis du premier ordre sont infinis du second ordre; mais, comme cette modification se présente à la fois au numérateur et au dénominateur des coefficients de du_i, dv_k, dw_h, on arrive à la même conclusion.

28. Supposons que les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ coïncident avec un point critique (a, b) de $F(x, y) = 0$. Si les racines $y_1, \ldots, y_n$ appartiennent à un même système circulaire de p racines, on sait que l'on peut déterminer les constantes $b', b'', \ldots$, et les exposants $q_1, q_2, \ldots, q_s$ de façon qu'en posant

$$x = a + x'^p, \quad y = b + b'x'^{q_1} + b''x'^{q_2} + \ldots + y'x'^{q_s},$$

y' soit une fonction holomorphe de x' pour de petites valeurs de cette variable. Par cette substitution, les coefficients différentiels des intégrales des trois espèces deviendront

$$\frac{p\,\varphi_t^{(s)}(x', y')}{F_{y'}^{(s)'}(x', y')}\,dx',$$

$$\frac{p\,\psi_k^{(s)}(x, y')}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]^{(s)}\,F_{y'}^{(s)'}(x', y')}\,dx',$$

$$\frac{p\,\chi_h^{(s)}(x', y')}{[\zeta^{(h)}]^{(s)}\,F_{y'}^{(s)'}(x', y')}\,dx'.$$

L'indice s de $[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]$ et de $[\zeta^{(h)}]$ indique ce que deviennent ces fonctions linéaires par la substitution. Les nouvelles expressions ne sont plus linéaires en x' et y'; mais elles ne s'annulent pas pour de petites valeurs de x', puisque par hypothèse le point (a, b) n'est pas sur les droites $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$, $(\zeta^{(h)})$. On peut répéter alors le raisonnement

Digitized by Google

précédent; les deux termes de chaque coefficient dans l'expression de la différentielle dz_t sont toujours des fonctions alternées ayant un facteur commun que l'on pourra supprimer.

On fera une seconde substitution analogue si un second groupe de n' points vient coïncider avec le point critique (a, b), les n' racines $y_{n+1}, \ldots, y_{n+n'}$ appartenant à un autre système circulaire.

Enfin, si une ou plusieurs des fonctions x_j deviennent infinies, on effectuera pour ces fonctions la transformation $x = \frac{1}{x'}$.

29. Le déterminant Δ peut aussi s'annuler sans que deux des points (x_j, y_j) coïncident. Il suffit que les $p+q+r$ points soient situés sur une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$ (n° 20). Appelons (a_j, b_j) les $p+q+r$ points dans cette hypothèse; la courbe adjointe qui les contient rencontre encore la courbe $F(x, y) = 0$ en $p+q+r-2$ autres points (a'_j, b'_j), et l'on aura

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(a_j) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) = \Gamma_i,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(a_j) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j) = \Delta_k,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(a_j) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j) = \varepsilon_h.$$

Soient $\overline{u}_i$, $\overline{v}_k$, $\overline{w}_h$ les valeurs des variables u_i, v_k, w_h dans le cas particulier dont nous nous occupons. Les équations (2) pourront s'écrire

$$\overline{u}_i - u_i^{(0)} = \Gamma_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j^{(0)}),$$

$$\overline{v}_k - v_k^{(0)} = \Delta_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j^{(0)}),$$

$$\overline{w}_h - w_h^{(0)} = \varepsilon_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j) - \sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j^{(0)}),$$

ou plus simplement, en supposant que les variables u_i, v_k, w_h soient

Digitized by Google

nulles quand les points (x_j, y_j) coïncident tous avec l'origine (x_0, y_0) des intégrales

$$\overline{u_i} = \Gamma_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j),$$

$$\overline{v_k} = \Delta_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j),$$

$$\overline{w_h} = \varepsilon_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j).$$

On voit ainsi que les quantités u_i, v_k, w_h conservent la même valeur quand les courbes adjointes du degré $m+q+r-3$ passent par les $p+q+r-2$ points (a'_j, b'_j). Donc à un système déterminé de valeurs de ces quantités répondent une infinité de systèmes de $p+q+r$ points qui se déplacent sur la courbe $F(x,y)=0$, en restant sur une courbe adjointe d'ordre $m+q+r-3$.

30. Il résulte des considérations précédentes que toute fonction rationnelle et symétrique des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{h+q+r}$ est une fonction méromorphe des $p+q+r$ variables indépendantes u_i, v_k, w_h, à l'exception du cas d'indétermination dont il vient d'être question. On peut la regarder comme une fonction abélienne de ces variables admettant un système de $2p+q$ périodes; la fonction ne changera pas si l'on augmente simultanément toutes les variables de multiples quelconques des quantités contenues dans une même colonne verticale du tableau suivant

$$\begin{array}{cccccccccccc}
2\pi\sqrt{-1} & 0 & \ldots & 0 & 2\alpha_{11} & \ldots & 2\alpha_{1p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 2\pi\sqrt{-1} & \ldots & 0 & 2\alpha_{21} & \ldots & 2\alpha_{2p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 2\pi\sqrt{-1} & 2\alpha_{p1} & \ldots & 2\alpha_{pp} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 2A_{11} & \ldots & 2A_{1p} & 2\pi\sqrt{-1} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 2A_{q1} & \ldots & 2A_{qp} & 0 & 0 & \ldots & 2\pi\sqrt{-1} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1q} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{r1} & \ldots & a_{rq} & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}$$

Digitized by Google

Soit la fonction rationnelle $z = \frac{\Psi(x, y)}{\Phi(x, y)}$; nous pouvons ramener la recherche des quantités x_j, y_j à celle des fonctions symétriques

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + \dots, \\ \mathbf{M}_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots, \\ \dots\dots &\quad \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathbf{M}_{p+q+r} &= z_1 z_2 \dots z_{p+q+r}, \end{aligned}$$

lesquelles s'obtiendront de la façon suivante.

Supposons que dans le théorème IX on regarde les points $(x_1, y_1), \dots, (x_{p+q+r}, y_{p+q+r})$ qui sont complètement arbitraires comme étant ceux qui satisfont aux équations différentielles simultanées (1), la fonction V deviendra, en tenant compte de ces équations, une fonction des $p + q + r$ variables indépendantes u_i, v_k, w_h, et l'équation (29), qui fournit une relation entre les points $(x_1, y_1), \dots, (x_{p+q+r}, y_{p+q+r})$ et cette fonction V, renferme la solution du problème.

Pour avoir un nombre suffisant de relations, nous supposerons que la courbe $\Psi = 0$ soit remplacée par $\Phi + \lambda\Psi = 0$, en sorte que les points (α_l, β_l) dépendent de cette constante arbitraire λ. On aura ainsi

$$\mathrm{V}(u_i, v_k, w_h) = \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Theta_{(r)}^{(q)}[u_i - u^{(i)}(\alpha_l) - \mathrm{C}_i, \dots]}{\Theta_{(r)}^{(q)}[u_i - u^{(i)}(\alpha_l) - \mathrm{C}_i, \dots]},$$

$$\mathrm{P} = \prod_{j=1}^{j=p+q+r} \left[1 + \lambda \frac{\Psi(x_j, y_j)}{\Phi(x_j, y_j)}\right],$$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{V}(0, 0, 0)}{\left[1 + \lambda \frac{\Psi(x_0, y_0)}{\Phi(x_0, y_0)}\right]^{p+q+r}}.$$

La fonction P ordonnée par rapport aux puissantes croissantes de λ a précisément pour coefficients les fonctions symétriques $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{p+q+r}$. Si l'on donne à λ $p + q + r$ valeurs différentes, on obtiendra $p + q + r$ équations du premier degré qui permettront d'exprimer ces quantités par des fonctions linéaires des $p+q+r$ fonctions $\mathrm{V}(u_i, v_k, w_h)$ répondant aux valeurs attribuées à λ.

Digitized by Google

Cas d'indétermination.

31. Nous avons vu qu'il y a indétermination dans la résolution des équations abéliennes quand les variables ont les valeurs

$$(1)\qquad \begin{cases} \overline{u}_i = 2C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j), \\ \overline{v}_k = 2D_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j), \\ \overline{w}_h = 2E_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j). \end{cases}$$

D'un autre côté, on sait, par le théorème fondamental sur les zéros, que les $p+q+r$ zéros de la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}[u^{(i)}(x)-G_i, v^{(k)}(x)-g_k, w^{(h)}(x)-\gamma_h]$ sont les points (x_j, y_j) constituant le système intégral des équations abéliennes où les variables des seconds membres u_i, v_k, w_h ont les valeurs G_i+C_i, g_k+D_k, γ_h+E_h. Il en résulte que ces zéros ne sont plus déterminés quand on donne aux constantes les valeurs

$$G_i = C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j),$$

$$g_k = D_k - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} v^{(k)}(a'_j),$$

$$\gamma_h = E_h - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} w^{(h)}(a'_j).$$

Or la fonction $\Theta^{(q)}_{(r)}$ devient, dans ce cas,

$$\Theta^{(q)}_{(r)}\left[u^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - C_i, \ \ldots\right],$$

et, d'après le théorème V, elle est identiquement nulle.

De là nous pouvons conclure que la fonction $V(u_i, v_k, w_h)$ est indé-

Digitized by Google

terminée quand les variables ont les valeurs (4); car, prenant le quotient des fonctions $\Theta_{(r)}^{(q)}$ qui entrent dans la fonction V et qui répondent à la même valeur de l, on aura, pour les deux termes de ce quotient, les expressions

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[C_i - \sum_{j=1}^{j=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - u^{(i)}(x_l), \ldots\right],$$

$$\Theta_{(r)}^{(q)}\left[C_i - \sum_{j=1}^{i=p+q+r-2} u^{(i)}(a'_j) - u^{(i)}(x_l) \ldots\right],$$

qui sont nulles toutes les deux.

Interprétation géométrique.

32. On sait que le problème de l'inversion de Jacobi revient géométriquement à chercher les p points d'intersection de la courbe fondamentale $F(x,y)=0$, avec une courbe de degré supérieur à $m-3$, qui satisfait à toutes les conditions relatives aux points critiques, et que l'on assujettit en outre à passer par un nombre de points de $F(x,y)=0$ suffisant pour la déterminer. On peut donner du problème plus général dont il a été question dans ce travail une interprétation analogue en se servant de courbes adjointes d'ordre supérieur à $m+q+r-3$; nous prendrons des courbes de l'ordre $m+q+r-2$.

Remarquons d'abord que la méthode employée au n° 20 pour déterminer le nombre des points de la courbe $F(x,y)=0$ par lesquels on doit faire passer une courbe adjointe du degré $m+q+r-3$, afin de la déterminer conduirait à un nombre trop élevé pour des courbes d'un ordre quelconque n. Les points communs aux deux courbes $F(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$ restent les mêmes si l'on remplace la seconde équation par $\Phi(x,y)+f(x,y)F(x,y)=0$, f étant un polynôme du degré $n-m$, dont les coefficients sont arbitraires. Mais les courbes considérées dont l'une est $\Phi(x,y)=0$, étant adjointes et passant par conséquent par $\frac{1}{2}(q+r)(q+r-1)$ points situés en dehors de la courbe $F(x,y)=0$, il faut que la courbe $f(x,y)=0$ passe aussi par ces points, et le nombre des paramètres de la fonction $f(x,y)$ ne suffira que si l'on a

$$(n-m+1)(n-m+2) \geqq (q+r)(q+r-1),$$

Digitized by Google

ou bien

$$(n-m-q-r+2)(n-m+q+r+1)\geqq 0.$$

Cette condition n'est pas remplie pour des courbes du degré $m+q+r-3$. Quand le degré n est égal à $m+q+r-2$, on peut ou non employer la fonction $f(x,y)$ sans changer le nombre des conditions. Le nombre des points de $F(x,y)=0$ par lesquels on doit faire passer une courbe adjointe du degré $m+q+r-2$ pour la déterminer est

$$\tfrac{1}{2}(m+q+r-2)(m+q+r+1)-A-\tfrac{1}{2}(q+r)(q+r-1)-(m-2)(q+r),$$

ou, en remplaçant A par sa valeur,

$$p+2q+2r+m-2.$$

Le nombre des points d'intersection avec la courbe $F(x,y)=0$, qui se trouvent ainsi déterminés par les autres, est

$$m(m+q+r-2)-2A-(m-2)(q+r)-(p+2q+2r+m-2)=p.$$

Supposons maintenant que l'on choisisse $q+r$ des $p+2q+2r+m-2$ points en dehors de la courbe $F(x,y)=0$; il est clair que $p+q+r$ points seront déterminés par les autres.

Le théorème d'Abel fournit pour la recherche de ces points $p+q+r$ équations dont les p premières coïncident avec les équations (1). Il n'en est pas de même des $q+r$ autres, à cause du logarithme ou de la fonction algébrique qu'introduit ce théorème. Mais ces quantités disparaîtront (n° 21), si l'on choisit les $q+r$ points que l'on doit prendre en dehors de la courbe $F(x,y)=0$, respectivement sur chacune des $q+r$ droites $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)})$, $(\zeta^{(k)})$. Donc la résolution des équations différentielles (1) revient au problème suivant : *Trouver les $p+q+r$ points d'intersection avec $F(x,y)=0$ d'une courbe adjointe du degré $m+q+r-2$ passant par $p+q+r+m-2$ points de $F(x,y)=0$ et par $q+r$ points situés respectivement sur chacune des droites $(\xi^{(k)}, \eta^{(k)}, \zeta^{(k)})$, en dehors de la courbe.*

FIN DU TOME ONZIÈME.

Digitized by Google

ANNALES SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUPPLÉMENT

AU

TOME XI — ANNÉE 1882

(DEUXIÈME SÉRIE).

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE

DES

FONCTIONS DE FOURIER

(PREMIÈRE ET DEUXIÈME ESPÈCE),

PAR M. NICOLAS,

INSPECTEUR D'ACADÉMIE.

INTRODUCTION.

1. Les fonctions qui font l'objet du présent travail trouvent leur application dans les calculs astronomiques et dans un grand nombre de problèmes de Physique mathématique. C'est Fourier qui le premier les a introduites dans l'Analyse et a fait connaître quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes. Peu de temps après, Bessel a été conduit aux mêmes fonctions dans ses recherches sur les perturbations planétaires; et c'est ce qui fait que les astronomes les ont appelées *fonctions de Bessel*. Cette dénomination, comme le fait observer M. Heine dans un Mémoire intitulé : *Les fonctions de Fourier et Bessel* (1), est contraire à l'usage. Personne ne désigne en effet sous le nom de *fonctions de Legendre* les intégrales eulériennes, qui, sans les découvertes de ce dernier, n'auraient pas eu l'importance qu'elles ont acquises dans ces derniers temps. Si une désignation spéciale est nécessaire, ajoute

(1) *Journal de Crelle*, t. 69.

Digitized by Google

M. Heine, on peut employer le nom de *fonctions cylindriques*, qui rappelle leur usage dans l'étude des phénomènes physiques; mais, comme il est juste de restituer à un savant français l'honneur qui lui revient légitimement, nous les appellerons plus volontiers *fonctions de Fourier*, tout en employant quelquefois la nouvelle dénomination proposée.

2. Depuis quelques années, les propriétés de ces fonctions ont été exposées dans plusieurs Mémoires, publiés principalement dans les Recueils étrangers, et en particulier dans le *Journal de Crelle* et dans les *Annales de Mathématiques* de MM. Clebsch et Neumann. Elles présentent de grandes analogies avec les fonctions circulaires, et paraissent jouer dans l'analyse un rôle assez important. Il n'est donc pas inutile d'exposer d'une manière simple et élémentaire les principales propriétés de ces fonctions; travail qui jusqu'à présent manque en France, bien que quelques auteurs, après Fourier et Poisson, les aient employées dans leurs recherches de Physique mathématique.

Parmi les auteurs étrangers, outre Bessel et Jacobi, je citerai : Hansen à Gotha; Anger à Dantzig; Schlömilch à Leipzig; Lipschitz à Bonn; Schläfli à Berne; Hanken à Erlangen, etc., qui ont étudié les propriétés des fonctions de Fourier et publié sur ce sujet des Mémoires plus ou moins étendus.

3. En outre, deux traités spéciaux sur cette matière ont été publiés à Leipzig, l'un par M. Neumann en 1867, et l'autre par M. Lommel en 1868. Ces ouvrages sont conçus suivant des plans différents. Dans le premier, l'auteur a surtout pour but de montrer comment une fonction continue quelconque peut être représentée par une série simple ou double procédant suivant les fonctions de Fourier, de la même manière qu'elle peut être exprimée par une série de sinus, cosinus ou exponentielles. En partant de la formule bien connue de Cauchy :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

il est conduit à employer, concurremment avec la fonction de Fourier qu'il désigne par J_n, une seconde fonction qu'il représente par O_n et

Digitized by Google

qu'il appelle *fonction de deuxième espèce*. Dans la première section de son ouvrage, il étudie les principales propriétés de ces deux fonctions; dans la seconde, il établit différents développements en séries et démontre leur convergence; la troisième section est consacrée à l'étude de l'équation différentielle sous la forme que lui a donnée Bessel (1), et la quatrième, à l'intégration de certaines équations différentielles partielles au moyen des fonctions considérées précédemment.

4. Le but principal de M. Lommel, au contraire, est d'étudier les fonctions de Fourier en elles-mêmes et d'exposer, non leur théorie complète (comme l'avoue l'auteur), mais de mettre en évidence leurs principales propriétés. Je dois signaler d'abord une différence notable entre son travail et celui de M. Neumann. On sait que la fonction de Fourier représente l'une quelconque des deux intégrales particulières de l'équation différentielle du second ordre,

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J = 0,$$

tant que le paramètre ν est fractionnaire. Mais, lorsque ce paramètre est entier, il y a lieu de faire une distinction entre les deux intégrales: celle qui, développée en série, conserve la même forme que dans le cas où le paramètre est fractionnaire, reste la fonction de première espèce; et l'autre, dont le développement présente une forme bien différente, est celle que M. Lommel considère comme la fonction de deuxième espèce. Elle diffère complètement de la fonction O_n, qui est un polynôme limité; nous la désignerons avec ces auteurs par Y_n.

Pour la fonction de première espèce, M. Lommel déduit les principales propriétés de l'intégrale définie

$$J_\nu = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\, d\omega$$

et les expose dans la première partie de son livre. Dans la deuxième, il étudie les fonctions de seconde espèce; et, dans la troisième, il fait

(1) *Untersuchung des Theils der planeterischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, Abhandlung der mathematische Classe der Berliner Akademie* (1824).

Digitized by Google

connaître les équations différentielles qui peuvent être intégrées à l'aide de ces fonctions, et parmi lesquelles on rencontre la célèbre équation de Riccati.

5. Dans le présent Mémoire, je me suis appliqué principalement à l'étude des différents modes de représentation des fonctions de Fourier. Les séries qui représentent la fonction de première espèce n'offrent aucune difficulté, et l'on en déduit sans peine les propriétés essentielles de cette fonction. Pour obtenir le développement en série de la fonction de deuxième espèce, j'emploie une méthode dont Euler a fait un fréquent usage (1). Cette forme de développement, que je croyais nouvelle, se trouve établie dans un Mémoire de M. Hankel (2), par une méthode toute différente. Dans cette expression, il y a deux parties distinctes, l'une représentée par $J_n \log x$, et l'autre que je désigne par P_n, et qui comprend un polynôme limité et une série infinie dont les termes ont pour coefficients la fonction Ψ de Gauss. Il est bon de remarquer en passant que la fonction O_n de M. Neumann se retrouve dans la première moitié du polynôme qui précède la série infinie dans P_n.

En introduisant la fonction exponentielle dans l'expression de la fonction de Fourier, j'établis de nouveaux développements en série suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable. De là je passe à la représentation par intégrales définies.

Après avoir rappelé les différentes formes que prennent ces intégrales, je montre comment le nouveau développement de la fonction de deuxième espèce peut se déduire d'une forme particulière que j'étudie plus spécialement et qui fournit une représentation simple de cette fonction.

En examinant en dernier lieu le cas où le paramètre est de la forme $\nu = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier, cas qui a été étudié par M. Lommel et qui correspond à l'équation qu'a intégrée M. Serret en appliquant la méthode des différentielles à indices quelconques (3), j'arrive

(1) EULER, *Calcul intégral*, t. II, chap. IV, p. 80 et suiv.; chap. VII, p. 155-156; chap. VIII, p. 192, 194.

(2) CLEBSCH et NEUMANN, *Mathematische Annalen*, t. I, année 1869, p. 467.

(3) *Journal de Liouville*, t. IX.

Digitized by Google

à quelques propriétés remarquables de la fonction exponentielle et les résultats que j'obtiens ainsi s'accordent avec ceux qu'a publiés M. Hermite dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (année 1873).

I.

PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES FONCTIONS DE FOURIER.

6. Si, dans l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J = 0, \tag{1}$$

où J représente la fonction, x la variable et ν un paramètre constant, on pose $J = x^p f$, il vient

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{1+2p}{x}\frac{df}{dx} + \left(1 + \frac{p^2-\nu^2}{x^2}\right)f = 0;$$

en déterminant p par la condition $p^2 - \nu^2 = 0$ ou $p = \pm\nu$, et désignant par I et H les fonctions correspondantes à $p = +\nu$ et $p = -\nu$, on a les deux systèmes

$$\begin{cases} J = x^{\nu} I, & \dfrac{d^2I}{dx^2} + \dfrac{1+2\nu}{x}\dfrac{dI}{dx} + I = 0, \\ J = x^{-\nu} H, & \dfrac{d^2H}{dx^2} + \dfrac{1-2\nu}{x}\dfrac{dH}{dx} + H = 0, \end{cases} \tag{2}$$

dont chacun peut remplacer l'équation (1).

Au lieu de cette équation (1), il y a quelquefois avantage à considérer la suivante :

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dF}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)F = 0, \tag{1 bis}$$

où F désigne la fonction, et qui ne diffère de (1) que par le signe de l'avant-dernier terme. On passe d'ailleurs de l'une à l'autre de ces

Digitized by Google

fonctions en remplaçant x^2 par $-x^2$ ou x par xi $(i=\sqrt{-1})$. En désignant par V et U les fonctions correspondantes à I et H, on a

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} F = x^{\nu} V, & \dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{1+2\nu}{x}\dfrac{dV}{dx} - V = 0, \\ F = x^{-\nu} U, & \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{1-2\nu}{x}\dfrac{dU}{dx} - U = 0. \end{cases}$$

On a fait subir différentes transformations à ces équations. Dans (1 *bis*) on peut faire disparaitre la dérivée première en employant la méthode de Sturm, c'est-à-dire en posant $F=\theta W$, θ et W étant deux nouvelles fonctions de x qu'on détermine en remplaçant F par cette valeur et annulant le terme en $\frac{dW}{dx}$, ce qui donne

$$(1\ ter)\qquad F = x^{-\frac{1}{2}} W, \quad \frac{d^2W}{dx^2} - \left(1 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) W = 0.$$

Une des formes les plus commodes pour l'étude des propriétés que nous avons à considérer est celle que l'on déduit de (2) et (2 *bis*) en changeant la variable indépendante, méthode employée par M. Kummer dans son Mémoire sur la série hypergéométrique (1).

Si l'on pose $x^2 = 4z$ et si l'on désigne par I_ν et H_ν les nouvelles fonctions de z, les équations (2) deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} z\dfrac{d^2I_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\dfrac{dI_\nu}{dz} + I_\nu = 0, \\ z\dfrac{d^2H_\nu}{dz^2} + (1-\nu)\dfrac{dH_\nu}{dz} + H_\nu = 0, \end{cases}$$

et les équations (2 *bis*) donnent, si l'on désigne par V_ν et U_ν les nouvelles fonctions,

$$(3\ bis)\qquad \begin{cases} z\dfrac{d^2V_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\dfrac{dV_\nu}{dz} - V_\nu = 0, \\ z\dfrac{d^2U_\nu}{dz^2} + (1-\nu)\dfrac{dU_\nu}{dz} - U_\nu = 0; \end{cases}$$

c'est la première des équations (3) qui a été considérée par Fourier (2).

(1) *Journal de Crelle*, t. 15.
(2) *Théorie analytique de la chaleur*, chap. VI, p. 236.

Digitized by Google

On passe des conditions (3) à (3 *bis*), ou réciproquement, en changeant z en $-z$.

7. En employant la méthode des coefficients indéterminés, on trouve facilement deux séries qui représentent les intégrales particulières de chacune des équations (3) ou (3 *bis*). Si l'on pose en effet

$$V_\nu = Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \ldots,$$

et qu'on substitue cette valeur dans la première des équations (3 *bis*), on obtient les deux intégrales

$$(4)\quad \begin{cases} V'_\nu = A_\nu \left[1 + \dfrac{z}{1(1+\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \ldots\right], \\ V''_\nu = A'_\nu z^{-\nu}\left[1 + \dfrac{z}{1(1-\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1-\nu)(2-\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} + \ldots\right]. \end{cases}$$

La seconde équation (3 *bis*) donne de la même manière

$$(5)\quad \begin{cases} U'_\nu = \mathfrak{A}_\nu z^\nu \left[1 + \dfrac{z}{1(1+\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \ldots\right], \\ U''_\nu = \mathfrak{A}'_\nu \left[1 + \dfrac{z}{1(1-\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1-\nu)(2-\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} + \ldots\right], \end{cases}$$

valeurs qu'on déduit d'ailleurs de (4), en changeant ν en $-\nu$.

De l'inspection des valeurs (4) et (5), il résulte qu'on a $U'_\nu = K'z^\nu V'_\nu$, $U''_\nu = K''z^\nu V''_\nu$, K' et K'' étant des constantes. C'est ce qu'on déduit également des équations différentielles, car si dans la deuxième équation (3 *bis*) on remplace U_ν par $Kz^\nu V_\nu$, on retombe sur la première; d'où l'on voit qu'en multipliant par z^ν une solution quelconque de l'équation différentielle en V_ν, on obtient une solution de l'équation en U_ν et réciproquement. Nous supposerons la constante égale à l'unité et nous poserons

$$(A)\qquad U_\nu = z^\nu V_\nu.$$

Si l'on suppose $\nu = 0$, les deux équations (3 *bis*) se ramènent à une seule, savoir

$$(6)\qquad z\frac{d^2V_0}{dz^2} + \frac{dV_0}{dz} - V_0 = 0;$$

Digitized by Google

et quand on remplace ν par un nombre entier n, elles deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} z\dfrac{d^2V_n}{dz^2}+(1+n)\dfrac{dV_n}{dz}-V_n=0, \\ z\dfrac{d^2U_n}{dz^2}+(1-n)\dfrac{dU_n}{dz}-U_n=0. \end{cases}$$

Si l'on donne à n successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., on a deux séries d'équations, les unes avec le paramètre positif, les autres avec le paramètre négatif. Deux équations qui ont le même paramètre en valeur absolue peuvent être substituées l'une à l'autre, c'est-à-dire que les intégrales de l'une se déduisent immédiatement de celles de l'autre, comme on vient de le voir. Il est bon de remarquer toutefois que, lorsque le paramètre est entier, les développements V''_ν et U''_ν ne sont plus applicables, parce qu'ils deviennent infinis; ils doivent être remplacés par des développements différents, et c'est, comme nous le verrons dans la suite, ce qui donne lieu à la fonction de deuxième espèce.

8. Reprenons la première intégrale de la première équation (3 *bis*), que nous désignerons par V_ν en supprimant l'accent

$$(8)\quad V_\nu=A_\nu\left[1+\frac{z}{1(1+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)}+\frac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}+\dots\right].$$

Sa dérivée est

$$\frac{dV_\nu}{dz}=\frac{A_\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{z}{1(2+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(2+\nu)(3+\nu)}+\dots\right];$$

d'autre part on a

$$V_{\nu+1}=A_{\nu+1}\left[1+\frac{z}{1(2+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(2+\nu)(3+\nu)}+\dots\right],$$

et l'on en déduit

$$(9)\qquad V_{\nu+1}=\frac{dV_\nu}{dz}$$

en posant $A_{\nu+1}=\dfrac{A_\nu}{1+\nu}$; si l'on établit ainsi entre les constantes arbitraires les relations

$$A_{\nu+1}=\frac{A_\nu}{1+\nu},\quad A_{\nu+2}=\frac{A_{\nu+1}}{2+\nu},\quad A_{\nu+3}=\frac{A_{\nu+2}}{3+\nu},\quad \dots$$

Digitized by Google

et en général

$$A_{\nu+n} = \frac{A_{\nu+n-1}}{n+\nu},$$

on en conclut

$$A_{\nu+n} = \frac{A_\nu}{(1+\nu)(2+\nu)\dots(n+\nu)} = \frac{A_\nu \Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+n)};$$

toutes les constantes dépendent ainsi de la première A_ν (ν étant plus petit que 1). Pour $\nu = 0$, on aura

$$A_n = \frac{A_0}{\Gamma(1+n)};$$

on peut prendre pour A_0 une valeur quelconque, et en faisant $A_0 = 1$ on a

$$(10)\qquad \begin{cases} V_n = \dfrac{1}{\Gamma(1+n)}\left[1 + \dfrac{z}{1(1+n)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \dots\right] \\ \quad = \displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(1+p)\,\Gamma(1+n+p)}. \end{cases}$$

Si l'on conserve le paramètre $\nu + n$, on a

$$V_{\nu+n} = \frac{A_\nu \Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+n)}\left[1 + \frac{z}{1(1+\nu+n)} + \frac{z^2}{1.2(1+\nu+n)(2+\nu+n)} + \dots\right],$$

et si l'on prend $A_\nu = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}$ et qu'on désigne $\nu + n$ par ν, il vient

$$(10\ bis)\qquad \begin{cases} V_\nu = \dfrac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \dfrac{z}{1(1+\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dots\right] \\ \quad = \displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(1+p)\,\Gamma(1+\nu+p)}. \end{cases}$$

9. La fonction V_ν est complètement définie par la formule (10 *bis*), et c'est sous cette forme que nous la considérerons pour démontrer ses principales propriétés.

THÉORÈME I. — *De la relation* (9) *on déduit*

$$V_{\nu+2} = \frac{dV_{\nu+1}}{dz} = \frac{d^2 V_\nu}{dz^2},$$

Digitized by Google

et, en général,

$$V_{\nu+p} = \frac{d^p V_\nu}{dz^p}, \tag{I}$$

p étant un nombre entier. C'est là une des propriétés fondamentales de la fonction de Fourier.

Remarque. — Si l'on différentie p fois la première équation (3 *bis*), on obtient

$$z\frac{d^{p+2}V_\nu}{dz^{p+2}} + (1+p+\nu)\frac{d^{p+1}V_\nu}{dz^{p+1}} - \frac{d^pV_\nu}{dz^p} = 0,$$

équation identique à

$$z\frac{d^2V_{\nu+p}}{dz^2} + (1+p+\nu)\frac{dV_{\nu+p}}{dz} - V_{\nu+p} = 0;$$

d'où l'on voit qu'on peut poser

$$V_{\nu+p} = A\frac{d^pV_\nu}{dz^p} \quad (A \text{ const.}),$$

et si l'on prend pour V_ν la fonction (10 *bis*), on retrouve la relation (I).

Corollaire I. — De la relation (9) on déduit encore

$$2V_\nu V_{\nu+1} = \frac{d(V_\nu)^2}{dz}, \quad nV_\nu^{n-1}V_{\nu+1} = \frac{d(V_\nu^n)}{dz}. \tag{11}$$

Corollaire II. — Toute fonction V_n dont le paramètre est entier se déduit de V_0 à l'aide de la relation

$$V_n = \frac{d^nV_0}{dz^n}. \tag{12}$$

Corollaire III. — Si le paramètre fractionnaire ν est > 1 et égal à $\nu_1 + p$, p entier et $\nu_1 < 1$, on a

$$V_\nu = V_{\nu_1+p} = \frac{d^pV_{\nu_1}}{dz^p}, \tag{13}$$

ce qui ramène V_ν à V_{ν_1}.

THÉORÈME II. — *Supposons $\nu > p$, nombre entier, et prenons la dérivée de l'expression*

$$z^\nu V_\nu = \frac{z^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{z}{1(1+\nu)} + \frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dots\right],$$

Digitized by Google

nous aurons

$$\frac{d(z^\nu V_\nu)}{dz} = \frac{\nu z^{\nu-1}}{\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{z}{1.\nu} + \frac{z^2}{1.2.\nu(1+\nu)} + \dots\right],$$

ce qui revient à

$$\frac{d(z^\nu V_\nu)}{dz} = z^{\nu-1} V_{\nu-1}. \tag{14}$$

De là on déduit

$$\frac{d^2(z^\nu V_\nu)}{dz^2} = \frac{d(z^{\nu-1} V_{\nu-1})}{dz} = z^{\nu-2} V_{\nu-2},$$

et en général

$$\frac{d^p(z^\nu V_\nu)}{dz^p} = z^{\nu-p} V_{\nu-p}. \tag{II}$$

Si l'on remplace ν par $\nu + p$, on peut écrire

$$\frac{d^p(z^{\nu+p} V_{\nu+p})}{dz^p} = z^\nu V_\nu. \tag{II *bis*}$$

Remarque. — Cette propriété se déduit encore facilement de la considération de l'équation différentielle en U_ν. Si l'on différentie p fois l'équation

$$z\frac{d^2 U_{\nu+p}}{dz^2} + (1-\nu-p)\frac{dU_{\nu+p}}{dz} - U_{\nu+p} = 0,$$

on obtient

$$z\frac{d^{p+2} U_{\nu+p}}{dz^{p+2}} + (1-\nu)\frac{d^{p+1} U_{\nu+p}}{dz^{p+1}} - \frac{d^p U_{\nu+p}}{dz^p} = 0,$$

équation qui ne diffère de (3 *bis*) que parce que $\frac{d^p U_{\nu+p}}{dz^p}$ y remplace U_ν; on a donc

$$U_\nu = A\frac{d^p U_{\nu+p}}{dz^p} \quad (A \text{ const.}),$$

et, en remplaçant U_ν et $U_{\nu+p}$ par les séries telles que nous les avons déterminées, on voit que $A = 1$, ce qui conduit à la relation (II *bis*).

Corollaire I. — En substituant dans cette relation la valeur de $V_{\nu+p}$, déduite de (I), on obtient

$$z^\nu V_\nu = \frac{d^p\left(z^{\nu+p}\frac{d^p V_\nu}{dz^p}\right)}{dz^p}; \tag{15}$$

Digitized by Google

en portant dans (I) la valeur de V_ν, déduite de (II *bis*), et en mettant $\nu - p$ à la place de ν, on a

$$V_\nu = \frac{d^p\left[z^{-\nu+p}\frac{d^p(z^\nu V_\nu)}{dz^p}\right]}{dz^p}. \tag{16}$$

Les relations (15) et (16) sont des équations différentielles de l'ordre $2p$, qui admettent comme intégrales particulières les fonctions V_ν.

Corollaire II. — De la relation (II) on déduit

$$\frac{d^n(z^n V_n)}{dz^n} = V_0,$$

par suite

$$\frac{d^{2n}(z^n V_n)}{dz^{2n}} = \frac{d^n V_0}{dz^n},$$

et, à cause de (12),

$$\frac{d^{2n}(z^n V_n)}{dz^{2n}} = V_n, \tag{17}$$

équation différentielle de l'ordre $2n$, qui admet V_n comme intégrale particulière.

Remarque. — Cette relation, qui revient à $\frac{d^{2n}U_n}{dz^{2n}} = V_n$, se déduit encore de la considération des équations différentielles (7), car, si l'on différentie $2n$ fois la seconde, on obtient

$$z\frac{d^{2n+2}U_n}{dz^{2n+2}} + (1+n)\frac{d^{2n+1}U_n}{dz^{2n+1}} - \frac{d^{2n}U_n}{dz^{2n}} = 0,$$

équation identique à la première, ce qui montre qu'on a

$$\frac{d^{2n}U_n}{dz^{2n}} = AV_n \quad (A \text{ const.}),$$

et du développement en série de V_n et U_n il résulte que $A = 1$.

THÉORÈME III. — *Entre trois fonctions consécutives* V_ν, $V_{\nu+1}$ *et* $V_{\nu+2}$, *on a la relation linéaire*

$$zV_{\nu+2} + (1+\nu)V_{\nu+1} - V_\nu = 0. \tag{III}$$

Digitized by Google

On l'obtient en portant dans la première équation (3 *bis*) les valeurs de $\frac{dV_\nu}{dz}$ et $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$ déduites de (I).

On voit, par ce qui précède, que la fonction V_ν (10 *bis*) satisfait à la première équation différentielle (3 *bis*) et aux relations (I), (II), (III), et que deux de ces relations sont des conséquences des deux autres. Nous appellerons *fonction de Fourier* ou *fonction cylindrique* toute fonction satisfaisant à deux des quatre relations précitées.

10. Si à la première des équations différentielles (2 *bis*) on applique la méthode des coefficients indéterminés, on obtient

$$(18)\quad \begin{cases} V'_\nu(x) = A_\nu\left[1 + \frac{x^2}{2.(2+2\nu)} + \frac{x^4}{2.4(2+2\nu)(4+2\nu)} + \frac{x^6}{2.4.6(2+2\nu)(4+2\nu)(6+2\nu)} + \dots\right], \\ V''_\nu(x) = A_{-\nu}x^{-2\nu}\left[1 + \frac{x^2}{2.(2-2\nu)} + \frac{x^4}{2.4(2-2\nu)(4-2\nu)} + \frac{x^6}{2.4.6(2-2\nu)(4-2\nu)(6-2\nu)} + \dots\right], \end{cases}$$

intégrales analogues aux séries (4). En supprimant l'accent de V'_ν et posant $A_\nu = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$, nous avons

$$(19)\quad V_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{x^2}{2(2+2\nu)} + \frac{x^4}{2.4(2+2\nu)(4+2\nu)} + \dots\right];$$

telle est la forme sous laquelle se présente, dans ce cas, la fonction de Fourier, et l'on en déduit sans peine les relations

$$(20)\qquad V_{\nu+1} = \frac{1}{x}\frac{dV_\nu}{dx},$$

$$(21)\qquad x^{2\nu}V_\nu = \frac{1}{x}\frac{d(x^{2\nu+2}V_{\nu+2})}{dx},$$

formules correspondantes à celles qu'on déduit de (I) et (II *bis*) en faisant $p = 1$ et substituant x à la variable z. En remplaçant dans la première équation différentielle (2 *bis*) $\frac{dV_\nu}{dx}$ et $\frac{d^2V_\nu}{dx^2}$ par leurs valeurs en fonction de $V_{\nu+1}(x)$ et $V_{\nu+2}(x)$, on obtient la formule correspondante à (III), savoir :

$$(22)\qquad x^2V_{\nu+2}(x) + 2(\nu+1)V_{\nu+1}(x) - V_\nu(x) = 0.$$

Remarquons que, si les équations différentielles (3 *bis*) se déduisent

Digitized by Google

de (2 *bis*), et les séries (18) des séries (4), par le changement de la variable x en z, la série $V_\nu(x)$ (19) n'est pas exactement ce que devient $V_\nu(z)$ quand on remplace z par $\frac{x^2}{4}$; elle en diffère par le facteur $\frac{1}{2^\nu}$. Cela tient à la condition qu'impose aux constantes la relation (20).

11. La fonction $F(x) = x^\nu V_\nu(x)$, qui est une intégrale de (1 *bis*), satisfait à des relations analogues, qu'on obtient en remplaçant $V_\nu(x)$ par $x^{-\nu}F_\nu(x)$ dans (20), (21) et (22), ce qui donne

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \frac{\nu}{x} F_\nu + F_{\nu+1}, \tag{23}$$

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\frac{\nu}{x} F_\nu + F_{\nu-1}, \tag{24}$$

$$F_{\nu+2} + \frac{2(\nu+1)}{x} F_{\nu+1} - F_\nu = 0. \tag{25}$$

Si l'on combine par addition et soustraction les relations (23) et (24), on obtient

$$2\frac{dF_\nu}{dx} = F_{\nu-1} + F_{\nu+1}, \tag{26}$$

$$\frac{2\nu}{x} F_\nu = F_{\nu-1} - F_{\nu+1}; \tag{27}$$

cette dernière relation ne diffère de (25) que parce que ν y est remplacé par $\nu - 1$, et si l'on multiplie membre à membre (26) et (27), il vient

$$\frac{2\nu}{x}\frac{d(F_\nu)^2}{dx} = F_{\nu-1}^2 - F_{\nu+1}^2.$$

Les relations correspondantes pour $W_\nu = x^{\nu+\frac{1}{2}} V_\nu$, qui est l'intégrale de (1 *ter*), sont

$$\frac{dW_\nu}{dx} = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{x} W_\nu + W_{\nu+1}, \tag{23 bis}$$

$$\frac{dW_\nu}{dx} = -\frac{\nu-\frac{1}{2}}{x} W_\nu + W_{\nu-1}, \tag{24 bis}$$

$$2\frac{dW_\nu}{dx} - \frac{W_\nu}{x} = W_{\nu-1} + W_{\nu+1}. \tag{26 bis}$$

Digitized by Google

Quant à la relation qu'on peut déduire de (25) ou de (27), elle ne diffère de ces dernières que parce que F y est remplacée par W.

Remarque I. — Pour la fonction $I_\nu(x)$, qui satisfait à la première des équations (2), on a

$$(29)\quad I_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2\nu+2)}+\frac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\frac{x^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\dots\right],$$

et par suite il vient

$$(30)\quad J_\nu(x)=\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2\nu+2)}+\frac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\frac{x^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\dots\right].$$

C'est cette dernière série qui représente plus spécialement la fonction de Bessel.

Les formules (20), (21) et (22) deviennent alors

$$(30)\qquad I_{\nu+1}=-\frac{1}{x}\frac{dI_\nu}{dx},$$

$$(31)\qquad x^{2\nu}I_\nu=\frac{1}{x}\frac{d(x^{2\nu+2}I_{\nu+1})}{dx},$$

$$(32)\qquad x^2I_{\nu+2}-2(\nu+1)I_{\nu+1}+I_\nu=0;$$

et l'on en déduit pour la fonction J_ν

$$(33)\qquad \frac{dJ_\nu}{dx}=\frac{\nu}{x}J_\nu-J_{\nu+1},$$

$$(34)\qquad \frac{dJ_\nu}{dx}=-\frac{\nu}{x}J_\nu+J_{\nu-1},$$

$$(35)\qquad 2\frac{dJ_\nu}{dx}=J_{\nu-1}-J_{\nu+1},$$

$$(36)\qquad \frac{2\nu}{x}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}.$$

Si l'on pose $J_\nu=x^{-\frac{1}{2}}W'_\nu$, W'_ν étant la fonction qui correspond dans ce cas à l'équation de Sturm, on a

$$(37)\qquad \frac{dW'_\nu}{dx}=\frac{\nu+\frac{1}{2}}{x}W'_\nu-W'_{\nu+1},$$

$$(38)\qquad \frac{dW'_\nu}{dx}=-\frac{\nu-\frac{1}{2}}{x}W'_\nu+W'_{\nu-1}.$$

Digitized by Google

Remarque II. — De la relation (III) on déduit facilement deux fractions continues, qui représentent les quotients $\frac{V_{\nu+1}}{V_\nu}$ et $\frac{V_{\nu+2}}{V_\nu}$, et qui permettent de calculer $V_{\nu+1}$ et $V_{\nu+2}$ quand on connaît V_ν.

12. *De la fonction* O_n *de M. Neumann.* — La fonction que M. Neumann désigne par O_n, et qu'il appelle *fonction de deuxième espèce*, satisfait à l'une ou l'autre des deux équations

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2O_n(y)}{dy^2}+\dfrac{3}{y}\dfrac{dO_n(y)}{dy}+\left(1-\dfrac{n^2-1}{y^2}\right)O_n(y)=\dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{d^2O_n(y)}{dy^2}+\dfrac{3}{y}\dfrac{dO_n(y)}{dy}+\left(1-\dfrac{n^2-1}{y^2}\right)O_n(y)=\dfrac{n}{y^2}, \end{cases}$$

suivant que n est pair ou impair.

Si l'on pose $O_n(y)=y^{-n-1}\Omega_n(y)$, ces deux équations deviennent

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\Omega_n(y)}{dy^2}+\dfrac{1-2n}{y}\dfrac{d\Omega_n(y)}{dy}+\Omega_n=y^n, \\ \dfrac{d^2\Omega_n(y)}{dy^2}+\dfrac{1-2n}{y}\dfrac{d\Omega_n(y)}{dy}+\Omega_n=ny^{n-1}, \end{cases}$$

et, en faisant respectivement

$$\Omega_n=A+By^2+Cy^4+\ldots+Ky^{n-4}+Ly^{n-2}+My^n,$$
$$\Omega_n=A_1+B_1y^2+C_1y^4+\ldots+K_1y^{n-3}+L_1y^{n-1},$$

on obtient

$$(41)\quad \begin{cases} \Omega_n=2^{n-1}\Gamma(n+1)\left[1+\dfrac{y^2}{2(2n-2)}+\dfrac{y^4}{2.4(2n-2)(2n-4)}+\ldots+\dfrac{y^n}{2.4\ldots n(2n-2)(2n-4)\ldots n}\right] & (n \text{ pair}). \\ \Omega_n=2^{n-1}\Gamma(n+1)\left[1+\dfrac{y^2}{2(2n-2)}+\dfrac{y^4}{2.4(2n-2)(2n-4)}+\ldots+\dfrac{y^{n-1}}{2.4\ldots(n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}\right] & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

En prenant pour variable $z=\frac{y^2}{4}$ on transforme les équations (40) en

$$(42)\quad \begin{cases} z\dfrac{d^2\Omega_n(z)}{dz^2}+(1-n)\dfrac{d\Omega_n}{dz}+\Omega_n(z)=2^n z^{\frac{n}{2}} & (n \text{ pair}), \\ z\dfrac{d^2\Omega_n(z)}{dz^2}+(1-n)\dfrac{d\Omega_n}{dz}+\Omega_n(z)=n.2^{n-1}z^{\frac{n-1}{2}} & (n \text{ impair}); \end{cases}$$

et, si dans le premier cas on a $n=2p$, et dans le second $n=2p+1$,

Digitized by Google

ces équations se ramèneront à la forme unique

$$z\frac{d^2\Omega_n(z)}{dz^2}+(1-n)\frac{d\Omega_n}{dz}+\Omega_n(z)=Kz^k, \tag{43}$$

où la constante K désignera soit 2^n, soit $n.2^{n-1}$; cette équation admet pour intégrale

$$\Omega_n(z)=2^{n-1}1.2.3\ldots n\left[1+\frac{z}{1(n-1)}+\frac{z^2}{1.2(n-1)(n-2)}+\ldots+\frac{z^k}{1.2\ldots k(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\right] \tag{44}$$

avec la condition $k=\frac{n}{2}$ ou $k=\frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair.

13. *Propriétés de la fonction* $\Omega_n(z)$. — La fonction $\Omega_n(z)$ jouit de propriétés analogues à celles que nous avons établies pour la fonction de première espèce. Faisons successivement $n=2p-1$, $n=2p$, $n=2p+1$; les équations (42) donneront

$$\begin{cases}(a)\ z\dfrac{d^2\Omega_{2p-1}(z)}{dz^2}+(2-2p)\dfrac{d\Omega_{2p-1}(z)}{dz}+\Omega_{2p-1}(z)=(2p-1)2^{2p-2}z^{p-1},\\ (b)\ z\dfrac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2}+(1-2p)\dfrac{d\Omega_{2p}(z)}{dz}+\Omega_{2p}(z)=2^{2p}z^p,\\ (c)\ z\dfrac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2}-2p\dfrac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz}+\Omega_{2p+1}(z)=(2p+1)2^{2p}z^p,\end{cases} \tag{45}$$

et de la formule (44) on déduira

$$\begin{cases}(a)\ \Omega_{2p-1}(z)=2^{2p-2}1.2.3\ldots(2p-1)\left[1+\dfrac{z}{1(2p-2)}+\dfrac{z^2}{1.2(2p-2)(2p-3)}+\ldots+\dfrac{z^{p-1}}{1.2.3\ldots(p-1)(2p-2)\ldots p}\right],\\ (b)\ \Omega_{2p}(z)=2^{2p-1}1.2.3\ldots(2p)\left[1+\dfrac{z}{1(2p-1)}+\dfrac{z^2}{1.2(2p-1)(2p-2)}+\ldots+\dfrac{z^p}{1.2\ldots p(2p-1)\ldots p}\right],\\ (c)\ \Omega_{2p+1}(z)=2^{2p}1.2.3\ldots(2p+1)\left[1+\dfrac{z}{1.2p}+\dfrac{z^2}{1.2.2p(2p-1)}+\ldots+\dfrac{z^p}{1.2\ldots p.2p(2p-1)\ldots(p+1)}\right];\end{cases} \tag{46}$$

Digitized by Google

En prenant les dérivées des deux dernières expressions on obtient

$$(47)\quad \begin{cases} (a).\ \dfrac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = 2^{2p-1}\dfrac{1.2.3\ldots 2p}{2p-1}\left[1+\dfrac{z}{1(2p-2)}+\dfrac{z^2}{1.2(2p-2)(2p-3)}+\ldots\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)(2p-2)\ldots p}\right], \\ (b)\ \ \dfrac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = 2^{2p}\dfrac{1.2.3\ldots(2p+1)}{2p}\left[1+\dfrac{z}{1(2p-1)}+\dfrac{z^2}{1.2(2p-1)(2p-2)}+\ldots\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)(2p-1)\ldots(p+1)}\right], \end{cases}$$

et de la comparaison des formules (46 *a*) et (47 *a*) d'une part, et de celle des relations (46 *b*) et (47 *b*) de l'autre, on conclut

$$(48)\quad \begin{cases} (a) & \dfrac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = \dfrac{2.2p}{2p-1}\Omega_{2p-1}(z), \\ (b) & \dfrac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = \dfrac{2p+1}{p}[\Omega_{2p}(z) - 2^{2p}z^p], \end{cases}$$

formules qu'on peut mettre sous la forme unique

$$(48\ bis)\qquad \frac{d\Omega_n(z)}{dz} = \frac{2n}{n-1}\left[\Omega_{n-1}(z) - 2^{n-1}z^{\frac{n-1}{2}}\sin^2 n\frac{\pi}{2}\right].$$

Remarque. — On peut déduire ces relations de la considération des équations différentielles elles-mêmes. En effet, si l'on différentie l'équation (45 *b*), on obtient

$$z\frac{d^3\Omega_{2p}(z)}{dz^3} + (2-2p)\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} + \frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = 2^{2p}.pz^{p-1},$$

et si l'on remplace ici $\frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz}$ et ses deux dérivées premières par leurs valeurs déduites de (48 *a*) on retrouve l'équation (45 *a*). Ce qui prouve que $\frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = A\frac{2.2p}{2p-1}\Omega_{2p-1}$ (A const.).

De même, si dans l'équation

$$z\frac{d^3\Omega_{2p+1}(z)}{dz^3} + (1-2p)\frac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} + \frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = (2p+1)p.2^{2p}z^{p-1},$$

qu'on obtient en différentiant (45 *c*), on substitue les valeurs de

Digitized by Google

$\frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz}$ et de ses deux premières dérivées déduites de (48 *b*), on retombe sur l'équation (45 *b*). D'où l'on voit que.

$$\frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = A' \times \frac{2p+1}{p}[\Omega_{2p}(z) - 2^{2p} z^p] \quad (A' \text{ const.}).$$

14. Des relations (48 *a*) et (48 *b*), combinées avec (45 *b*) et (45 *c*), on déduit facilement les relations qui doivent exister entre trois fonctions consécutives. En effet, la relation (48 *a*) donne

$$\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} = \frac{2.2p}{2p-1}\frac{d\Omega_{2p-1}(z)}{dz};$$

et si dans (48 *b*) on remplace p par $p-1$, il vient

$$\frac{d\Omega_{2p-1}(z)}{dz} = \frac{2p-1}{p-1}[\Omega_{2p-2}(z) - 2^{2p-2} z^{p-1}];$$

par suite on a

$$\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} = \frac{4p}{p-1}[\Omega_{2p-2}(z) - 2^{2p-2} z^{p-1}],$$

et en portant dans (45 *b*) les valeurs de $\frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz}$ et $\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2}$ on obtient

$$(49) \quad 4pz\,\Omega_{2p-2}(z) - 4p(p-1)\,\Omega_{2p-1}(z) + (p-1)\,\Omega_{2p}(z) = 2^{2p}(2p-1)z^p.$$

On a ainsi une relation entre trois fonctions Ω consécutives dont l'intermédiaire Ω_{2p-1} est d'indice impair. Si l'on pose $2p-1=n$, cette relation revient à

$$(49\ bis) \quad 4z(n+1)\,\Omega_{n-1}(z) + (n-1)\,\Omega_{n+1}(z) - 2(n^2-1)\,\Omega_n(z) = n\,2^{n+1} z^{\frac{n+1}{2}}.$$

La relation (48 *b*) donne d'un autre côté

$$\frac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} = \frac{2p+1}{p}\left[\frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} - 2^{2p}.pz^{p-1}\right],$$

et, en remplaçant ici $\frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz}$ par sa valeur déduite de (48 *a*), on a

$$\frac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} = \frac{4(2p+1)}{2p-1}\Omega_{2p-1}(z) - (2p+1)2^{2p} z^{p-1}.$$

Digitized by Google

En portant les valeurs de $\frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz}$ et $\frac{d^2\Omega_{2p+1}}{dz^2}$ dans (45 c), on obtient

$$(50)\quad 4z(2p+1)\Omega_{2p-1}(z) - 2(2p+1)(2p-1)\Omega_{2p}(z) + (2p-1)\Omega_{2p+1}(z) = 0;$$

dans cette relation la fonction intermédiaire est d'indice pair $2p$, et si l'on fait $2p = n$, elle revient à

$$(50\ bis)\quad 4z(n+1)\Omega_{n-1}(z) + (n-1)\Omega_{n+1}(z) - 2(n^2-1)\Omega_n(z) = 0.$$

Les deux relations (49 *bis*) et (50 *bis*) peuvent être comprises dans une seule, savoir

$$(51)\quad 4z(n+1)\Omega_{n-1}(z) + (n-1)\Omega_{n+1}(z) - 2(n^2-1)\Omega_n(z) = n2^{n+2}z^{\frac{n+1}{2}}\sin^2 n\frac{\pi}{2}.$$

Si, au lieu de $O_n(y) = y^{-n-1}\Omega_n(y)$, on pose $O_n(y) = y^{n-1}\Omega'_n(y)$, puis $\frac{y^2}{4} = z$, on trouve pour $\Omega'_n(z)$ des relations analogues à (48 *bis*) et (51).

Dans sa *Théorie des Fonctions besséliennes*, M. Neumann avoue (page 22) qu'il n'a pas réussi à établir pour la fonction O les dernières relations que nous venons de démontrer pour la fonction Ω. Mais on retrouve la formule analogue à (51) dans un Mémoire que M. Schläfli a publié dans le 3e Volume des *Mathematische Annalen* de Clebsch et Neumann (page 137).

II.

DE LA FONCTION DE DEUXIÈME ESPÈCE.

---

15. Lorsque le paramètre est un nombre entier positif n, la série qui entre dans V''_n et U''_n devient infinie à partir d'un certain terme, et ne peut servir à représenter la seconde intégrale particulière. Pour obtenir cette intégrale nous employons une méthode indiquée par Euler (1).

---

(1) *Calcul intégral*, 2e édit., t. II, chap. IV, p. 80 et suiv.

Digitized by Google

Nous posons

$$(1)\qquad \begin{cases} Q_n = A\left[1 + \dfrac{z}{1(1+n)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \dots\right], \\ Q'_n = Az^n\left[1 + \dfrac{z}{1(1+n)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \dots\right], \end{cases}$$

et, dans les équations (7) du § I, nous faisons

$$(2)\qquad \begin{cases} V_n = P_n + Q_n \log z, \\ U_n = P'_n + Q'_n \log z; \end{cases}$$

Q_n et Q'_n sont des intégrales particulières de ces équations, et, pour déterminer les nouvelles fonctions P_n et P'_n, nous avons les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} z\dfrac{d^2P_n}{dz^2} + (1+n)\dfrac{dP_n}{dz} - P_n + 2\dfrac{dQ_n}{dz} + n\dfrac{Q_n}{z} = 0, \\ z\dfrac{d^2P'_n}{dz^2} + (1-n)\dfrac{dP'_n}{dz} - P'_n + 2\dfrac{dQ'_n}{dz} - n\dfrac{Q'_n}{z} = 0. \end{cases}$$

Nous commençons par évaluer P'_n, et pour cela nous posons

$$P'_n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \dots + \mathfrak{X}z^{n-3} + \mathfrak{L}z^{n-2} + \mathfrak{M}z^{n-1} + \mathfrak{N}z^n + \mathfrak{P}z^{n+1} + \mathfrak{Q}z^{n+2} + \dots.$$

En substituant cette valeur et celle de Q'_n dans la deuxième équation (3), et égalant à 0 les coefficients des diverses puissances de z, on détermine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ..., $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ... en fonction de la constante A. Un seul coefficient $\mathfrak{N}$ reste indéterminé et peut être considéré comme une constante arbitraire que nous désignerons par K.

On trouve ainsi

$$(4)\qquad \begin{cases} P'_n = 1.2\dots(n-1)(1-n)(2-n)\dots(-2)(-1)\,nA \\ \qquad \times\left[1 + \dfrac{z}{1(1-n)} + \dots + \dfrac{z^{n-1}}{1.2\dots(n-1)(1-n)\dots(-2)(-1)}\right] \\ \qquad + Kz^n\left[1 + \dfrac{z}{1(n+1)} + \dfrac{z^2}{1.2(n+1)(n+2)} + \dots\right] \\ \qquad - Az^n\left[\dfrac{z\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{1(n+1)} + \dfrac{z^2\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)} + \dots\right]; \end{cases}$$

Digitized by Google

et en portant cette valeur dans la deuxième équation (2), on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} U_n = {} & 1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)nA \\ & \times\left[1+\frac{z}{1(1-n)}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)}\right] \\ & +(K+A\log z)\,z^n\left[1+\frac{z}{1(n+1)}+\frac{z^2}{1.2(n+1)(n+2)}+\ldots\right] \\ & -Az^n\left[\frac{z\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{1(n+1)}+\frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)}+\ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

Comme $V_n = z^{-n}U_n$, on déduit de là

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V_n = {} & 1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)nA \\ & \times\left[z^{-n}+\frac{z^{-n+1}}{1(1-n)}+\ldots+\frac{z^{-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-1)}\right] \\ & +(K+A\log z)\left[1+\frac{z}{1(1+n)}+\frac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)}+\ldots\right] \\ & -A\left[\frac{z\left(1+\frac{1}{1+n}\right)}{1(1+n)}+\frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)}+\ldots\right]; \end{aligned}\right.$$

en conservant les constantes A et K on a l'intégrale générale, et en faisant $K = 0$ on a la fonction cylindrique de seconde espèce.

16. *De la fonction* P_n. — Observons que pour la constante A on a $A = \frac{1}{1.2.3\ldots n}$, et la fonction qui avec $Q_n(1)$ entre dans V_n est

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} P_n = {} & (1-n)(2-n)\ldots(-2)(-1) \\ & \times\left[z^{-n}+\frac{z^{-n+1}}{1(1-n)}+\ldots+\frac{z^{-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)(2-n)\ldots(-1)}\right] \\ & -\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[\frac{z\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{1(n+1)}+\frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)}+\ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

En s'appuyant sur la relation $V_{n+1} = \frac{dV_n}{dz}$, qui doit avoir lieu pour toute fonction de Fourier, on peut établir aisément une formule de récurrence, qui permet de passer de P_n à P_{n+1}. Prenons l'intégrale

Digitized by Google

sous la forme générale

$$V_n = P_n + \alpha_n Q_n + Q_n \log z \quad (\alpha_n \text{ const.}).$$

Pour un indice supérieur d'une unité nous aurons

$$V_{n+1} = P_{n+1} + \alpha_{n+1} Q_{n+1} + Q_{n+1} \log z;$$

comme on doit avoir $V_{n+1} = \frac{dV_n}{dz}$, et que $Q_{n+1} = \frac{dQ_n}{dz}$, nous en concluons

$$P_{n+1} + \alpha_{n+1} Q_{n+1} = \frac{dP_n}{dz} + \alpha_n \frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z};$$

par suite

$$P_{n+1} = \frac{dP_n}{dz} + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z}.$$

Reste à déterminer la différence $\alpha_n - \alpha_{n+1}$. De (7) on déduit

$$\frac{dP_n}{dz} = [1-(n+1)][2-(n+1)]\dots(-2)(-1) \times \left\{ z^{-n-1} + \frac{z^{-n}}{1[1-(n+1)]} + \frac{z^{-n+1}}{1.2[1-(n+1)][2-(n+1)]} + \dots + \frac{z^{-2}}{1.2\dots[(n+1)-2][2-(n+1)]\dots(-2)(-1)} \right\}$$

$$- \frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}{1(n+2)} + \frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)}{1.2(n+2)(n+3)} + \dots \right];$$

d'autre part on a

$$\frac{1}{n+1}\frac{dQ_n}{dz} = \frac{1}{1.2\dots n(n+1)} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{z}{1(n+1)(n+2)} + \frac{z^2}{1.2(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right],$$

$$\frac{Q_n}{z} = \frac{1}{1.2\dots n} \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{1(n+1)} + \frac{z}{1.2(n+1)(n+2)} + \frac{z^2}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right],$$

Digitized by Google

et, si l'on ajoute ces trois expressions, il vient

$$\frac{dP_n}{dz}+\frac{1}{n+1}\frac{dQ_n}{dz}+\frac{Q_n}{z}$$
$$=[1-(n+1)][2-(n+1)]\dots(-2)(-1)$$
$$\times\left\{z^{-n-1}+\frac{z^{-n}}{1.[1-(n+1)]}+\dots+\frac{z^{-1}}{1.2\dots[(n+1)-1][1-(n+1)]\dots(-1)}\right\}$$
$$-\frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)}\left[\frac{z\left(1+\frac{1}{n+2}\right)}{1(n+2)}+\frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)}{1.2(n+2)(n+3)}+\dots\right].$$

Cette dernière expression n'est autre que la valeur de P_{n+1}; on a donc

$$(8)\qquad P_{n+1}=\frac{dP_n}{dz}+\frac{1}{n+1}\frac{dQ_n}{dz}+\frac{Q_n}{z}.$$

Remarque. — On peut d'ailleurs démontrer, en s'appuyant sur l'équation différentielle, que la valeur de P_{n+1} se présente sous la forme générale

$$(a)\qquad P_{n+1}=\frac{dP_n}{dz}+\alpha\frac{dQ_n}{dz}+\frac{Q_n}{z}\quad(\alpha\text{ const.});$$

car, si l'on différentie par rapport à z la première équation (3), et si, d'un autre côté, on y remplace n par $n+1$, il vient

$$(b)\quad z\frac{d^3P_n}{dz^3}+(2+n)\frac{d^2P_n}{dz^2}-\frac{dP_n}{dz}+2\frac{d^2Q_n}{dz^2}+\frac{n}{z}\frac{dQ_n}{dz}-n\frac{Q_n}{z^2}=0,$$

$$(c)\quad z\frac{d^2P_{n+1}}{dz^2}+(2+n)\frac{dP_{n+1}}{dz}-P_{n-1}+2\frac{dQ_{n+1}}{dz}+\frac{n+1}{z}Q_{n+1}=0;$$

en substituant la valeur (a) dans (c) et observant que

$$Q_{n+1}=\frac{dQ_n}{dz}\quad\text{et}\quad\frac{dQ_{n-1}}{dz}=\frac{d^2Q_n}{dz^2},$$

on retrouve l'équation (b); ce qui montre que la valeur (a) satisfait à l'équation (c), quelle que soit la constante α. Par le développement en série, il est établi que cette constante est égale à $\frac{1}{n+1}$. Je ne sais si cette remarque a été faite jusqu'à présent.

Digitized by Google

17. En revenant à la constante α_n, on voit qu'on a

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{1}{n+1},$$

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_{n+h} = \alpha_{n+h-1} - \frac{1}{n+h};$$

d'où il suit

$$\alpha_{n+h} = \alpha_n - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+h}\right).$$

Si l'on fait $n = 0$, et si l'on remplace ensuite h par n, on obtient

$$\alpha_n = \alpha_0 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right); \tag{9}$$

α_0 reste arbitraire et l'on a pour V_n

$$V_n = P_n + \left[\alpha_0 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right] Q_n + Q_n \log z. \tag{10}$$

Remarquons que les valeurs de P_n et Q_n se déduisent de celles qui correspondent à l'indice 0, c'est-à-dire de P_0 et Q_0. On a en effet

$$Q_1 = \frac{dQ_0}{dz},$$

$$Q_2 = \frac{d^2 Q_0}{dz^2},$$

$$Q_3 = \frac{d^3 Q_0}{dz^3},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$P_1 = \frac{dP_0}{dz} + \frac{dQ_0}{dz} + \frac{Q_0}{z},$$

$$P_2 = \frac{d^2 P_0}{dz^2} + \frac{d(Q_0 z^{-1})}{dz} + \frac{dQ_0}{dz} z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{d^2 Q_0}{dz^2},$$

$$P_3 = \frac{d^3 P_0}{dz^3} + \frac{d^2(Q_0 z^{-1})}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{dQ_0}{dz} z^{-1}\right)}{dz} + \frac{d^2 Q_0}{dz^2} z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{d^3 Q_0}{dz^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

Digitized by Google

et en général

$$(11)\quad \begin{cases} Q_n = \dfrac{d^n Q_0}{dz^n}, \\ P_n = \dfrac{d^n P_0}{dz^n} + \dfrac{d^{n-1}(Q_0 z^{-1})}{dz^{n-1}} + \dfrac{d^{n-2}\left(\dfrac{dQ_0}{dz} z^{-1}\right)}{dz^{n-2}} + \dfrac{d^{n-3}\left(\dfrac{d^2 Q_0}{dz^2} z^{-1}\right)}{dz^{n-3}} \\ \qquad + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d^{n-2} Q_0}{dz^{n-2}} z^{-1}\right) + \dfrac{d^{n-1} Q_0}{dz^{n-1}} z^{-1} + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) \dfrac{d^n Q_0}{dz^n}. \end{cases}$$

Si dans P_n on développe les termes qui contiennent z^{-1} en facteur, on obtient

$$(12)\quad \begin{cases} P_n = \dfrac{d^n P_0}{dz^n} + \dfrac{n}{z}\dfrac{d^{n-1} Q_0}{dz^{n-1}} - \dfrac{n(n-1)}{2z^2}\dfrac{d^{n-2} Q_0}{dz^{n-2}} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3z^3}\dfrac{d^{n-3} Q_0}{dz^{n-3}} - \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{nz^n} Q_0 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) \dfrac{d^n Q_0}{dz^n}; \end{cases}$$

et, en remplaçant $\dfrac{dQ_0}{dz}$, $\dfrac{d^2 Q_0}{dz^2}$, ..., $\dfrac{d^n Q_0}{dz^n}$ par Q_1, Q_2, ..., Q_n, on a

$$(13)\quad \begin{cases} P_n = \dfrac{d^n P_0}{dz^n} + \dfrac{n}{z} Q_{n-1} - \dfrac{n(n-1)}{2z^2} Q_{n-2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3z^3} Q_{n-3} - \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{nz^n} Q_0 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right) Q_n, \end{cases}$$

valeur qui, substituée à P_n dans (10), donne

$$(14)\quad \begin{cases} V_n = \dfrac{d^n P_0}{dz^n} + \alpha_0 Q_n + \dfrac{n Q_{n-1}}{z} - \dfrac{n(n-1)}{2z^2} Q_{n-2} - \ldots \\ \qquad \pm \dfrac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{nz^n} Q_0 + Q_n \log z. \end{cases}$$

18. On arrive à la même valeur, abstraction faite du terme $\alpha_0 Q_n$, si l'on observe qu'on a

$$V_0 = P_0 + Q_0 \log z \quad (1),$$

$$V_n = \frac{d^n V_0}{dz^n} = \frac{d^n P_0}{dz^n} + \frac{d^n (Q_0 \log z)}{dz^n}.$$

---

(1) En prenant $V_0 = P_0 + Q_0 \log z$, on suppose la constante α_0 nulle; et comme cette valeur doit être portée dans V_n, (10) et (14), il s'ensuit que cette fonction est complètement déterminée.

Digitized by Google

Les valeurs de P_0 et Q_0, d'où se déduisent toutes les fonctions P_n et Q_n, sont celles qui satisfont à l'équation (6), § 1; on les déduit des formules (1) et (7) du présent paragraphe, en faisant $A = 1$ et $n = 0$, et l'on a

$$(15)\quad \begin{cases} Q_0 = 1 + \dfrac{z}{1.1} + \dfrac{z^2}{1.2.1.2} + \dfrac{z^3}{1.2.3.1.2.3} + \dots, \\ P_0 = -2\left[\dfrac{z}{1.1} + \dfrac{z^2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1.2.1.2} + \dfrac{z^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{1.2.3.1.2.3} + \dots\right]. \end{cases}$$

Dans le cas où $n = 1$, les équations à intégrer sont

$$(16)\quad \begin{cases} z\dfrac{d^2V_1}{dz^2} + 2\dfrac{dV_1}{dz} - V_1 = 0, \\ z\dfrac{d^2U_1}{dz^2} - U_1 = 0, \end{cases}$$

et l'on a alors

$$(17)\quad \begin{cases} Q_1 = 1 + \dfrac{z}{1.2} + \dfrac{z^2}{1.2.2.3} + \dfrac{z^3}{1.2.3.2.3.4} + \dots, \\ P_1 = \dfrac{1}{z} - \left[\dfrac{z\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1.2} + \dfrac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{1.2.2.3} + \dfrac{z^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}{1.2.3.2.3.4} + \dots\right]. \end{cases}$$

Si dans P_1 on effectue les calculs indiqués aux numérateurs, on trouve

$$P_1 = \frac{1}{z} - \left[\frac{3z}{1.2.2} + \frac{14z^2}{1.2.2.3.2.3} + \frac{70z^3}{1.2.3.2.3.4.2.3.4} + \frac{404z^4}{1.2.3.4.2.3.4.5.2.3.4.5} + \frac{2688z^5}{1.2.3.4.5.2.3.4.5.6.2.3.4.5.6} + \dots\right],$$

les nombres 3, 14, 70, 404, 2688, ... sont donnés par Euler (1).

19. Il est à peine nécessaire de faire observer que les séries employées jusqu'ici sont convergentes. D'abord la série Q_n ou Q_0 converge plus rapidement que celle qui représente le nombre e. La fonction P_n

(1) *Calcul intégral*, 2e édit., t. II, Chap. VII, p. 156.

Digitized by Google

se compose d'un polynôme limité et d'une série infinie dont le terme général est

$$T_p = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{z^p\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)}{1.2.3\ldots p(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

Si l'on pose

$$H_p = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

le rapport du terme suivant T_{p+1} à T_p est représenté par

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{z}{(p+1)(n+p+1)} \times \frac{\left(H_p+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{n+p+1}\right)}{H_p},$$

ou

$$(18) \qquad \frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{z}{(p+1)(n+p+1)}\left[1+\frac{1}{H_p}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{n+p+1}\right)\right].$$

A mesure que p augmente, l'expression entre crochets diminue et se rapproche de l'unité; le facteur $\frac{z}{(p+1)(n+p+1)}$ décroît jusqu'à devenir aussi petit qu'on voudra; donc, à partir d'un certain terme, si z conserve une valeur finie, ce rapport devient plus petit que l'unité, et, par suite, la série est convergente.

III.

AUTRES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

---

20. On peut donner une autre forme au développement des fonctions de Fourier en y introduisant comme facteur la fonction e^x.

Digitized by Google

En partant de la seconde équation différentielle (2 *bis*), § I,

$$(1) \qquad \frac{d^2U_\nu}{dx^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{dU_\nu}{dx} - U_\nu = 0,$$

où l'on sait que $U_\nu = x^\nu F_\nu$, et en posant

$$U_\nu = R e^{mx},$$

on obtient la nouvelle équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{1-2\nu}{x} + 2m\right)\frac{dR}{dx} + \left[m^2 + \frac{m(1-2\nu)}{x} - 1\right]R = 0.$$

Pour intégrer cette dernière équation, nous posons

$$R = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots,$$

et, en substituant dans (2), nous avons

$$\begin{aligned} &A\alpha(\alpha-2\nu)x^{\alpha-2} + Am(2\alpha-2\nu+1)x^{\alpha-1} + A(m^2-1)x^\alpha \\ &+ B\beta(\beta-2\nu)x^{\beta-2} + Bm(2\beta-2\nu+1)x^{\beta-1} + B(m^2-1)x^\beta \\ &+ C\gamma(\gamma-2\nu)x^{\gamma-2} + Cm(2\gamma-2\nu+1)x^{\gamma-1} + C(m^2-1)x^\gamma \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

On satisfait à cette équation en posant d'abord $m^2 - 1 = 0$, ce qui donne $m = \pm 1$, et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x. Il y a deux manières d'opérer pour chacune des deux valeurs de m.

1° En prenant $m = -1$ et posant

$$\alpha = 2\nu, \quad \beta = 2\nu+1, \quad \gamma = 2\nu+2, \quad \delta = 2\nu+3, \quad \ldots,$$

on a pour première intégrale

$$R_1 = A'_\nu x^{2\nu}\left[1 + \frac{2\nu+1}{1(2\nu+1)}x + \frac{(2\nu+1)(2\nu+3)}{1.2(2\nu+1)(2\nu+2)}x^2 + \frac{(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)}{1.2.3(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)}x^3 + \ldots\right].$$

2° Si avec $m = -1$ on fait

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 3, \quad \ldots,$$

Digitized by Google

on obtient pour deuxième intégrale

$$R_2 = A''_\nu\left[1+\frac{1-2\nu}{1(1-2\nu)}x+\frac{(1-2\nu)(3-2\nu)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}x^2+\frac{(1-2\nu)(3-2\nu)(5-2\nu)}{1.2.3(1-2\nu)(2-2\nu)(3-3\nu)}x^3+\ldots\right].$$

On a ainsi pour U_ν les deux valeurs

$$(3)\quad\begin{cases} U'_\nu = A'_\nu e^{-x}x^{2\nu}\left[1+\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)}2x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2+\ldots\right], \\ U''_\nu = A''_\nu e^{-x}\left[1+\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{1(1-2\nu)}2x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}(2x)^2+\ldots\right]. \end{cases}$$

Remarque. — Si au lieu de $m=-1$ nous posons $m=+1$, nous aurons

$$(4)\quad\begin{cases} U'''_\nu = A'''_\nu e^{+x}x^{2\nu}\left[1-\dfrac{\frac{1}{2}+\nu}{1(1+2\nu)}2x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2-\ldots\right], \\ U^{IV}_\nu = A^{IV}_\nu e^{x}\left[1-\dfrac{\frac{1}{2}-\nu}{1(1-2\nu)}2x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}(2x)^2-\ldots\right], \end{cases}$$

valeurs qui se déduisent des précédentes en changeant x en $-x$, et qui, par conséquent, ne donnent pas de nouvelles intégrales. On voit d'ailleurs que l'équation différentielle (1) ne change pas quand on y remplace x par $-x$.

De là découle une conséquence remarquable. En prenant $A'_\nu = A'''_\nu$, on a $U'_\nu = U'''_\nu$, ce qui donne

$$e^x\left[1-\frac{\frac{1}{2}+\nu}{1(1+2\nu)}2x+\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2-\ldots\right]=e^{-x}\left[1+\frac{\frac{1}{2}+\nu}{1(1+2\nu)}2x+\ldots\right],$$

c'est-à-dire que, si l'on effectue les produits indiqués dans les deux membres, on doit trouver de chaque côté une expression de la forme $1+Ax^2+Bx^4+\ldots$, où les termes de degré impair ont disparu. De là

Digitized by Google

on déduit

$$(5)\qquad e^{2x}=\frac{1+\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)}2x+\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2+\dots}{1-\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)}2x+\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2-\dots};$$

et on a ainsi la valeur de la fonction exponentielle sous la forme d'un rapport de deux séries infinies contenant un paramètre arbitraire ν.

L'égalité $U'_\nu = U''_\nu$ donne pour e^{2x} une expression qui ne diffère de la précédente que par le signe de ν.

Pour que les fonctions ainsi obtenues représentent exactement des fonctions cylindriques, il faut qu'elles satisfassent à une seconde condition. Or, de la première formule (3) on déduit, en supprimant l'accent,

$$V_\nu = U_\nu x^{-2\nu} = A_\nu e^{-x}\left[1+\frac{1+2\nu}{1(1+2\nu)}x+\frac{(1+2\nu)(3+2\nu)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}x^2+\dots\right],$$

et de là

$$\frac{1}{x}\frac{dV_\nu}{dx}=\frac{A_\nu}{2\nu+2}e^{-x}\left[1+\frac{1(3+2\nu)}{3+2\nu}x+\frac{(3+2\nu)(5+2\nu)}{1.2(3+2\nu)(4+2\nu)}x^2+\dots\right];$$

d'où l'on voit que, pour que la relation

$$V_{\nu+1}=\frac{1}{x}\frac{dV_\nu}{dx}$$

soit satisfaite, il faut qu'on ait

$$A_{\nu+1}=\frac{A_\nu}{2(\nu+1)},$$

relation identique à celle qui a été établie précédemment. Pour un paramètre entier n, on a

$$A_{n+1}=\frac{A_n}{2(n+1)},$$

et on en conclut

$$A_n=\frac{A_0}{2^n\,\Gamma(1+n)}.$$

Digitized by Google

21. Nous avons déjà observé que, pour passer des équations (2 *bis*), § I, aux équations (2), § I, il suffit de remplacer x par xi. Si nous faisons cette substitution dans les expressions (3), nous aurons les intégrales particulières de la seconde équation (2), § I, que nous désignerons par H_1 et H_2. En séparant dans la parenthèse la partie réelle de la partie imaginaire, nous avons

$$(6)\quad \begin{cases} H_1 = A_1 e^{-ix} x^{2\nu} \left\{ 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2 + \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\left(\frac{5}{2}+\nu\right)\left(\frac{7}{2}+\nu\right)}{1.2.3.4(1+2\nu)(2+2\nu)(3+2\nu)(4+2\nu)}(2x)^4 - \ldots \right. \\ \qquad \left. + i\left[\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)} 2x - \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\left(\frac{5}{2}+\nu\right)}{1.2.3(1+2\nu)(2+2\nu)(3+2\nu)}(2x)^3 + \ldots \right] \right\}, \\ H_2 = A_2 e^{-ix} \left\{ 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}(2x)^2 + \dfrac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left(\frac{5}{2}-\nu\right)\left(\frac{7}{2}-\nu\right)}{1.2.3.4(1-2\nu)(2-2\nu)(3-2\nu)(4-2\nu)}(2x)^4 - \ldots \right. \\ \qquad \left. + i\left[\dfrac{\frac{1}{2}-\nu}{1(1-2\nu)}(2x) - \dfrac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left(\frac{5}{2}-\nu\right)}{1.2.3(1-2\nu)(2-2\nu)(3-2\nu)}(2x)^3 + \ldots \right] \right\}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par M et N les séries qui entrent dans H_1, il vient

$$H_1 = A_1 x^{2\nu} e^{-ix}(M + iN) = A_1 x^{2\nu}[M\cos x + N\sin x + i(N\cos x - M\sin x)];$$

et, en changeant i en $-i$, on a

$$H_1' = A_1 x^{2\nu} e^{ix}(M - iN) = A_1 x^{2\nu}[M\cos x + N\sin x - i(N\cos x - M\sin x)].$$

Comme ces deux valeurs H_1 et H_1' doivent être identiques et réelles, on en conclut

$$(7)\qquad N\cos x - M\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} x = \frac{N}{M};$$

on a ainsi

$$(8)\qquad H_1 = A_1 x^{2\nu}(M\cos x + N\sin x),$$

ou, en remplaçant N par sa valeur déduite de (7),

$$(8\ bis)\qquad H_1 = A_1 x^{2\nu}\frac{M}{\cos x}.$$

Il faut remarquer, en passant, que la formule (7) donne la valeur de

Digitized by Google

tang x sous forme du rapport de deux séries infinies, de la même manière que la formule (5) exprime e^{2x}.

Remarquons encore que, d'après (8 *bis*), la série M doit s'annuler pour les valeurs $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, quelle que soit la valeur du paramètre ν; sans cela la valeur de H_1 deviendrait infinie pour chacune de ces valeurs de la variable, ce qui ne saurait être. Ces résultats s'accordent avec ceux que Kummer a obtenus par une méthode bien différente dans son Mémoire sur la série hypergéométrique (1).

Si dans (8) on remplace M par sa valeur déduite de (7), on trouve

$$(8\ ter) \qquad H_1 = A_1 x^{2\nu} \frac{N}{\sin x},$$

et l'on voit par là que N doit s'annuler comme $\sin x$ pour les valeurs $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. En multipliant les formules (8 *bis*) et (8 *ter*) respectivement par $\cos x$ et $\sin x$, et les ajoutant après les avoir élevées au carré, on obtient

$$(9) \qquad H_1^2 = A_1^2 x^{4\nu}(M^2 + N^2), \quad \text{d'où} \quad H_1 = A_1 x^{2\nu}\sqrt{M^2 + N^2}.$$

En représentant par M′ et N′ les séries qui entrent dans H_2 (6), et qui ne diffèrent de M et N que par le signe de ν, on déduit de cette seconde intégrale des conséquences analogues à celles que nous venons d'indiquer.

Lorsque l'on a $\nu = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier, les fonctions M′ et N′ sont limitées, et la fonction H_2 représente la seconde intégrale sous forme finie. Nous reviendrons sur ce cas particulier.

22. Dans le cas où le paramètre est un nombre entier n, la fonction U_ν^n (3) devient infinie à partir d'un certain terme, et ne peut représenter la seconde intégrale. Pour trouver cette intégrale, nous appliquons encore la méthode d'Euler. Si dans l'équation (2) nous faisons $m = -1$ et $\nu = n$, elle devient

$$(10) \qquad \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{1-2n}{x} - 2\right)\frac{dR}{dx} - \frac{1-2n}{x} R = 0,$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 15, § 26 du Mémoire cité.

Digitized by Google

et si nous posons

$$R = P + R_1 \log x,$$

R_1 représentant la première intégrale de l'équation (10), savoir

$$R_1 = Ax^{2n}\left[1 + \frac{2n+1}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}x^3 + \ldots\right],$$

nous avons pour déterminer P l'équation

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \left(\frac{1-2n}{x} - 2\right)\frac{dP}{dx} - \frac{1-2n}{x}P + \frac{2}{x}\frac{dR_1}{dx} - \frac{2nR_1}{x^2} - \frac{2R_1}{x} = 0.$$

On obtient la valeur de P en employant encore la méthode des coefficients indéterminés et posant

$$P = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots + \mathfrak{L}x^{2n-2} + \mathfrak{M}x^{2n-1} + \mathfrak{N}x^{2n} + \mathfrak{P}x^{2n+1} + \mathfrak{Q}x^{2n+2} + \mathfrak{R}x^{2n+3} + \ldots;$$

On trouve ainsi

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} P = {} & 2An\,\frac{1.2.3\ldots(2n-1)(1-2n)(2-2n)\ldots(-2)(-1)}{(1-2n)(3-2n)(5-2n)\ldots[(4n-1)-2n]} \\ & \times\left\{1 + \frac{1-2n}{1(1-2n)}x + \frac{(1-2n)(3-2n)}{1.2(1-2n)(2-2n)}x^2 + \ldots + \frac{(1-2n)(3-2n)\ldots[(4n-3)-2n]}{1.2\ldots(2n-1)(1-2n)\ldots(-2)(-1)}x^{2n}\right\} \\ & + Ax^{2n}\left[\frac{(2n+1)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \ldots\right] \\ & - Ax^{2n}\left[\frac{(2n+1)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \ldots\right] \\ & + \mathfrak{N}x^{2n}\left[1 + \frac{2n+1}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

et la seconde valeur de U_n est alors

$$(12)\qquad U_n' = e^{-x}(P + R_1 \log x).$$

Il est facile de reconnaître que les séries (3) sont convergentes, car

Digitized by Google

le terme général, qui contient x^p, est

$$\frac{(1\pm 2\nu)(3\pm 2\nu)(5\pm 2\nu)\dots[(2p-1)\pm 2\nu]}{1.2.3\dots p(1\pm 2\nu)(2\pm 2\nu)\dots(p\pm 2\nu)}x^p;$$

le précédent est

$$\frac{(1\pm 2\nu)(3\pm 2\nu)(5\pm 2\nu)\dots[(2p-3)\pm 2\nu]}{1.2.3\dots(p-1)(1\pm 2\nu)(2\pm 2\nu)\dots[(p-1)\pm 2\nu]}x^{p-1},$$

et le rapport de ces deux termes, qui est

$$\frac{2p-1\pm 2\nu}{p(p\pm 2\nu)}x=\frac{2-\frac{1\mp 2\nu}{p}}{p\pm 2\nu}x,$$

diminue à mesure que p augmente, et a pour limite o, tant que x conserve une valeur finie.

Les deux dernières séries qui entrent dans P sont aussi convergentes. Le terme général de la première peut être mis sous la forme suivante

$$\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\dots[2n+(2p-1)]\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\dots+\frac{1}{n+\frac{2p-1}{2}}\right)}{1.2.3\dots p(2n+1)(2n+2)\dots(2n+p)}x^p;$$

le précédent est

$$\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\dots[2n+(2p-3)]\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\dots+\frac{1}{n+\frac{2p-3}{2}}\right)}{1.2.3\dots(p-1)(2n+1)(2n+2)\dots(2n+p-1)}x^{p-1},$$

et si l'on pose

$$\mathrm{K}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\dots+\frac{1}{n+\frac{2p-3}{2}},$$

le rapport de ces deux termes est représenté par

$$\frac{2n+2p-1}{p(2n+p)}\times\frac{\mathrm{K}+\frac{1}{n+\frac{2p-1}{2}}}{\mathrm{K}}x=\frac{2n+2p-1}{p(2n+p)}\left[1+\frac{1}{\mathrm{K}\left(n+\frac{2p-1}{2}\right)}\right]x.$$

Digitized by Google

A mesure que p augmente, l'expression entre crochets tend vers l'unité, et le premier facteur

$$\frac{2n+p+p-1}{p(2n+p)} = \frac{1+\dfrac{p-1}{2n+p}}{p} = \frac{1+\dfrac{1-\dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{2n}{p}}}{p}$$

diminue sans cesse et a pour limite o. Donc, à partir d'un terme assez éloigné, ce rapport devient plus petit que l'unité, et la série est convergente. On démontrerait de la même manière que la seconde l'est également.

23. Pour avoir la deuxième intégrale de la seconde équation (2), § I, lorsque le paramètre est un nombre entier et positif, il suffit de remplacer x par xi dans les valeurs de P et R, obtenues précédemment. Si avec $\pi = 0$ on pose

$$M_1 = 2n\,\frac{1.2\ldots(2n-1)(1-2n)\ldots(-2)(-1)}{(1-2n)(3-2n)\ldots[(4n-1)-2n]}\left[x^{-2n} - \frac{(1-2n)(3-2n)}{1.2(1-2n)(2-2n)}x^{2-2n}+\ldots\right],$$

$$N_1 = 2n\,\frac{1.2\ldots(2n-1)(1-2n)\ldots(-2)(-1)}{(1-2n)(3-2n)\ldots[(4n-1)-2n]} \times\left[\frac{1-2n}{1(1-2n)}x^{1-2n} - \frac{(1-2n)(3-2n)(5-2n)}{1.2.3(1-2n)(2-2n)(3-2n)}x^{3-2n}+\ldots\right],$$

$$M_2 = -\frac{(2n+1)(2n+3)}{1.2(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)x^2 + \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}{1.2.3.4(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\frac{1}{n+\frac{7}{2}}\right)x^4-\ldots,$$

$$N_2 = (2n+1)\,\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,x - \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \times\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}\right)x^3+\ldots;$$

Digitized by Google

$$M_3=\frac{(2n+1)(2n+3)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2-\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}{1.2.3.4(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}++\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}\right)x^4+\ldots,$$

$$N_3=-\frac{(2n+1)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{1(2n+1)}x+\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\right)x^3-\ldots,$$

$$M_4=1-\frac{(1+2n)(3+2n)}{1.2(1+2n)(2+2n)}x^2+\frac{(1+2n)(3+2n)(5+2n)(7+2n)}{1.2.3.4(1+2n)(2+2n)(3+2n)(4+2n)}x^4-\ldots,$$

$$N_4=\frac{1+2n}{1(1+2n)}x-\frac{(1+2n)(3+2n)(5+2n)}{1.2.3(1+2n)(2+2n)(3+2n)}x^3+\ldots;$$

les valeurs de P et R, peuvent être mises sous la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} P=x^{2n}[M_1+M_2+M_3+i(N_1+N_2+N_3)], \\ R_1=x^{2n}(M_4+iN_4); \end{cases}$$

de là on déduit pour la seconde intégrale cherchée

$$H_2=A_2x^{2n}e^{-ix}[M_1+M_2+M_3+M_4\log x+i(N_1+N_2+N_3+N_4\log x)],$$

expression que l'on ramène à la même forme que précédemment, en posant

$$M_1+M_2+M_3+M_4\log x=\mathfrak{M},$$
$$N_1+N_2+N_3+N_4\log x=\mathfrak{N}.$$

On a ainsi

$$(14)\qquad H_2=A_2x^{2n}e^{-ix}(\mathfrak{M}+i\mathfrak{N}),$$

et, en faisant disparaître les imaginaires,

$$(15)\qquad H_2=A_2x^{2n}(\mathfrak{M}\cos x+\mathfrak{N}\sin x),$$

avec la condition

$$(16)\qquad \mathfrak{M}\cos x-\mathfrak{N}\sin x=0.$$

Digitized by Google

IV.

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DE FOURIER PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

24. La forme donnée par Bessel à la fonction que nous étudions est la suivante :

$$(1) \qquad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon;$$

ν désigne ici le paramètre constant et x la variable indépendante. C'est lorsque le paramètre est un nombre entier que l'expression (1) représente la fonction de première espèce; et c'est ce cas particulier que Bessel a étudié. Nous considérons ici le cas où ν est un nombre fractionnaire quelconque. Pour démontrer les principales propriétés de cette fonction nous comparons $J_\nu(x)$ aux deux fonctions voisines $J_{\nu-1}(x)$ et $J_{\nu+1}(x)$. De la définition (1) on déduit

$$\frac{dJ_\nu(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,d\varepsilon,$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\cos\varepsilon\,d\varepsilon,$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,d\varepsilon,$$

et, par suite,

$$(A) \qquad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2\frac{dJ_\nu}{dx},$$

formule identique à (35), § I.

D'autre part, l'identité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\cos\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)[\nu - (\nu - x\cos\varepsilon)]\frac{d\varepsilon}{x}$$

Digitized by Google

donne

$$(B) \qquad J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)-\frac{\sin 2\nu\pi}{\pi x},$$

formule qui se confond avec (36), § I, lorsque ν est entier, et des relations (A) et (B) on déduit

$$(C) \qquad \frac{d^2J_{\nu}(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ_{\nu}(x)}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_{\nu}(x)+\frac{(\nu+x)\sin 2\nu\pi}{2\pi x^2}=0,$$

équation qui ne diffère que par son dernier terme de celle que nous avons étudiée jusqu'ici.

Si l'on pose

$$J_{\nu}(x)=x^{-\nu}H(x) \quad \text{et} \quad \frac{\sin 2\nu\pi}{2\pi}=N,$$

il vient

$$\frac{d^2H(x)}{dx^2}+\frac{1-2\nu}{x}\frac{dH(x)}{dx}+H(x)+N(\nu+x)x^{\nu-2}=0;$$

en faisant

$$H(x)=Ax^{\nu}+Bx^{\nu+1}+Cx^{\nu+2}+Dx^{\nu+3},$$

et, substituant dans l'équation différentielle, on a

$$[A\nu(-\nu)+N\nu]x^{\nu-2}+[B(1+\nu)(1-\nu)+N]x^{\nu-1}+[A+C(2+\nu)(2-\nu)]x^{\nu}$$
$$+[B+D(3+\nu)(3-\nu)]x^{\nu+1}+[C+E(4+\nu)(4-\nu)]x^{\nu+2}+\ldots=0;$$

en égalant ensuite à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on obtient

$$A=\frac{N}{\nu}, \quad B=\frac{N}{\nu^2-1}, \quad C=\frac{A}{\nu^2-2^2}=\frac{N}{\nu}\frac{1}{\nu^2-2^2},$$

$$D=\frac{B}{\nu^2-3^2}=\frac{N}{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)}, \quad E=\frac{C}{\nu^2-4^2}=\frac{N}{\nu}\times\frac{1}{(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)}, \quad \ldots,$$

et, par suite,

$$H(x)=\frac{Nx^{\nu}}{\nu}\left[1+\frac{x^2}{\nu^2-2^2}+\frac{x^4}{(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)}+\ldots\right]$$
$$+Nx^{\nu}\left[\frac{x}{\nu^2-1^2}+\frac{x^3}{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)}+\frac{x^5}{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)(\nu^2-5^2)}+\ldots\right],$$

Digitized by Google

d'où

$$(D)\quad \left\{ J_\nu(x) = \frac{\sin 2\nu\pi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\nu}\left[1 + \frac{x^2}{\nu^2-2^2} + \frac{x^4}{(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)} + \cdots \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{x}{\nu^2-1^2} + \frac{x^3}{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)} + \cdots \right]\right\},$$

résultat identique à celui qu'a obtenu M. Anger en développant directement la fonction (1).

Cette série (D), qui est applicable pour toute valeur fractionnaire de ν, comprend, comme cas particulier, le développement qu'on doit trouver quand le paramètre est un nombre entier n. Dans ce cas, $\sin 2n\pi = 0$, et tous les termes finis de la série multipliés par ce facteur disparaissent; mais, à partir du terme en x^n, les dénominateurs comprenant le facteur $\nu^2 - n^2$ s'annulent, et la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$.

Pour trouver sa vraie valeur, il y a deux cas à examiner, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair, le dénominateur du terme en x^n est

$$\nu(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)\ldots(\nu^2-n^2)$$
$$= (\nu-n)[\nu-(n-2)]\ldots(\nu-4)(\nu-2)\nu(\nu+2)\ldots(\nu+n),$$

et si l'on fait $\nu = n$, cette expression revient à

$$0.2.4.6\ldots(n-2)n(n+2)\ldots 2n = 0.1.2.3\ldots n.2^n.$$

Si n est impair, le dénominateur du terme en x^n est

$$(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)\ldots(\nu^2-n^2)$$
$$= (\nu-n)[\nu-(n-2)][\nu-(n-4)]\ldots(\nu-3)(\nu-1)(\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+n);$$

et pour $\nu = n$, cette expression revient à

$$0.2.4.6\ldots(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)\ldots 2n = 0.1.2.3\ldots n.2^n.$$

On voit par là qu'en supprimant le rapport $\frac{\sin 2n\pi}{(n-n)} = \frac{0}{0}$ on trouve, pour n entier, pair ou impair,

$$(E)\quad J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right];$$

Digitized by Google

et c'est la forme que prend la fonction de première espèce, lorsqu'on y conserve la variable x.

Lorsque le paramètre est purement imaginaire et représenté par νi, la formule (D) devient

$$J_{\nu i}(x) = \frac{e^{2\nu\pi} - e^{-2\nu\pi}}{4\nu\pi}\left[1 - \frac{x^2}{\nu^2+2^2} + \frac{x^4}{(\nu^2+2^2)(\nu^2+4^2)} - \frac{x^6}{(\nu^2+2^2)(\nu^2+4^2)(\nu^2+6^2)} + \ldots\right]$$
$$- i\frac{e^{2\nu\pi} - e^{-2\nu\pi}}{4\pi}\left[\frac{x}{\nu^2+1^2} - \frac{x^3}{(\nu^2+1^2)(\nu^2+3^2)} + \frac{x^5}{(\nu^2+1^2)(\nu^2+3^2)(\nu^2+5^2)} - \ldots\right].$$

Tous ces résultats concordent avec ceux qu'a indiqués M. Anger dans ses recherches sur la fonction $J_\nu(x)$ (1) et qu'il a déduits de la considération de l'intégrale définie.

Lorsque le paramètre est un nombre entier n, l'équation différentielle (C) se réduit à

$$(C') \qquad \frac{d^2 J_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0,$$

et la fonction de première espèce se présente sous la forme

$$(2) \qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\varepsilon - x\sin\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

ce qui revient à

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\varepsilon . \cos(x\sin\varepsilon)\, d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\varepsilon . \sin(n\sin\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Or, si le paramètre est un nombre pair $2n$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin 2n\varepsilon \sin(x\sin\varepsilon)\, d\varepsilon = 0;$$

et si c'est un nombre impair, $2n+1$, on a

$$\int_0^{2\pi} \cos(2n+1)\varepsilon \cos(x\cos\varepsilon)\, d\varepsilon = 0;$$

---

(1) *Neueste Schriften*, etc., année 1855, p. 15 et suiv.

Digitized by Google

par suite, suivant l'un ou l'autre cas, la fonction de Fourier prend l'une ou l'autre des deux formes

$$(3)\qquad \begin{cases} J_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2n\varepsilon \cos(n\sin\varepsilon)\,d\varepsilon, \\ J_{2n+1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2n+1)\varepsilon \sin(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon. \end{cases}$$

La troisième forme que l'on rencontre est donnée par la relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varepsilon \cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{x^n} J_n(x),$$

qu'on démontre facilement en développant en série $\cos(x\sin\varepsilon)$ et en évaluant les intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varepsilon \sin^p\varepsilon\,d\varepsilon$, qui se ramènent toutes à la première

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} 2\pi.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varepsilon \cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon \\ &= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \ldots\right] \\ &= \frac{1}{x^n}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \ldots\right]; \end{aligned}$$

de là on déduit

$$(4)\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varepsilon \cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

De la même manière on obtient

$$(4\,bis)\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\varepsilon \cos(x\cos\varepsilon)\,d\varepsilon;$$

Digitized by Google

C'est de cette dernière formule que part M. Lommel, dans ses *Études sur les fonctions de Bessel* (1).

M. Schlömilch et après lui M. Neumann font remarquer d'ailleurs que les formules (4) et (4 *bis*) se déduisent des précédentes (3), à l'aide d'une formule de transformation démontrée par Jacobi dans un Mémoire intitulé : *Formula transformationis integralium definitorum* (2).

Ces deux dernières formes d'intégrales (4) et (4 *bis*) peuvent être ramenées à une seule. Remarquons en effet que les produits $\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)$ et $\sin^{2n}\varepsilon\cos(x\cos\varepsilon)$ passent par les mêmes valeurs dans les quatre quadrants, et que, par conséquent, les intégrales prises entre zéro et 2π valent quatre fois les intégrales prises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire qu'on a

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

ou

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varepsilon\cos(x\cos\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Si l'on fait $\sin\varepsilon = u$ dans la première, et $\cos\varepsilon = u$ dans la seconde, on arrivera à la forme unique

$$(5)\qquad J_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^1\cos(xu)\,(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du.$$

Comme on a

$$\cos(xu) = \frac{e^{ixu}+e^{-ixu}}{2}$$

et

$$\int_0^1 e^{-ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du = \int_{-1}^0 e^{ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du,$$

il vient

$$(6)\qquad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_{-1}^{+1} e^{ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du,$$

---

(1) *Studien über Bessels'chen Functionen*, etc.

(2) *Journal de Crelle*, t. 15, p. 13.

Digitized by Google

ce que l'on peut écrire

$$(6\ bis)\qquad J_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}e^{ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}du.$$

En remplaçant dans (4) et (4 *bis*) $\cos(x\sin\varepsilon)$ et $\cos(x\cos\varepsilon)$ par des exponentielles, et prenant les limites o et π, on a encore

$$(7)\qquad \begin{cases} J_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ix\sin\varepsilon}\cos^{2n}\varepsilon\,d\varepsilon, \\ J_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ix\cos\varepsilon}\sin^{2n}\varepsilon\,d\varepsilon. \end{cases}$$

Les formules qui précèdent sont établies dans le cas où le paramètre n est entier. Si l'on considère la dernière expression, avec un paramètre quelconque ν, soit

$$(7\ bis)\qquad J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}e^{ix\cos\varepsilon}\sin^{2\nu}\varepsilon\,d\varepsilon,$$

on peut démontrer, comme l'a fait M. Lommel, que cette fonction satisfait aux relations fondamentales qui caractérisent les fonctions cylindriques, savoir

$$\frac{2\nu}{x}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1},$$

$$2\frac{dJ_\nu}{dx}=J_{\nu-1}-J_{\nu+1},$$

formules analogues à (35) et (36), § I; cette expression représente donc une fonction de Fourier pour toute valeur de ν.

25. Dans ses recherches sur la fonction $J_\nu(x)$, M. Anger démontre que les fonctions représentées par les formules (3), où le paramètre est entier, jouissent des propriétés (A) et (B). Pour cela, il suit une voie

Digitized by Google

toute différente de celles indiquées jusqu'ici. En appliquant la méthode de développement de Fourier, et en ayant égard aux formules (3), il pose

$$\cos(x\sin\varepsilon) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\varepsilon + 2J_4(x)\cos 4\varepsilon + 2J_6(x)\cos 6\varepsilon + \ldots$$
$$\sin(x\sin\varepsilon) = \quad 2J_1(x)\sin\varepsilon + 2J_3(x)\sin 3\varepsilon + 2J_5(x)\sin 5\varepsilon + \ldots;$$

il remplace ensuite ε par $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ce qui donne

$$\cos(x\cos\varepsilon) = J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\varepsilon + 2J_4(x)\cos 4\varepsilon - 2J_6(x)\cos 6\varepsilon + \ldots$$
$$\sin(x\cos\varepsilon) = \quad 2J_1(x)\cos\varepsilon - 2J_3(x)\cos 3\varepsilon + 2J_5(x)\cos 5\varepsilon - \ldots;$$

il différentie ces dernières équations d'abord par rapport à ε, puis par rapport à x; et c'est en comparant chaque fois les relations ainsi obtenues avec les précédentes, multipliées respectivement par $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$, qu'il obtient les relations (A) et (B), par lesquelles on définit les fonctions cylindriques.

M. Neumann déduit de ces développements une autre forme pour $J_n(x)$. Il observe que l'on peut écrire

$$\cos(x\cos\varepsilon) = J_0(x) + 2i^2J_2(x)\cos 2\varepsilon + 2i^4J_4(x)\cos 4\varepsilon + \ldots$$
$$i\sin(x\cos\varepsilon) = \quad 2iJ_1(x)\cos\varepsilon + 2i^3J_3(x)\cos 3\varepsilon + \ldots;$$

de là il déduit, par addition,

$$e^{ix\cos\varepsilon} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} i^n J_n(x)\cos n\varepsilon,$$

et, par suite,

$$i^n J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon,$$

d'où

$$(8) \qquad J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon,$$

formule valable pour tout paramètre entier, pair ou impair.

M. Schlömilch a publié dans son Journal (¹) un Mémoire sur la

(¹) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, etc.

Digitized by Google

transcendante de Bessel. Il prend pour point de départ la relation suivante :

$$(9)\quad e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}=J_0+J_1u+J_2u^2+J_3u^3+J_4u^4+\ldots+\frac{J_{-1}}{u}+\frac{J_{-2}}{u^2}+\frac{J_{-3}}{u^3}+\frac{J_{-4}}{u^4}+\ldots.$$

En changeant ici u en $-\frac{1}{u}$ et réciproquement, il conclut d'abord qu'on a

$$(10)\qquad J_{-n}=(-1)^nJ_n;$$

en prenant d'un côté la dérivée par rapport à u, qui est pour le premier membre $\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}$; de l'autre, en multipliant la relation précédente par $\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)$, et égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de u, il obtient la relation

$$(11)\qquad \frac{2n}{x}J_n=J_{n-1}+J_{n+1}.$$

Si l'on multiplie entre eux les développements $e^{\frac{xu}{2}}$ et $e^{-\frac{x}{2u}}$, on obtient, pour les coefficients des diverses puissances de u,

$$J_0(x)=1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.1}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.1.2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3.1.2.3}+\ldots,$$

$$J_1(x)=\frac{\frac{x}{2}}{1}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.2.3}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3.2.3.4}+\ldots\right],$$

$$J_2(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.2}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.3}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.3.4}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3.3.4.5}+\ldots\right],$$

et généralement

$$(12)\quad J_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots n}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(n+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right].$$

Digitized by Google

De cette série, en différentiant le terme

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)},$$

on déduit

$$\frac{\left(\frac{n+2p}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots n(n+1)\ldots(n+p-1)} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{1.2\ldots(p-1)1.2\ldots n(n+1)\ldots(n+p)},$$

et de là on conclut sans peine la relation

$$2\frac{dJ_n}{dx} = J_{n-1} - J_{n+1}, \tag{13}$$

ce qui montre que la fonction J_n est une fonction de Fourier.

26. Dans son Mémoire sur les fonctions de Fourier et Bessel (¹), M. Heine fait remarquer que les fonctions qu'il appelle *cylindriques* peuvent être considérées comme limites des fonctions sphériques de première et deuxième espèce; mais, sans passer par ces considérations, qui nécessitent une longue étude, cet auteur démontre que les fonctions cylindriques sont représentées par les formules (7) et (8).

Il pose

$$e^{x\cos\varepsilon} = f_0(x) + 2f_1(x)\cos\varepsilon + 2f_2(x)\cos 2\varepsilon + \ldots + 2f_n(x)\cos n\varepsilon + \ldots; \tag{14}$$

multipliant par $\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$ et intégrant entre zéro et π, il déduit de là

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$$
$$= \frac{x^n}{2.4.6\ldots 2n}\left[1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \ldots\right].$$

(¹) *Journal de Crelle*, t. 69.

Digitized by Google

Cette fonction ne se confond pas exactement avec $J_n(x)$, mais il est facile de voir qu'on a

$$J_n(x) = (-i)^n f_n(xi),$$

et que, prise sous la forme $y = \int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$, elle représente une intégrale particulière de l'équation différentielle (1 *bis*), § I, savoir :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{15}$$

Si l'on substitue en effet à y dans cette dernière équation l'intégrale définie $\int_a^b e^{-x\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$, on obtient

$$a)\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2+n^2)y = -\left[e^{-x\cos\varepsilon}(x\sin\varepsilon\cos n\varepsilon + n\sin n\varepsilon)\right]_a^b,$$

et les limites pour lesquelles s'annule cette dernière expression sont $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \pi$, et la valeur infinie pour laquelle $e^{-x\cos\varepsilon}$ s'évanouit. C'est ainsi qu'on arrive pour l'équation différentielle (15) aux deux intégrales

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon, \tag{16}$$

$$F_n(x) = \int_0^\infty e^{-x\cos i\varepsilon}\cos ni\varepsilon\, d\varepsilon, \tag{17}$$

ou

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-x\cos\varepsilon + in\varepsilon}\, d\varepsilon, \tag{16 *bis*}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\cos i\varepsilon - n\varepsilon}\, d\varepsilon. \tag{17 *bis*}$$

A la relation (16) on peut, comme l'observe M. Heine, appliquer la formule de transformation de Jacobi, et l'on a

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x^n(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon}\sin^{2n}\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Digitized by Google

Or, en substituant dans l'équation différentielle (15) l'intégrale $y = x^n \int_a^b e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n}\varepsilon \, d\varepsilon$, on obtient

$$(b) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = (x^{n+1} e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n+1}\varepsilon)_a^b.$$

Les limites qui annulent le second membre sont $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \pi$, et la valeur infinie de ε qui annule $e^{-x\cos\varepsilon}$. On arrive ainsi aux deux nouvelles formes

$$(18) \qquad f_n(x) = \mathrm{A}x^n \int_0^{\pi} e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n}\varepsilon \, d\varepsilon,$$

$$(19) \qquad \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{B}x^n \int_0^{\infty} e^{-x\cos i\varepsilon} \sin^{2n} i\varepsilon \, d\varepsilon,$$

et, dans les deux cas, M. Heine représente la fonction de deuxième espèce sous la même forme que celle de première espèce.

Remarque. — Ces dernières formes sont applicables quelle que soit la valeur du paramètre n, qu'elle soit entière ou fractionnaire; c'est ce qui résulte de la condition (b). Au contraire, la relation (a) montre que la formule (16) ne peut être employée que si n est un nombre entier. Toutefois, lorsque n est un nombre rationnel et fractionnaire, ayant pour dénominateur δ, la même intégrale satisfait à la condition (a), si elle est prise entre zéro et $\delta\pi$.

27. M. Hermann Hankel a publié, dans les *Mathematische Annalen* (1), un Mémoire sur les fonctions cylindriques de première et de deuxième espèce. En partant de l'équation différentielle (1), § I, il arrive à l'intégrale (b), mise sous la forme

$$(20) \qquad y = x^{\nu} \int_a^b e^{ixu} (u^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} \, du,$$

et, pour déterminer les limites (a) et (b), il observe que, pour satisfaire

(1) Clebsch et Neumann, t. I, p. 467.

Digitized by Google

à l'équation différentielle, on doit avoir

$$\left[e^{ixu}(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]_a^b = 0.$$

Si l'on a $\nu+\frac{1}{2}>0$, ou $\nu>-\frac{1}{2}$, cette expression s'annule pour $u=+1$, $u=-1$ et $u=\infty i$; de là résultent les trois intégrales suivantes

$$(a) \qquad x^\nu \int_{-1}^{+1} e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

$$(b) \qquad x^\nu \int_{+1}^{\infty i} e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

$$(c) \qquad x^\nu \int_{-1}^{\infty i} e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

entre lesquelles on doit avoir la relation linéaire

$$\int_{-1}^{+1} + \int_{+1}^{\infty i} + \int_{\infty i}^{-1} = 0.$$

Dans ces intégrales on va d'une limite à l'autre par une ligne simple qui ne contourne aucun des points de ramification. On obtient une autre classe d'intégrales si, au contraire, la courbe d'intégration revient à son point de départ en contournant un ou deux de ces points. De cette façon on a cinq intégrales nouvelles

$$(d) \qquad x^\nu \int_{+1}^{+1} e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

$$(e) \qquad x^\nu \int_{-1}^{-1} e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

$$(f),\ (g),\ (h) \qquad x^\nu \int_{\infty i}^{\infty i} e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du;$$

dans la première la courbe d'intégration enveloppe le point $u=-1$; dans la seconde elle contourne le point $u=+1$; enfin la dernière peut être prise sur trois contours distincts, entourant l'un le point $u=+1$, l'autre le point $u=-1$, et le troisième ces deux points à la fois. On a ainsi huit formes d'intégrales. Il est évident que chacune

Digitized by Google

de ces intégrales doit être une fonction linéaire de deux autres, et c'est ce que l'auteur met en évidence dans la suite de son Mémoire.

Ce n'est pas tout, comme l'équation différentielle (1), § I, ne change pas quand on remplace $+\nu$ par $-\nu$, on peut aussi prendre pour intégrale l'expression

$$y = x^{-\nu}\int_a^b e^{ixu}(u^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,du, \tag{21}$$

et déterminer les limites par la condition

$$\left[e^{ixu}(u^2-1)^{-\nu+\frac{1}{2}}\right]_a^b = 0.$$

Si l'on a $-\nu+\frac{1}{2}>0$, ou $\nu<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si ν décroît depuis $+\frac{1}{2}$ jusqu'à $-\infty$, cette dernière expression s'annule aussi pour $u=+1$, $u=-1$ et $u=\infty i$; et l'on déduit de (21) huit nouvelles formes d'intégrales, analogues aux précédentes. Mais il faut remarquer que ces huit intégrales ne peuvent être prises en même temps que les huit précédentes (ce qui porte alors le nombre à seize), que dans le cas où le paramètre ν satisfait à la double condition $\nu+\frac{1}{2}>0$ ou $\nu>-\frac{1}{2}$, et $-\nu+\frac{1}{2}>0$, c'est-à-dire $\nu<\frac{1}{2}$, ou, en d'autres termes, lorsque ν est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Lorsque cela n'a pas lieu, c'est-à-dire lorsqu'on a $\nu>\frac{1}{2}$ ou $\nu<-\frac{1}{2}$, la dernière expression ou la première ne s'annulent que pour $u=\infty i$, et l'on n'a alors que trois nouvelles intégrales analogues à (f), (g), (h), ce qui réduit le nombre total à onze.

V.

ÉTUDE DE NOUVELLES INTÉGRALES.

---

28. Dans le cours de mes recherches j'ai été conduit à la forme nouvelle

$$V_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\,d\varepsilon, \tag{1}$$

Digitized by Google

qui représente la fonction V_ν avec la variable z, et se rapproche de celle donnée par Bessel.

Il est facile de démontrer que cette fonction, quand le paramètre est entier, jouit des propriétés qui caractérisent les fonctions cylindriques. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{dV_\nu(z)}{dz} = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\cos\varepsilon\,d\varepsilon \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\sin\varepsilon\,d\varepsilon \\ = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[(\nu+1)\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\,d\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\frac{dV_\nu}{dz} = V_{\nu+1}. \tag{2}$$

Si l'on combine par addition et soustraction les valeurs de $V_{\nu-1}$ et $V_{\nu+1}$, on a

$$V_{\nu-1}+V_{\nu+1} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\cos\varepsilon\,d\varepsilon,$$

$$V_{\nu-1}-V_{\nu+1} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\sin\varepsilon\,d\varepsilon;$$

d'ailleurs, on voit facilement que

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\cos\varepsilon\,d\varepsilon \\ &= \int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon][\nu+(z-1)\cos\varepsilon-\nu]\frac{dz}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1}\left\{e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\right\}_0^{2\pi} \\ &\quad +\frac{z+1}{z-1}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\,d\varepsilon \\ &\quad -\frac{\nu}{z-1}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\,d\varepsilon,\end{aligned}$$

Digitized by Google

ce qui donne

$$V_{\nu-1}+V_{\nu+1}=\frac{2e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi(z-1)}+\frac{z+1}{z-1}(V_{\nu-1}-V_{\nu+1})-\frac{2\nu}{z-1}V_\nu$$

ou

$$zV_{\nu+1}+\nu V_\nu-V_{\nu-1}=\frac{e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi},$$

et, en changeant ν en $\nu+1$, on a

$$zV_{\nu+2}+(1+\nu)V_{\nu+1}-V_\nu=\frac{e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi}, \tag{3}$$

puis, remplaçant $V_{\nu+1}$ et $V_{\nu+2}$ par $\frac{dV_\nu}{dz}$ et $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, on arrive à l'équation différentielle

$$z\frac{d^2V_\nu}{dz^2}+(1+\nu)\frac{dV_\nu}{dz}-V_\nu=\frac{e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi}, \tag{4}$$

qui, pour un paramètre entier n, revient à

$$z\frac{d^2V_n}{dz^2}+(1+n)\frac{dV_n}{dz}-V_n=0. \tag{4 bis}$$

Pour développer en série la fonction V_ν, on peut, en partant de la formule de Maclaurin, poser

$$V_\nu=A_0+A_1\frac{z}{1}+A_2\frac{z^2}{1.2}+A_3\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

les coefficients A_0, A_1, A_2, ... désignant les valeurs de V_ν, $\frac{dV_\nu}{dz}$, $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, ... pour $z=0$. Or, on déduit de l'équation (4), par des différentiations successives et en posant $N=\frac{e\sin 2\nu\pi}{2\pi}$,

$$\begin{aligned}
z\frac{d^2V_\nu}{dz^2}+(1+\nu)\frac{dV_\nu}{dz}-V_\nu &= Ne^z,\\
z\frac{d^3V_\nu}{dz^3}+(2+\nu)\frac{d^2V_\nu}{dz^2}-\frac{dV_\nu}{dz} &= Ne^z,\\
z\frac{d^4V_\nu}{dz^4}+(3+\nu)\frac{d^3V_\nu}{dz^3}-\frac{d^2V_\nu}{dz^2} &= Ne^z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En faisant $z=0$ et admettant que, pour cette valeur, les dérivées

Digitized by Google

$\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, ... ne deviennent pas infinies, on déduit des relations précédentes

$$\begin{aligned}(1+\nu)A_1 - A_0 &= N,\\ (2+\nu)A_2 - A_1 &= N,\\ (3+\nu)A_3 - A_2 &= N,\\ &\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

et de là il vient

$$A_1 = \frac{A_0}{1+\nu} + \frac{N}{1+\nu},$$

$$A_2 = \frac{A_0}{(1+\nu)(2+\nu)} + \frac{N}{(1+\nu)(2+\nu)} + \frac{N}{2+\nu},$$

$$A_3 = \frac{A_0}{(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \frac{N}{(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \frac{N}{(2+\nu)(3+\nu)} + \frac{N}{3+\nu},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On obtient ainsi

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} V_\nu = A_0&\left[1 + \frac{z}{1(1+\nu)} + \frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \frac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \cdots\right]\\ &+ \frac{Nz}{1(1+\nu)}\left[1 + \frac{z}{2(2+\nu)} + \frac{z^2}{2.3(2+\nu)(3+\nu)} + \cdots\right]\\ &+ \frac{Nz^2}{1.2(2+\nu)}\left[1 + \frac{z}{3(3+\nu)} + \cdots\right]\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\end{aligned}\right.$$

quand le paramètre est un nombre entier n, on a $N = 0$, et l'on retombe sur la série connue.

29. Pour trouver directement une forme d'intégrale applicable à la première équation (3 *bis*), § I, nous posons

$$(6)\qquad V_\nu = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}} U\, du$$

(U fonction à déteminer), ce qui donne

$$z\frac{d^2V_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\frac{dV_\nu}{dz} - V_\nu = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}} U\, du \left(\frac{z}{u^2} - \frac{1+\nu}{u} - 1\right).$$

Digitized by Google

Si nous observons d'autre part qu'on a

$$\int_a^b \frac{d}{du}\left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)du = \left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)_a^b = \int_a^b \frac{z}{u^2}e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\,du + \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\,\frac{d\log \mathrm{U}}{du}\,du,$$

nous pouvons écrire

$$z\frac{d^2\mathrm{V}_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\frac{d\mathrm{V}_\nu}{dz} - \mathrm{V}_\nu = \left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)_a^b - \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\,du\left(\frac{d\log \mathrm{U}}{du} + \frac{1+\nu}{u} + 1\right),$$

et nous voyons par là qu'on satisfait à l'équation (3), § I, en posant

$$\left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)_a^b = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\log \mathrm{U}}{du} + \frac{1+\nu}{u} + 1 = 0;$$

de cette dernière on déduit par l'intégration, et en supposant la constante nulle,

$$\mathrm{U} = u^{-(1+\nu)}e^{-u},$$

et on détermine les limites (a) et (b) en posant

$$\left(e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)}\right)_a^b = 0.$$

Or, il est facile de voir que les valeurs de u qui annulent l'expression $e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)} = \frac{1}{e^{\frac{z}{u}}e^{u}u^{1+\nu}}$, sont zéro et ∞. Pour $u=\infty$, la chose est évidente. Pour $u=0$, on a $e^{u}=1$, et il suffit de chercher la limite de $\left(\frac{1}{e^{\frac{z}{u}}u^{1+\nu}}\right)_{u=0}$. Si l'on suppose ν compris entre zéro et 1, cas auquel on peut toujours ramener ceux où ν est >1, on remarquera que la valeur de $e^{\frac{z}{u}}u^{1+\nu}$ est comprise entre $e^{\frac{z}{u}}u^2$ et $e^{\frac{z}{u}}u$; et si l'on développe $e^{\frac{z}{u}}$, il vient

$$e^{\frac{z}{u}}u^2 = u^2 + \frac{zu}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3u} + \frac{z^4}{1.2.3.4u^2} + \ldots,$$

$$e^{\frac{z}{u}}u = u + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2u} + \frac{z^3}{1.2.3u^2} + \ldots;$$

Digitized by Google

expressions qui deviennent infinies pour $u = 0$; par suite, on a

$$\left(\frac{1}{e^{\frac{z}{u}} u^{1+\nu}}\right)_{u=0} = 0.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$V_\nu = \int_0^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du \quad (1); \tag{7}$$

remarquons en passant que, dans ce cas, l'expression qui se trouve sous le signe d'intégration se confond avec celle qu'il faut annuler aux limites pour satisfaire à l'équation différentielle.

En supposant la variable imaginaire, on peut intégrer le long d'une courbe contournant le point zéro et allant de ∞ à ∞ ; on a ainsi

$$V'_\nu = \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du. \tag{8}$$

On obtient, comme nous l'avons vu, une seconde forme d'intégrale en posant $V_\nu = z^{-\nu} U_\nu$, la fonction U_ν satisfaisant à la seconde équation (3 *bis*), § I. Cela donne les deux autres intégrales

$$V''_\nu = z^{-\nu} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{\nu-1}\, du, \tag{9}$$

$$V'''_\nu = z^{-\nu} \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{\nu-1}\, du. \tag{10}$$

De ces quatre formes, deux seulement sont distinctes, et nous allons considérer en particulier les expressions (8) et (10).

---

(1) Dans un Mémoire publié dans les *Annales de Milan,* M. Schläfli pose

$$V_\nu = \int_a^b e^{-zu} U\, du,$$

et arrive à l'intégrale

$$V_\nu = \int_0^\infty e^{-\left(zu + \frac{1}{u}\right)} u^{\nu-1}\, du,$$

qui ne diffère de (7) que parce que u y est remplacé par $\frac{1}{u}$.

Digitized by Google

30. Si dans V_ν nous développons $e^{-\frac{z}{u}}$, nous avons

$$V'_\nu = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu+p)}\, du.$$

En désignant par $A(\nu+p)$ cette dernière intégrale, et appliquant la méthode d'intégration par partie, nous avons

$$A(\nu+p) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu+p)}\, du = -\left(\frac{e^{-u} u^{-(\nu+p)}}{\nu+p}\right)_\infty^\infty - \frac{1}{\nu+p} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(\nu+p)}\, du;$$

de là on déduit successivement

$$A(\nu+p) = -\frac{A(\nu+p-1)}{\nu+p},$$

$$A(\nu+p-1) = -\frac{A(\nu+p-2)}{\nu+p-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A(\nu+1) = -\frac{A(\nu)}{\nu+1},$$

et, par suite,

$$A(\nu+p) = \frac{(-1)^p A(\nu)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)} = \frac{(-1)^p A(\nu)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+p+1)}.$$

Pour $A(\nu)$ on a

$$A(\nu) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du = \int_\infty^0 e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du + e^{-2\nu\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du,$$

ou

$$A(\nu) = (e^{-2\nu\pi i} - 1) \int_0^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du = -2i \sin\nu\pi\, e^{-\nu\pi i}\, \Gamma(-\nu);$$

mais, d'après une formule connue, on sait que

$$\Gamma(-\nu)\,\Gamma(1+\nu) = -\frac{\pi}{\sin\nu\pi};$$

il vient donc

$$A(\nu) = \frac{2\pi i . e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(\nu+1)}$$

Digitized by Google

et, par suite,

$$A(\nu+p)=\frac{2\pi i(-1)^p e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(\nu+p+1)} \quad (^1).$$

On a ainsi

$$(11)\qquad V'_\nu=2\pi i e^{-\nu\pi i}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu+p+1)}=\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)}du.$$

En traitant de la même manière l'intégrale (10), nous obtenons

$$(12)\qquad V''_\nu=2\pi i e^{\nu\pi i}z^{-\nu}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)}-z^{-\nu}\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1-\nu)}du;$$

de là nous déduisons

$$(13)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu+p+1)}=\frac{e^{\nu\pi i}}{2\pi i}\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)}du,$$

$$(14)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)}=\frac{e^{-\nu\pi i}}{2\pi i}\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1-\nu)}du.$$

Dans le cas où le paramètre est un nombre entier n, tous les termes, à partir de celui qui contient z^n, deviennent infinis dans (12) ou (14). Il faut alors séparer l'intégrale (10) en deux, et poser, en la désignant par V_n,

$$V_n=z^{-n}\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p}\int_\infty^\infty e^{-u}u^{-(1+p-n)}du$$

$$+z^{-n}\sum_{p=n}^{p=\infty}\frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p}\int_\infty^\infty e^{-u}u^{-(1+p-n)}du.$$

La première partie est nulle, car les intégrales $\int_\infty^\infty e^{-u}u^{n-p-1}du$, prises le long d'un contour fermé dans lequel la fonction $e^{-u}u^{n-p-1}$ est finie,

---

(1) Cette formule, qui revient à $\frac{1}{2\pi i}\int_\infty e^{-u}u^{-(1+\nu+p)}du=\frac{e^{-(\nu+p)\pi i}}{\Gamma(\nu+p+1)}$, s'accorde avec celle qui a été donnée par Weierstrass quand ν est entier.

Digitized by Google

continue et monodrôme, sont toutes nulles tant que p est $\leq n-1$, et l'on a, en remplaçant p par $n+p$,

$$V_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots n(n+1).(n+2)\ldots(n+p)} \int_\infty e^{-u} u^{-(1+p)}\, du.$$

Si l'on pose comme précédemment

$$A(p) = \int_\infty e^{-u} u^{-(1+p)}\, du,$$

il vient

$$A(p) = \frac{(-1)^p A_0}{1.2.3\ldots p}.$$

Pour évaluer A(o), remarquons qu'on a

$$A(o) = \int_\infty e^{-u} u^{-1} du,$$

et

$$\int_\infty = \int_\infty^1 + \int_1^1 + \int_1^\infty,$$

la seconde intégrale $\int_1^1$ étant prise le long d'une courbe qui contourne le point zéro; et comme la fonction $e^{-u}u^{-1}$ est finie, continue et monodrôme de 1 à ∞, les intégrales $\int_\infty^1$ et $\int_1^\infty$ sont égales et de signes contraires; de sorte qu'on a

$$\int_\infty^\infty e^{-u} u^{u-1} du = \int_1^1 e^{-u} u^{-1} du.$$

L'intégrale $\int_1^1$ peut être prise le long d'un cercle de rayon 1, et ayant pour centre l'origine. Posons $u = e^{\varphi i}$, nous aurons

$$du = i d\varphi . e^{\varphi i},$$

et pour $u = 1$,

$$\varphi = o \quad \text{et} \quad \varphi = 2\pi,$$

Digitized by Google

de cette façon, puisque

$$e^{-u} = 1 - \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots = 1 - \frac{e^{\varphi i}}{1} + \frac{e^{2\varphi i}}{1.2} - \ldots,$$

il vient

$$\int_1^1 e^{-u} u^{-1} du = i \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 - \frac{e^{\varphi i}}{1} + \frac{e^{2\varphi i}}{1.2} - \ldots\right) = 2\pi i;$$

par suite on a

$$A(0) = 2\pi i, \tag{15}$$

et

$$V_n = 2\pi i (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+n+1)}, \tag{16}$$

valeur identique à celle qu'on déduit de (11) en remplaçant ν par n; ce qui montre que, dans le cas où le paramètre est entier, les deux intégrales (11) et (12) se confondent, et nous n'avons ainsi qu'une seule intégrale particulière.

31. Pour trouver dans ce cas la seconde intégrale, nous partons de la deuxième équation (3 *bis*), § I, dont les intégrales

$$U_1 = z^\nu \int_\infty^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+\nu)} du,$$

$$U_2 = \int_\infty^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1-\nu)} du$$

sont égales à celles de la première (3 *bis*) multipliées par z^ν. Si l'on suppose $\nu = n + \varepsilon$, n nombre entier et ε quantité très petite, l'expression

$$U = \frac{z^{n+\varepsilon} \int_\infty^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+n+\varepsilon)} du - \int_\infty^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1-n-\varepsilon)} du}{\varepsilon}$$

est encore une intégrale de l'équation citée, quelque petite que soit la quantité ε; sa limite pour $\varepsilon = 0$ est donc la seconde intégrale cherchée.

Digitized by Google

Désignons par U_n cette limite, qui est la dérivée $\left(\frac{dU}{dv}\right)_{v=n}$, nous aurons

$$(17)\quad \begin{cases} U_n = z^n \log z \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+n)}\, du \\ \qquad - z^n \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+n)} \log u\, du - \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1-n)} \log u\, du, \end{cases}$$

ou, en représentant par I_1, I_2, I_3 les trois intégrales définies qui y entrent,

$$17\ bis) \qquad U_n = I_1 z^n \log z - I_2 z^n - I_3.$$

La valeur de la première est donnée par la formule (11), et nous avons

$$I_1 = 2\pi i e^{-n\pi i} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}.$$

Pour la seconde, nous avons, en développant $e^{-\frac{z}{u}}$,

$$I_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+n+p)} \log u\, du;$$

et, si nous posons

$$B(n+p) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+n+p)} \log u\, du,$$

nous voyons qu'on a

$$B(n+p) = -\frac{dA(n+p)}{dn};$$

or, la valeur précédente de $A(\nu+p)$ donne

$$A(n+p) = \frac{2\pi i(-1)^p e^{-n\pi i}}{\Gamma(n+p+1)}$$

et, par suite,

$$B(n+p) = -\frac{2\pi^2(-1)^p e^{-n\pi i}}{\Gamma(n+p+1)} + \frac{2\pi i(-1)^p e^{-n\pi i}\Psi(n+p+1)}{\Gamma(n+p+1)};$$

Digitized by Google

nous avons donc

$$I_2 = -2\pi^2 e^{-n\pi i} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)} + 2\pi i e^{-n\pi i} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p \Psi(n+p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}.$$

Si dans la troisième intégrale on développe également $e^{-\frac{z}{u}}$, on a

$$I_3 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\infty}^{\infty} u^{-(1-n+p)} \log u . e^{-u} du;$$

si l'on pose

$$B(n-p) = \int_{\infty}^{\infty} u^{n-p-1} \log u . e^{-u} du$$

et qu'on intègre par partie, il vient

$$B(n-p) = \left(\frac{u^{n-p} \log u . e^{-u}}{n-p}\right)_{\infty}^{\infty} + \frac{1}{n-p} \int_{\infty}^{\infty} u^{n-p} \log u . e^{-u} du$$
$$- \frac{1}{n-p} \int_{\infty}^{\infty} u^{n-p-1} e^{-u} du.$$

Tant qu'on a $p \leq n-1$, la dernière intégrale, comme nous l'avons déjà observé, est nulle, et dans ce cas l'on a

$$B(n-p) = \frac{B(n-p+1)}{n-p};$$

c'est ce qui conduit à séparer la valeur de I_3 en deux parties, que nous désignons par I'_3 et I''_3, et nous posons

$$I'_3 = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p-n)} \log u \, du,$$

$$I''_3 = \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p-n)} \log u \, du.$$

La première partie I'_3 est facile à calculer. De la valeur précédente de $B(n-p)$ on déduit

$$B(n-p+1) = (n-p) B(n-p),$$

Digitized by Google

puis, en changeant p en $p+1$, $p+2$, ...,

$$\begin{aligned}
&B(n-p) &&= (n-p-1)\,B(n-p-1),\\
&B(n-p-1) &&= (n-p-2)\,B(n-p-2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&B(2) &&= 1\,B(1),
\end{aligned}$$

d'où

$$B(n-p) = 1.2.3\dots(n-p-1)\,B(1);$$

d'ailleurs on a

$$B(1) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\log u\,du = -(e^{-u}\log u)_{\infty}^{\infty} + \int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u} = 2\pi i;$$

par suite

$$B(n-p) = 2\pi i\,\Gamma(n-p),$$

et

$$I_3' = 2\pi i \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p\,\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)}.$$

Quant à I_3', remarquons que, si l'on remplace p par $p+n$, il vient

$$I_3' = (-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\dots n(n+1)\dots(n+p)} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p)}\log u\,du,$$

et que cette valeur est analogue à celle de I_2; de là on conclut

$$I_3' = -2\pi^2(-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)} + 2\pi i(-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p\,\Psi(p+1)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)}.$$

On a donc finalement, puisque $e^{-n\pi i} = (-1)^n$,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} U_n = 2\pi i(-1)^n \Bigg\{ & z^n\log z \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)} \\ & - z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)} [\Psi(n+p+1)+\Psi(p+1)] \Bigg\} \\ & - 2\pi i \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p\,\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)} + 4\pi^2(-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)}. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

En supprimant le dernier terme qui est la première intégrale particulière, et divisant par z^n, on a la seconde intégrale de la première équation différentielle (3 *bis*), § I, que nous désignons par Y_n, savoir

$$(19)\quad \begin{cases} Y_n = -2\pi i z^{-n} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p \Gamma(n-p)}{\Gamma(p-1)} \\ \quad -2\pi i (-1)^n \displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p-1)\Gamma(n+p+1)} [\log z - \Psi(n+p+1) - \Psi(p+1)], \end{cases}$$

résultats qui s'accordent avec ceux que nous avons obtenus au § II et avec ceux qui sont donnés par M. H. Hankel (1).

32. Du cas où le paramètre est un nombre entier n, on peut déduire aisément celui où $n = 0$. Mais il est aussi facile d'établir directement les développements qui conviennent à ce cas. D'après ce qui précède, la fonction

$$U_\nu = \frac{\int_\infty^z e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{\nu-1} du - z^\nu \int_\infty^z e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-\nu-1} du}{\nu}$$

est une intégrale de la deuxième équation (3 *bis*), § I, quelque petite que soit la valeur de ν. Pour $\nu = 0$, cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$; et, pour avoir la valeur vers laquelle elle tend à cette limite, nous prenons, comme précédemment, la dérivée des deux termes par rapport à ν, et nous faisons ensuite $\nu = 0$, ce qui donne

$$(20)\qquad Y_0 = 2\int_\infty^z e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} \log u \, du - \log z \int_\infty^z e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} du,$$

ou

$$(20\ bis)\qquad Y_0 = \int_\infty^z e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \log \frac{u^2}{z} \frac{du}{u}.$$

Remarque. — On peut démontrer *a posteriori* que cette expression est une intégrale de l'équation (6), § I; car, si l'on y remplace V_0 par la

(1) CLEBSCH et NEUMANN, *Mathematische Annalen*, t. I, p. 471.

Digitized by Google

valeur

$$Y_0 = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \log \frac{u^2}{z} \frac{du}{u},$$

on trouve

$$z \frac{d^2 V_0}{dz^2} + \frac{dV_0}{dz} - V_0 = \left(\log \frac{u^2}{z} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} \right)_a^b.$$

Cette dernière expression, qui revient à $\frac{2 \log u - \log z}{u e^u e^{\frac{z}{u}}}$, est nulle pour o et ∞ ; c'est ce qui a été démontré précédemment pour $\frac{1}{u e^u e^{\frac{z}{u}}}$ et par suite pour $\frac{\log z}{u e^u e^{\frac{z}{u}}}$.

D'ailleurs, comme pour $u = 0$ et $u = \infty$, on a $\frac{1}{e^u e^{\frac{z}{u}}} = 0$, il suffit de considérer ce que devient $\frac{2 \log u}{u}$. Soit $u = e^{\varphi}$, on aura

$$\frac{2 \log u}{u} = \frac{2\varphi}{e^{\varphi}} = \frac{2\varphi}{1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \dots};$$

or, pour $u = 0$, $\varphi = -\infty$, et pour $u = \infty$, $\varphi = \infty$; dans ces deux cas l'expression $\frac{2\varphi}{e^{\varphi}}$ est nulle. On peut donc prendre pour seconde intégrale de l'équation limite

$$Y_0 = \int_0^{\infty} \log \frac{u^2}{z} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \frac{du}{u}.$$

Pour développer en série, considérons la deuxième intégrale qui entre dans (20), savoir

$$I_1 = \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} du,$$

et qui, si l'on développe $e^{-\frac{z}{u}}$, revient à

$$I_1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3 \dots p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p)} du.$$

Digitized by Google

Comme, d'après ce qui précède, on a

$$A(p) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p)} du = \frac{2\pi i(-1)^p}{1.2.3\ldots p},$$

il vient

$$I_1 = 2\pi i \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2}.$$

La première intégrale

$$I_2 = \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \log u \frac{du}{u}$$

revient à

$$I_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p)} \log u \, du,$$

ou, d'après ce qu'on a vu, à

$$I_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} [-2\pi^2 + 2\pi i \Psi(p+1)].$$

On a donc

$$Y_0 = -4\pi^2 \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} + 2\pi i \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} [2\Psi(p+1) - \log z].$$

Si l'on supprime le premier terme, qui est à lui seul une intégrale particulière, et qu'on change les signes, il vient

$$Y_0 = -2\pi i \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} [\log z - 2\Psi(p+1)], \tag{21}$$

formule qu'on déduit immédiatement de (19) en faisant $n = 0$.

Digitized by Google

VI.

CAS OU LE PARAMÈTRE ν EST DE LA FORME $\nu = n + \frac{1}{2}$.

33. M. Lommel a examiné en particulier le cas ou $\nu = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier (1). Dans ce cas, on a

$$1 + 2\nu = 2n + 2, \quad 1 - 2\nu = -2n,$$

et les équations différentielles qui peuvent remplacer l'équation (1 *bis*, § 1) sont les suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy_1}{dx} - y_1 = 0, \tag{1 bis}$$

Il résulte de ce qui a été démontré que, si l'on a une intégrale de l'équation (1), en la multipliant par x^{2n+1}, on aura une intégrale de (1 *bis*); il suffit donc d'intégrer l'une des deux équations précédentes.

Ce sont les équations (1) et (1 *bis*) que considère M. Serret dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* (2) et qu'il intègre à l'aide de la méthode des différentielles à indices quelconques. Pour établir les formules auxquelles arrive cet auteur, nous suivons une marche toute différente, et qui parait assez simple. Prenons les équations (1) et (1 *bis*) sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dy}{dx} - m^2 y = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy_1}{dx} - m^2 y_1 = 0. \tag{2 bis}$$

(1) *Studien über die Besselschen Functionen*, p. 51.

(2) *Journal de Liouville*, t. 9, p. 193.

Digitized by Google

Si, dans la première, nous posons, comme M. Serret,

$$y = \mathrm{R}e^{\mu x},$$

et en même temps $\mu^2 - m^2 = 0$, en prenant d'abord $\mu = +m$, il vient

$$(3) \qquad x\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + [2mx + 2(n+1)]\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2m(n+1)\mathrm{R} = 0.$$

Cette équation est de la même forme que la suivante :

$$(4) \qquad x\frac{d^2u}{dx^2} + (2mx - k)\frac{du}{dx} - 2mku = 0,$$

qui admet comme intégrale particulière

$$u = e^{-2mx}.$$

Si dans (4) on fait

$$u = x^{k+1}u',$$

il vient

$$(5) \qquad \frac{x\,d^2u'}{dx^2} + (2mx + k + 2)\frac{du'}{dx} + 2mu' = 0,$$

et si l'on différentie h fois cette dernière, on obtient

$$(6) \qquad x\frac{d^{h+2}u'}{dx^{h+2}} + (2mx + k + h + 2)\frac{d^{h+1}u'}{dx^{h+1}} + 2m(h+1)\frac{d^hu'}{dx^h} = 0,$$

équation qu'on rend identique à (3) en prenant

$$k = h = n,$$

ce qui donne

$$(7) \qquad \mathrm{R} = \mathrm{K}\frac{d^nu'}{dx^n} = \mathrm{K}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n} \quad (\mathrm{K\ const.}),$$

et l'on a ainsi pour première intégrale de (2)

$$(8) \qquad y' = \mathrm{A}e^{mx}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n} \quad (\mathrm{A\ const.}).$$

Digitized by Google

Si l'on fait en second lieu $\mu = -m$, il vient

$$(8\,bis) \qquad y' = \mathrm{B}e^{-mx}\frac{d^n(e^{2mx}x^{-n-1})}{dx^n};$$

l'intégrale générale est donc

$$(9) \qquad y = \mathrm{A}e^{mx}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n} + \mathrm{B}e^{-mx}\frac{d^n(e^{2mx}x^{-n-1})}{dx^n}.$$

De là, en s'appuyant sur la formule connue

$$x^{-n-1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\,du,$$

on déduit

$$(10) \qquad y = \mathrm{A}e^{-mx}\int_0^\infty e^{-ux}u^n(u+2m)^n\,du + \mathrm{B}e^{mx}\int_0^\infty e^{-ux}u^n(u-2m)^n\,du.$$

34. On peut, d'ailleurs, appliquer à l'équation (3) la méthode que nous avons déjà employée précédemment. En posant

$$\mathrm{R} = \int_a^b \frac{e^{-ux}\mathrm{U}\,du}{u(2m-u)},$$

nous avons

$$\begin{aligned} &x\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + [2mx + 2(n+1)]\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2m(n+1)\mathrm{R} \\ &\quad = -\int_a^b \frac{e^{-ux}\mathrm{U}\,du}{u(u-2m)}[u(2m-u)x - 2(n+1)(m-u)] \\ &\quad = -\int_a^b e^{-ux}\mathrm{U}\,du\left(x - \frac{n+1}{u} - \frac{n+1}{u-2m}\right). \end{aligned}$$

Comme, d'un autre côté, on a identiquement

$$\int_a^b \frac{d}{du}(e^{-ux}\mathrm{U})\,du = [e^{-ux}\mathrm{U}]_a^b = -x\int_a^b e^{-ux}\mathrm{U}\,du + \int_a^b e^{-ux}\mathrm{U}\frac{d\log\mathrm{U}}{du}\,du,$$

il vient

$$\begin{aligned} &x\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + [(2mx + 2(n+1)]\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2m(n+1)\mathrm{R} \\ &\quad = (e^{-ux}\mathrm{U})_a^b - \int_a^b e^{-ux}\mathrm{U}\,du\left(\frac{d\log\mathrm{U}}{du} - \frac{n+1}{u} - \frac{n+1}{u-2m}\right), \end{aligned}$$

Digitized by Google

et, pour satisfaire à l'équation (3), on voit qu'il suffit de poser

$$\frac{d\log U}{du} - \frac{n+1}{u} - \frac{n+1}{u-2m} = 0, \quad (e^{-ux}U)_a^b = 0;$$

de là on déduit

$$U = u^{n+1}(u-2m)^{n+1},$$

et les limites qui annulent l'expression $e^{-ux}u^{n+1}(u-2m)^{n+1}$ sont 0, $2m$ et ∞. On a donc les trois intégrales particulières

$$(11)\quad \begin{cases} R_1 = \int_0^{\infty} e^{-ux}u^n(u-2m)^n\,du, \\ R_2 = \int_{2m}^{\infty} e^{-ux}u^n(u-2m)^n\,du, \\ R_3 = \int_0^{2m} e^{-ux}u^n(u-2m)^n\,du. \end{cases}$$

Si l'on change m en $-m$, on trouve de meme

$$(12)\quad \begin{cases} R'_1 = \int_0^{\infty} e^{-ux}u^n(u+2m)^n\,du, \\ R'_2 = \int_{-2m}^{\infty} e^{-ux}u^n(u+2m)^n\,du, \\ R'_3 = \int_{-2m}^{0} e^{-ux}u^n(u+2m)^n\,du, \end{cases}$$

résultats qui s'accordent avec ceux qu'a obtenus M. Serret.

Remarque. — Il est bon d'observer que les formes d'intégrales précédentes peuvent se déduire aisément de la méthode suivie par Euler, Jacobi, Kummer, etc. On sait que l'équation différentielle

$$(13)\qquad x(1-x)\frac{d^2Y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dY}{dx} - \alpha\beta Y = 0$$

admet comme intégrale particulière la série à quatre éléments

$$Y = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

Digitized by Google

et que cette série peut être représentée par l'intégrale définie

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\displaystyle\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du}{\displaystyle\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du} \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\displaystyle\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du \quad (1). \end{array}\right.$$

Si l'on observe, comme le fait Hansen (2), que la fonction de Fourier est la limite de $F\left(\alpha, \beta, \gamma, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$, lorsque les deux paramètres α et β deviennent infinis, il suffit de chercher ce que devient, dans cette hypothèse, la limite de l'intégrale précédente. Or on trouve aisément les limites de l'équation différentielle et de la série; mais, pour arriver à la limite de l'intégrale définie, il faut d'abord passer par le cas où un seul des éléments α devient infini. Dans ce cas, l'équation différentielle (13) et l'intégrale (14) deviennent

$$(15)\qquad x\frac{d^2Y}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dY}{dx} - \beta Y = 0,$$

$$(16)\qquad Y = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}e^{xu}\,du.$$

Or si, dans l'équation (3), on change x en $-x$, et si l'on fait $2m = 1$, elle devient

$$(3\ bis)\qquad x\frac{d^2R}{dx^2} + [2(n+1) - x]\frac{dR}{dx} - (n+1)R = 0,$$

équation de même forme que (15); par conséquent, pour avoir une intégrale de (3), il suffira de changer x en $-x$ dans (16), et de faire $\gamma = 2(n+1)$, $\beta = n+1$; ce qui donne

$$(17)\qquad R = \frac{\Gamma[2(n+1)]}{[\Gamma(n+1)]^2}\int_0^1 u^n(1-u)^n e^{-xu}\,du,$$

et c'est le résultat qu'on obtient en faisant $2m = 1$ dans R_3 (11).

(1) *Journal de Crelle*, t. 15. — KUMMER, *Sur la série hypergéométrique*.

(2) *Abhandlung der Sächsischen Gesellschaft*, etc., t. II, p. 252; 1855.

Digitized by Google

De là on déduit

$$(18) \qquad y = \mathrm{R} e^{\frac{x}{2}} = \frac{\Gamma[2(n+1)]}{[\Gamma(n+1)]^2} \int_0^1 u^n (1-u)^n e^{\frac{x}{2}(1-2u)} du$$

pour une des intégrales particulières de l'équation (2) où l'on suppose $m = \frac{1}{2}$, et qui, par conséquent, ne contient qu'un paramètre.

En posant $1 - 2u = v$, on arrive à

$$(18\ bis) \qquad \mathrm{R} e^{\frac{x}{2}} = y = \frac{\Gamma[2(n+1)]}{2^{2n+1}[\Gamma(n+1)]^2} \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^n e^{\frac{xv}{2}} dv;$$

on déduit de là une formule qui se trouve démontrée d'une manière bien différente dans le Mémoire de Kummer : en égalant en effet les deux valeurs de R, déduites de (17) et (18 *bis*), et changeant x en $-x$ et n en $n-1$, on obtient

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{n-1} e^{xu} du = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2^{2n-1}} \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{n-1} e^{-\frac{xv}{2}} dv;$$

et, si l'on développe ces deux intégrales en série, il vient

$$1 + \frac{n}{1.2n} x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)} x^2 + \dots$$
$$= e^{\frac{x}{2}} \left[1 + \frac{x^2}{1\left(n+\frac{1}{2}\right)2^4} + \frac{x^4}{1.2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)2^8} + \dots \right],$$

ce qui n'est autre que la formule (8), § 26 du Mémoire cité.

35. Pour avoir la seconde forme d'intégrale donnée par M. Serret, nous partons de l'équation (2 *bis*). En faisant $y_1 = \mathrm{R}_1 e^{\mu x}$, $\mu^2 - m^2 = 0$, et prenant d'abord $\mu = m$, nous avons, pour déterminer R_1,

$$(19) \qquad x \frac{d^2 \mathrm{R}_1}{dx^2} + (2mx - 2n) \frac{d\mathrm{R}_1}{dx} - 2mn\mathrm{R}_1 = 0,$$

équation qui, par $(n+1)$ différentiations, donne

$$(19\ bis) \qquad x \frac{d^{n+3}\mathrm{R}_1}{dx^{n+3}} + (2mx - n + 1) \frac{d^{n+2}\mathrm{R}_1}{dx^{n+2}} + 2m \frac{d^{n+1}\mathrm{R}_1}{dx^{n+1}} = 0.$$

D'autre part, si dans l'équation (5) on fait $k = -n-1$ et $u' = u'_1$, il

Digitized by Google

vient

$$(20)\qquad \begin{cases} x\dfrac{d^2u'_1}{dx^2}+(2mx-n+1)\dfrac{du'_1}{dx}+2mu'_1=0, \\ u'_1=ux^n=x^ne^{-2mx}; \end{cases}$$

de la comparaison des équations (19 *bis*) et (20) l'on conclut

$$C\frac{d^{n+1}R_1}{dx^{n+1}}=u'_1 \quad (C\text{ const.})$$

et, par suite,

$$(21)\qquad C\frac{d^{n+1}(y_1e^{mx})}{dx^{n+1}}=x^ne^{-2mx};$$

de là on déduit, en employant la notation de M. Liouville,

$$y_1=A_1e^{mx}\int^{n+1}x^ne^{-2mx}\,dx^{n+1}.$$

En changeant m en $-m$, on a la seconde intégrale particulière, et par conséquent l'intégrale générale de (2 *bis*) est

$$(22)\qquad y_1=A_1e^{mx}\int^{n+1}x^ne^{-2mx}\,dx^{n+1}+B_1e^{mx}\int^{n+1}x^ne^{2mx}\,dx^{n+1}.$$

Remarque. — Comme, entre deux intégrales particulières correspondantes des équations (2) et (2 *bis*), on a

$$y_1=x^{2n+1}y,$$

la relation (21) donne

$$C\frac{d^{n+1}(x^{2n+1}ye^{mx})}{dx^{n+1}}=x^ne^{-2mx};$$

et si l'on remplace ici ye^{-mx} par sa valeur déduite de (8), on obtient

$$C\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[x^{2n+1}\frac{d^n(e^{2mx}x^{-n-1})}{dx^n}\right]=x^ne^{-2mx},$$

ce qui revient à

$$\int^{n+1}x^ne^{-2mx}\,dx^{n+1}=Cx^{2n+1}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n},$$

autre formule indiquée par M. Serret, et où il est facile de vérifier que

Digitized by Google

pour la constante on a

$$C = \left(-\frac{1}{2m}\right)^{2n+1}.$$

Pour passer des intégrales multiples (22) à des intégrales simples, il suffit d'appliquer la formule de M. Liouville, et celle qu'en a déduite M. Serret. Mais l'on peut aussi déduire immédiatement ces nouvelles intégrales des précédentes (10) en faisant $ux = 2mu'$; on obtient ainsi

$$y = Ae^{-mx}\left(\frac{2m}{x}\right)^{2n+1}\int_0^\infty e^{-2mu'}u'^n(x+u')^n\,du'$$
$$+ B(-1)^n e^{mx}\left(\frac{2m}{x}\right)^{2n+1}\int_0^\infty e^{-2mu'}u'^n(x-u')^n\,du';$$

si l'on observe que $y_1 = x^{2n+1}y$, y_1 et y étant deux intégrales correspondantes, on a, en désignant par A et B deux nouvelles constantes, et supprimant l'accent de u',

$$(23)\quad y_1 = Ae^{-mx}\int_0^\infty e^{-2mu}u^n(x+u)^n\,du + Be^{mx}\int_0^\infty e^{-2mu}u^n(x-u)^n\,du,$$

formule identique à celle qui est donnée par M. Serret.

Il est bon de remarquer, en passant, que la première forme d'intégrale (10), si l'on y fait $m = 1$, revient à

$$y = 2^n Ae^{-x}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1+\frac{u}{2}\right)^n du + B(-2)^n e^x\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1-\frac{u}{2}\right)^n du$$

ou

$$(24)\quad y = Ae^{-x}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1+\frac{u}{2}\right)^n du + Be^x\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1-\frac{u}{2}\right)^n du$$

(A et B nouvelles const.),

et que les deux formes d'intégrales particulières qui entrent dans cette expression sont analogues à celles qui sont données par M. Hermann Hankel dans son Mémoire sur les fonctions cylindriques (*Mathematische Annalen*, vol. I, p. 491).

La seconde forme (23) revient à celle qui est donnée par M. Lommel dans ses *Études sur les fonctions de Bessel* (p. 63); car, si l'on fait

Digitized by Google

$m = 1$, et qu'on remplace $2u$ par u, il vient

$$(25)\quad y = \frac{A x^n e^{-x}}{2^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^n du + \frac{B x^n e^x}{2^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^n \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^n du.$$

36. Si l'on développe R_1 en série, on trouve, en supposant $2m = 1$, les trois expressions suivantes :

$$(26)\quad \begin{cases} R_1 = A_1 x^{2n+1} \left[1 - \dfrac{(1+n)}{1(2+2n)} x + \dfrac{(1+n)(2+n)}{1.2(2+2n)(3+2n)} x^2 - \dots\right], \\ R_2 = A_2 \left[1 - \dfrac{n}{1.2n} x + \dfrac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)} x^2 \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} + \dots\right], \\ R_3 = A_3 x^n \left[1 - \dfrac{n(n+1)}{1} \dfrac{1}{x} + \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2} \dfrac{1}{x^2} \right. \\ \qquad - \dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} \dfrac{1}{x^3} + \dots \\ \qquad \left. + (-1)^n \dfrac{1.2.3\dots n(n+1)(n+2)\dots 2n}{1.2.3\dots n} \dfrac{1}{x^n}\right]. \end{cases}$$

Ce qui est remarquable, c'est que, lorsque n est un nombre entier, comme nous le supposons ici, les valeurs de R_2 et R_3 sont limitées et ne diffèrent que par un facteur constant. Car si l'on ordonne R_3 suivant les puissances croissantes de x, on peut écrire

$$R_3 = A_3 (-1)^n \frac{1.2.3\dots n(n+1)(n+2)\dots 2n}{1.2.3\dots n} \times \left[1 - \frac{n}{1.2n} x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)} x^2 - \dots + (-1)^n \frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots n(n+1)\dots 2n} x^n\right],$$

d'où l'on voit qu'on aura $R_2 = R_3$, si les constantes A_2 et A_3 satisfont à la relation

$$A_2 = A_3 (-1)^n (n+1)(n+2)\dots 2n,$$

remarque que je crois nouvelle. Dans ce cas, les deux solutions particulières de l'équation (19) sont représentées, l'une par la série infinie R_1 développée suivant les puissances croissantes de la variable, et l'autre par R_2, polynôme limité et du degré n.

Digitized by Google

Si n n'est pas entier, la fonction R_2 est, comme R_1, une série convergente développée suivant les puissances croissantes de x, tandis que R_3, qui est développée suivant les puissances décroissantes de cette variable, est une série du genre de celles qu'on nomme *semi-convergentes*.

VII.

QUELQUES CONSÉQUENCES RELATIVES A LA FONCTION EXPONENTIELLE.

---

37. En étudiant les formules où entre la fonction exponentielle e^{mx}, on arrive à quelques conséquences qui méritent d'être signalées. C'est une indication que je dois à la bienveillance de M. Hermite, qui m'a conduit aux résultats exposés dans ce paragraphe et qui s'accordent avec ceux que ce savant a démontrés dans un Mémoire publié dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (année 1873).

Considérons l'expression $D_x^n\left(\frac{e^{2mx}}{x^{n+1}}\right)$, qui entre dans la formule (8 *bis*), § VI, et faisons $2m = 1$, nous aurons

$$(1) \qquad D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = D_x^n\left(\frac{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots}{x^{n+1}}\right);$$

en séparant le second membre en deux parties, nous obtenons

$$(2) \quad \begin{cases} D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = D_x^n\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{1.x^n} + \frac{1}{1.2.x^{n-1}} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n x}\right) \\ \qquad\qquad + D_x^n \frac{1}{1.2.3\dots n(n+1)}\left[1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right], \end{cases}$$

ce qui revient à

$$(2\,bis) \qquad D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = \frac{P(x)}{x^{2n+1}} + S(x),$$

Digitized by Google

$P(x)$ désignant un polynôme du degré n et $S(x)$ une série infinie de la forme $\alpha + \alpha' x + \alpha'' x^2 + \ldots$.

D'un autre côté, si l'on considère $\frac{e^x}{x^{n+1}}$ comme le produit de deux facteurs e^x et $x^{-(n+1)}$, on a

$$(3)\quad \begin{cases} D_x^n[e^x x^{-(n+1)}] \\ \quad = e^x\left[x^{-(n+1)} - \frac{n}{1}(n+1)x^{-(n+2)} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2}x^{-(n+3)} - \ldots\right], \end{cases}$$

ou

$$(3\,bis)\qquad D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = e^x\frac{Q(x)}{x^{2n+1}},$$

$Q(x)$ désignant encore un polynôme du degré n.

Des relations $(2\,bis)$ et $(3\,bis)$ on déduit

$$e^x\frac{Q(x)}{x^{2n+1}} = \frac{P(x)}{x^{2n+1}} + S(x),$$

et de là il vient

$$(4)\qquad e^x = \frac{P(x)}{Q(x)} + x^{2n+1}\frac{S(x)}{Q(x)},$$

expression remarquable de la fonction exponentielle.

Il est facile de conclure de ce qui précède les valeurs de $P(x)$, $Q(x)$ et $S(x)$. On a d'abord

$$D_x^n\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{1.x^n} + \frac{1}{1.2.x^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n.x}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}}\left[(n+1)(n+2)\ldots 2n + \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1}x + \frac{(n-1)n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2}x^2 + \ldots + x^n\right]$$

et, par suite,

$$(5)\quad \begin{cases} P(x) = (-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n \\ \qquad \times\left[1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2 + \ldots + \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots 2n}x^n\right]; \end{cases}$$

Digitized by Google

puis les relations (3) et (3 *bis*) donnent

$$Q(x)=x^n-\frac{n}{1}(n+1)x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)x^{n-2}-\ldots(-1)^n\frac{1.2.3\ldots 2n}{1.2.3\ldots n},$$

ou

$$(6)\quad\begin{cases}Q(x)=(-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n\\ \qquad\times\left[1-\dfrac{n}{1.2n}x+\dfrac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2-\ldots(-1)^n\dfrac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots 2n}x^n\right],\end{cases}$$

d'où cette conséquence remarquable que $Q(x)$ se déduit de $P(x)$ par le changement de x en $-x$; enfin pour $S(x)$ on a

$$S(x)=D_x^n\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\left[1+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{x^n}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+3)}+\ldots\right]$$

ou

$$(7)\quad S(x)=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(2n+1)}\left[1+\frac{(n+1)}{1(2n+2)}x+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2(2n+2)(2n+3)}x^2+\ldots\right],$$

série qui se confond avec R_1 (26), § VI, au facteur x^{2n+1} près, si on y change x en $-x$.

38. Au lieu de partir de la différentielle $D_x^n\left(\frac{e^{2mx}}{x^{n+1}}\right)$, on peut arriver aux mêmes résultats en partant de l'intégrale définie R_3 (11), § VI, ou de la suivante, que je désigne par I,

$$I=\int_0^{2m}e^{-ux}u^n(2m-u)^n\,du,$$

et qui devient, quand on fait $2m=1$,

$$(8)\qquad I=\int_0^1 e^{-ux}u^n(1-u)^n\,du.$$

On peut appliquer à cette intégrale, comme l'a fait M. Lommel dans ses *Études sur les fonctions de Bessel* (p. 51), la formule élémentaire

$$\int e^{-ux}F(u)\,du=-e^{-ux}\left[\frac{F(u)}{x}+\frac{F'(u)}{x^2}+\frac{F''(u)}{x^3}+\ldots\right].$$

Digitized by Google

Dans le cas actuel on a

$$F(u) = u^n(1-u)^n,$$

et l'on voit qu'aux limites 0 et 1, on a

$$F(u) = 0, \quad F'(u) = 0, \quad F''(u) = 0, \quad \ldots, \quad F^{n-1}(u) = 0;$$

d'autre part, les dérivées d'ordre supérieur à $2n$ sont identiquement nulles; il vient donc

$$\int_0^1 e^{-ux} F(u)\,du = -\left\{e^{-ux}\left[\frac{F^n(u)}{x^{n+1}} + \frac{F^{n+1}(u)}{x^{n+2}} + \ldots + \frac{F^{2n}(u)}{x^{2n+1}}\right]\right\}_0^1.$$

Comme pour $u = 0$, on a $e^{-ux} = 1$, et pour $u = 1$, $e^{-ux} = e^{-x}$, on peut écrire

$$\int_0^1 e^{-ux} F(u)\,du = \frac{Q'(x) - P'(x)e^{-x}}{x^{2n+1}}, \tag{9}$$

$Q'(x)$ et $P'(x)$ désignant comme précédemment des polynômes du degré n.

On a d'ailleurs, en développant e^{-ux},

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-ux} u^n (1-u)^n\,du &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3\ldots p} \int_0^1 u^{n+p}(1-u)^n\,du \\ &= \Gamma(n+1)\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p \Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+p+2)} = S'(x);\end{aligned} \tag{10}$$

et de (9) et (10) on déduit

$$\frac{Q'(x) - P'(x)e^{-x}}{x^{2n+1}} = S'(x),$$

d'où

$$e^{-x} = \frac{Q'(x)}{P'(x)} - x^{2n+1}\frac{S'(x)}{P'(x)}, \tag{11}$$

formule analogue à (4).

Cette seconde méthode permet de calculer aussi assez facilement les fonctions $P'(x)$ et $Q'(x)$. Si l'on pose $1 - u = u'$, on a

$$F(u) = u^n(1-u)^n = u^n u'^n,$$

Digitized by Google

et le développement du binôme donne

$$F(u+h)=(u+h)^n(1-u-h)^n=(u+h)^n(u'-h)^n$$

$$=\left[u^n+\frac{n}{1}hu^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}h^2u^{n-2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}h^{n-2}u^2+\frac{n}{1}h^{n-1}u+h^n\right]$$

$$\times\left[u'^n-\frac{n}{1}hu'^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}h^2u'^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^3u'^{n-3}+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}h^{n-2}u'^2+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}h^{n-1}u'+(-1)^nh^n\right];$$

de là il vient, si l'on met en évidence les termes qui contiennent h^n, h^{n+1}, ..., h^{2n},

$$F(u+h)=\ldots$$

$$+h^n\left[u'^n-\frac{n}{1}\frac{n}{1}uu'^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2}u^2u'^{n-2}-\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\frac{n}{1}u^{n-1}u'+(-1)^nu^n\right]$$

$$+h^{n+1}\left[-\frac{n}{1}u'^{n-1}+\frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}uu'^{n-2}-\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}u'+(-1)^n\frac{n}{1}u^{n-1}\right]$$

$$+h^{n+2}\left[\frac{n(n-1)}{1.2}u'^{n-2}-\ldots+(-1)^n\frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$+h^{2n}(-1)^n$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

Il est bon de remarquer que les premiers termes des polynômes qui multiplient h^n, h^{n+1}, ... sont ceux du développement du binôme $(u'-1)^n$; les derniers se confondent avec ceux de $(-1)^n(u+1)^n$, et ce sont ces termes qu'il suffit de connaître dans la question actuelle.

D'autre part, d'après le théorème de Taylor, on a

$$F(u+h)=F(u)+\frac{h}{1}F'(u)+\frac{h^2}{1.2}F''(u)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(u)+\ldots,$$

Digitized by Google

et des deux développements de $F(u+h)$ on déduit

$$\frac{F^n(u)}{1.2.3\ldots n} = u'^n - \frac{n}{1}\frac{n}{1}u'^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2}u'^{n-2}u^2 \ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\frac{n}{1}u'u^{n-1}+(-1)^n u^n,$$

$$\frac{F^{n+1}(u)}{1.2\ldots n(n+1)} = -\frac{n}{1}u'^{n-1} + \frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}u'^{n-2}u - \ldots + (-1)^n\frac{n}{1}u^{n-1},$$

$$\frac{F^{n+2}(u)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)} = \frac{n(n-1)}{1.2}u'^{n-2} - \ldots + (-1)^n\frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{F^{2n}(u)}{1.2\ldots 2n} = (-1)^n.$$

Pour $u=0$, on a $u'=1$; et tous les termes qui dans ces dérivées contiennent u en facteur s'annulent, ce qui donne

$$\left[\frac{F^n(u)}{1.2.3\ldots n}\right]_{u=0} = 1,$$

$$\left[\frac{F^{n+1}(u)}{1.2.3\ldots n(n+1)}\right]_{u=0} = -\frac{n}{1},$$

$$\left[\frac{F^{n+2}(u)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}\right]_{u=0} = \frac{n(n-1)}{1.2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

de là on conclut

$$\frac{Q'(x)}{x^{2n+1}} = 1.2.3\ldots n\left[\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{n(n+1)}{1}\times\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2}\frac{1}{x^{n+2}} - \ldots\right],$$

ou, en ordonnant en sens inverse et multipliant par x^{2n+1},

$$Q'(x) = 1.2.3\ldots 2n(-1)^n\left[1 - \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2 - \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^n\frac{1.2\ldots n}{1.2.3\ldots 2n}x^n\right].$$

Pour $u=1$ on a $u'=0$, et tous les termes qui contiennent u' en facteur

Digitized by Google

disparaissent, de sorte qu'il vient

$$\left[\frac{F^n(u)}{1.2.3\ldots n}\right]_{u=1} = (-1)^n,$$
$$\left[\frac{F^{n+1}(u)}{1.2.3\ldots n(n+1)}\right]_{u=1} = (-1)^n \frac{n}{1},$$
$$\left[\frac{F^{n+2}(u)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}\right]_{u=1} = (-1)^n \frac{n(n-1)}{1.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par suite

$$\frac{P'(x)}{x^{2n+1}} = 1.2.3\ldots n(-1)^n\left[\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{1.x^{n+2}} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2.x^{n+3}} + \ldots\right],$$

ou

$$P'(x) = 1.2.3\ldots 2n(-1)^n\left[1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2 + \ldots + \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}x^n\right].$$

On retrouve ainsi, à un facteur près, les valeurs (5) et (6). D'ailleurs $S'(x)$ est donnée par la formule (10), et elle ne diffère de $S(x)$ que par un facteur constant et parce que x y est remplacé par $-x$.

39. Proposons-nous de trouver la relation qui existe entre le rapport $\frac{P(x)}{Q(x)}$ et les réduites successives de la fraction continue qui représente e^x. Dans son Mémoire sur la série hypergéométrique, Gauss donne la formule

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha,1,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots \\ \qquad = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \ddots}}}}} \end{array}\right.$$

avec les valeurs suivantes

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad b = \frac{1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)},$$
$$c = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \qquad d = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},$$
$$e = \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}, \qquad f = \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Comme la fonction e^x est la limite de la série

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right) = 1 + \frac{k}{1}\frac{x}{k} + \frac{k(k+1)}{1.2}\frac{x^2}{k^2} + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\frac{x^3}{k^3} + \ldots$$

pour $k = \infty$, on peut lui appliquer la formule (12), en remplaçant α par k, γ par 1 et x par $\frac{x}{k}$. Si l'on porte ces valeurs dans les parties intégrantes de la fraction continue, en faisant tendre k vers ∞, on obtient

$$ax = \frac{k}{1}\frac{x}{k} = \frac{x}{1}, \qquad bx = \frac{1(1-k)}{1.2}\frac{x}{k} = -\frac{x}{1.2},$$

$$cx = \frac{(k+1).1}{2.3}\frac{x}{k} = \frac{x}{2.3}, \qquad dx = \frac{2(2-k)}{3.4}\frac{x}{k} = -\frac{2x}{3.4},$$

$$ex = \frac{(k+2).2}{4.5}\frac{x}{k} = \frac{2x}{4.5}, \qquad fx = \frac{3(3-k)}{5.6}\frac{x}{k} = -\frac{3x}{5.9},$$

$$gx = \frac{(k+3).3}{6.7}\frac{x}{k} = \frac{3x}{6.7}, \qquad hx = \frac{4(4-k)}{7.8}\frac{x}{k} = -\frac{4x}{7.8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et de là on conclut

(13)
$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{x}{6}}{1 + \cfrac{\frac{x}{6}}{1 - \cfrac{\frac{x}{10}}{1 + \cfrac{\frac{x}{10}}{1 - \cfrac{\frac{x}{14}}{1 + \cfrac{\frac{x}{14}}{1 - \ldots}}}}}}}}}$$

En désignant par $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \cdots$ les réduites consécutives, nous

Digitized by Google

avons

$$\frac{A_0}{B_0}=\frac{1}{1},\quad \frac{A_1}{B_1}=\frac{1}{1-x},\quad \frac{A_2}{B_2}=\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}},$$

$$\frac{A_3}{B_3}=\frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{6}},\quad \frac{A_4}{B_4}=\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}},$$

$$\frac{A_5}{B_5}=\frac{1+\frac{2x}{5}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{3x}{5}+\frac{3x^2}{10}-\frac{x^3}{60}},\quad \frac{A_6}{B_6}=\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{120}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}-\frac{x^3}{120}},\quad \ldots;$$

d'un autre côté, en désignant par $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ du degré n, on a

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{1+\frac{n}{1.2n}x+\frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^3+\ldots+\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}x^n}{1-\frac{n}{1.2n}x+\frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2-\ldots+(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}x^n},$$

et, si l'on fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, ..., il vient

$$\frac{P_0(x)}{Q_0(x)}=\frac{1}{1},\quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}},\quad \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}},\quad \ldots;$$

d'où l'on voit qu'on a

$$(14)\qquad \frac{A_0}{B_0}=\frac{P_0(x)}{Q_0(x)},\quad \frac{A_2}{B_2}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},\quad \frac{A_4}{B_4}=\frac{P_2(x)}{Q_2(x)},\quad \ldots;$$

et, en général, $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_{2n}}{B_{2n}}$.

40. En supposant n suffisamment grand, et effectuant le quotient $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, on peut obtenir la fonction

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

avec un aussi grand nombre de termes qu'on voudra.

Digitized by Google

Pour qu'en effectuant cette division on trouve le développement de e^x, il faut que les premiers termes des restes successifs soient $\frac{x}{1}$, $\frac{x^2}{1.2}$, $\frac{x^3}{1.2.3}$, $\frac{x^4}{1.2.3.4}$, ... On est ainsi conduit aux relations suivantes qui, si je ne me trompe, n'ont pas été signalées jusqu'à présent :

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{n}{1.2n} = \frac{1}{1.2},\\
&\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1.2.3},\\
&\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\,\frac{1}{1.2} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4},\\
&\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}\,\frac{1}{1.2} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\,\frac{1}{1.2.3} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3.4.5},\\
&\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\,\frac{1}{1.2}\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}\,\frac{1}{1.2.3} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\,\frac{1}{1.2.3.4}\\
&\quad + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules, dans les seconds membres desquelles entre l'expression $\frac{1}{1.2.3\ldots p}$, semblent être de deux sortes, les unes applicables au cas où p est pair, et les autres, au cas où p est impair. Nous verrons dans la suite comment elles se déduisent d'une seule série de relations où entrent deux paramètres

41. Elles subsistent, quelle que soit la valeur de n, pourvu que ce paramètre soit suffisamment grand. Elles sont encore vraies lorsqu'on remplace n par $-n$, et l'on a

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2n(n+1)(n+2)}{1.2.3.2n(2n+1)(2n+2)} - \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1.2.3},\\
&\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.2n(2n+1)(2n+2)} - \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}\,\frac{1}{1.2} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Digitized by Google

Digitized by Google

ou

$$(20)\quad e^x = \frac{\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p \Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+p)}}{\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p \Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+p)}} = \frac{1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 + \dots}{1 - \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 - \dots}.$$

42. Dans les formules précédentes, il n'y a qu'un seul paramètre arbitraire n. Mais si, au lieu de l'identité (19), on part de la suivante

$$(21)\quad e^x \int_0^1 e^{-ux} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du = \int_0^1 e^{x(1-u)} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du,$$

et si l'on observe qu'on a

$$\int_0^1 e^{x(1-u)} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du$$
$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p}{1.2.3\dots p} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha+p-1} du$$
$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p}{1.2.3\dots p} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha+\beta+p)}$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+p-1)}{1.2.3\dots p(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+p-1)} x^p,$$

$$\int_0^1 e^{-ux} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du$$
$$= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3\dots p} \int_0^1 u^{\beta+p-1}(1-u)^{\alpha-1} du$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \beta(\beta+1)\dots(\beta+p-1)}{1.2.3\dots p(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+p-1)} x^p,$$

on en conclut

$$(22)\quad e^x = \frac{1 + \frac{\alpha}{1(\alpha+\beta)}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}x^2 + \dots}{1 - \frac{\beta}{1(\alpha+\beta)}x + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}x^2 - \dots},$$

Digitized by Google

formule qui n'est autre que la relation (4), § 26, du Mémoire de Kummer (1).

Le quotient des deux séries infinies (22) devant être

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots,$$

si l'on effectue la division, on voit qu'on doit avoir les relations

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}-\frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}+\frac{\beta}{1(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1.2},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}$$
$$-\frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\frac{1}{1}+\frac{\beta}{1(\alpha+\beta)}\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1.2.3},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1.2.3.4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.3.4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$$
$$+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{1}-\frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\frac{1}{1.2}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{1.2.3.4},$$

.....

qui donnent les formules (16) lorsqu'on y fait $\alpha=\beta=n$.

(1) *Journal de Crelle*, t. 13.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME ONZIÈME.

Pages

Étude géologique des gisements de topazes de la province de Minas-Géraës (Brésil); par M. *H. Gorceix* 9

Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes; par M. *L. Sauvage*, ancien élève de l'École Normale supérieure 33

Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ; par M. *Elliot*, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon 79

De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives; par M. *Léon Charve*, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille 119

Racines communes à deux équations algébriques entières; par M. *V. Hioux*, Professeur au Lycée de Tours 135

Étude spectroscopique sur l'ozone; par M. *J. Chappuis*, Agrégé préparateur à l'École Normale supérieure 137

Sur les silicomolybdates; par M. *F. Parmentier*, ancien élève de l'École Normale, Sous-Directeur du Laboratoire d'Enseignement chimique à la Faculté des Sciences 187

Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé; par M. *G. Kœnigs*, élève de l'École Normale supérieure 219

Comparaison des coefficients d'induction; par M. *Marcel Brillouin*, Chargé du Cours de Physique à la Faculté des Sciences de Dijon 339

Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ (deuxième Partie); par M. *Elliot*, Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon 419

SUPPLÉMENT AU TOME XI.

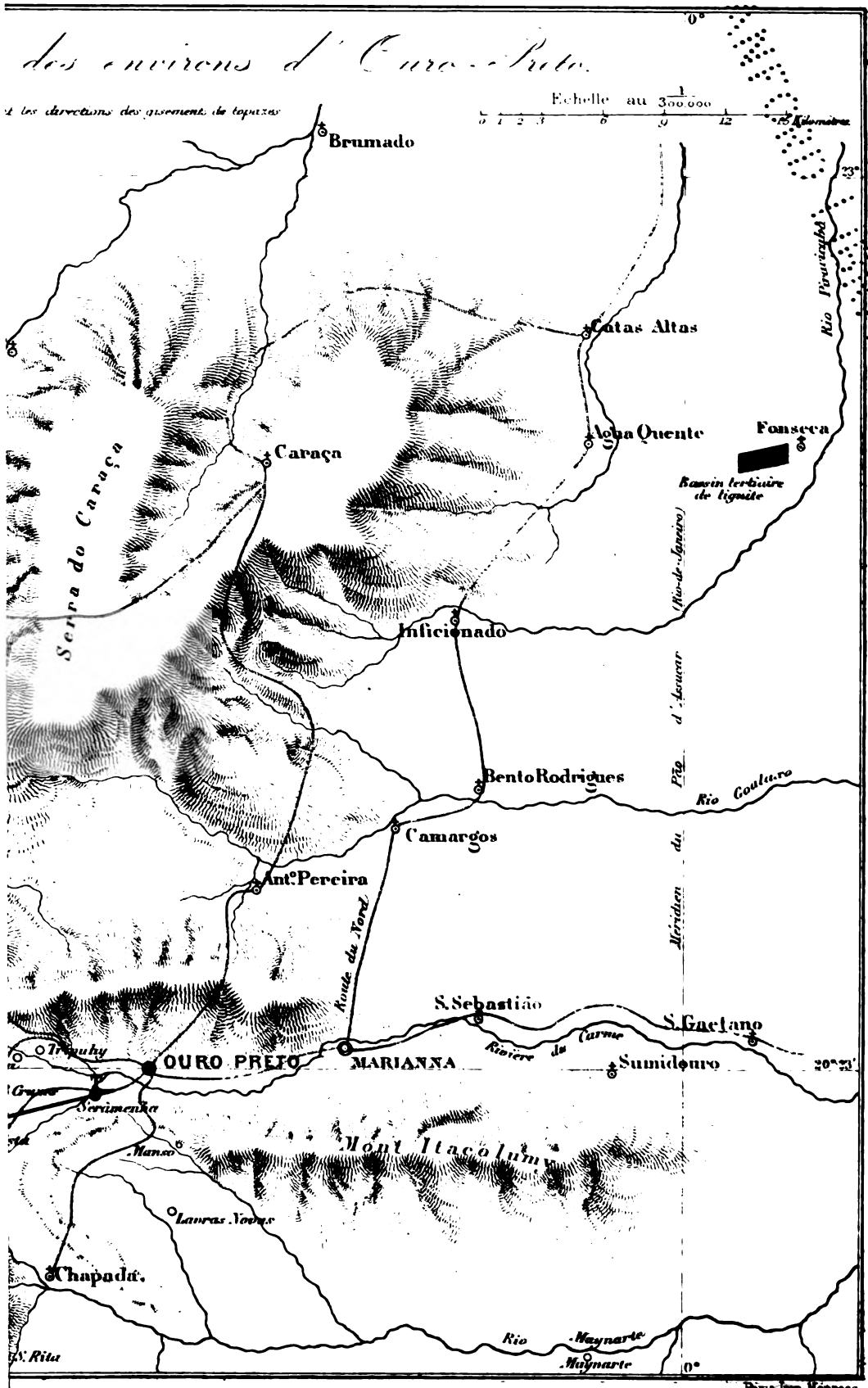
Étude des fonctions de Fourier; par M. *J. Nicolas*, Inspecteur d'Académie S.3

PLANCHES I et II.

7456 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

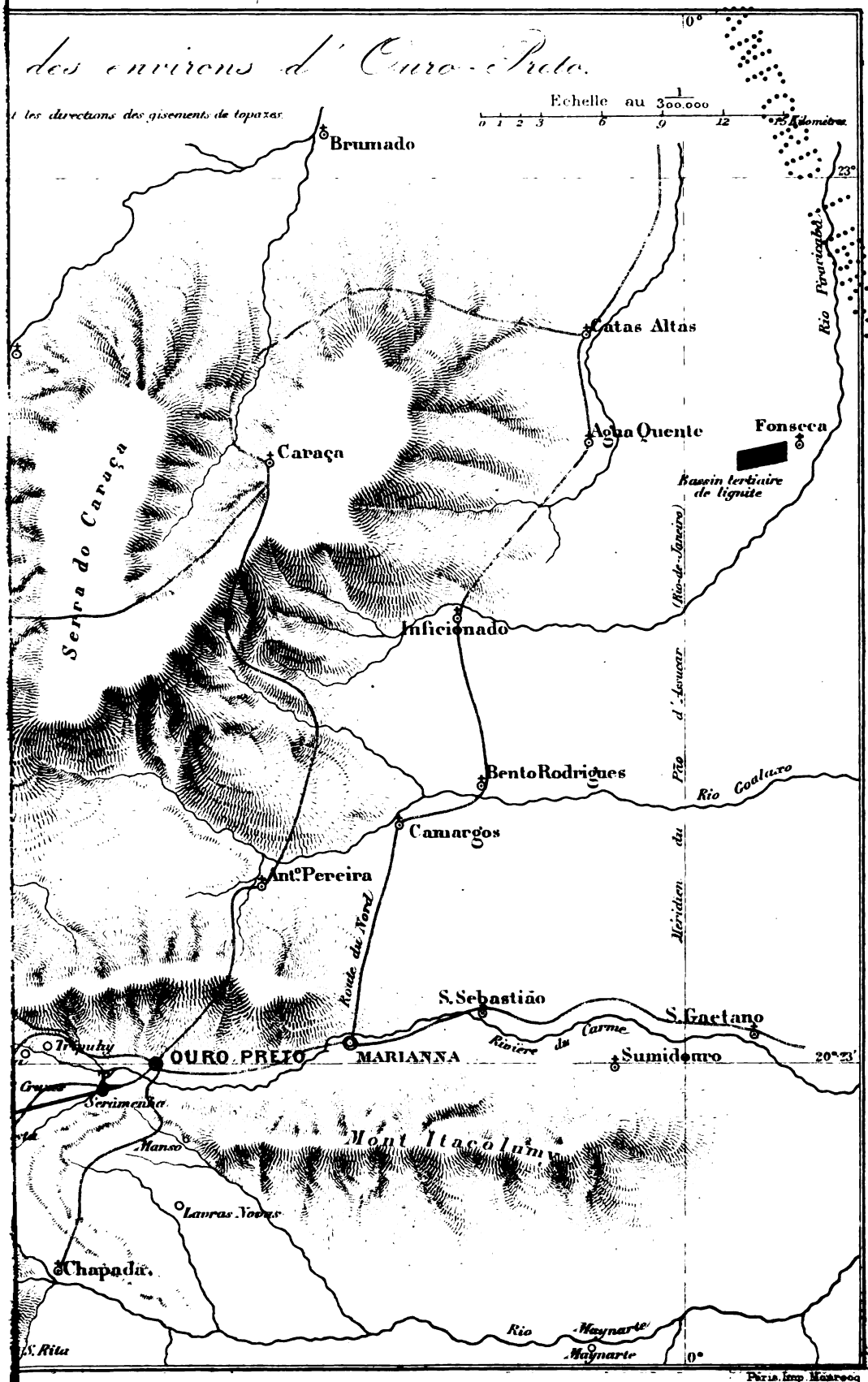
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

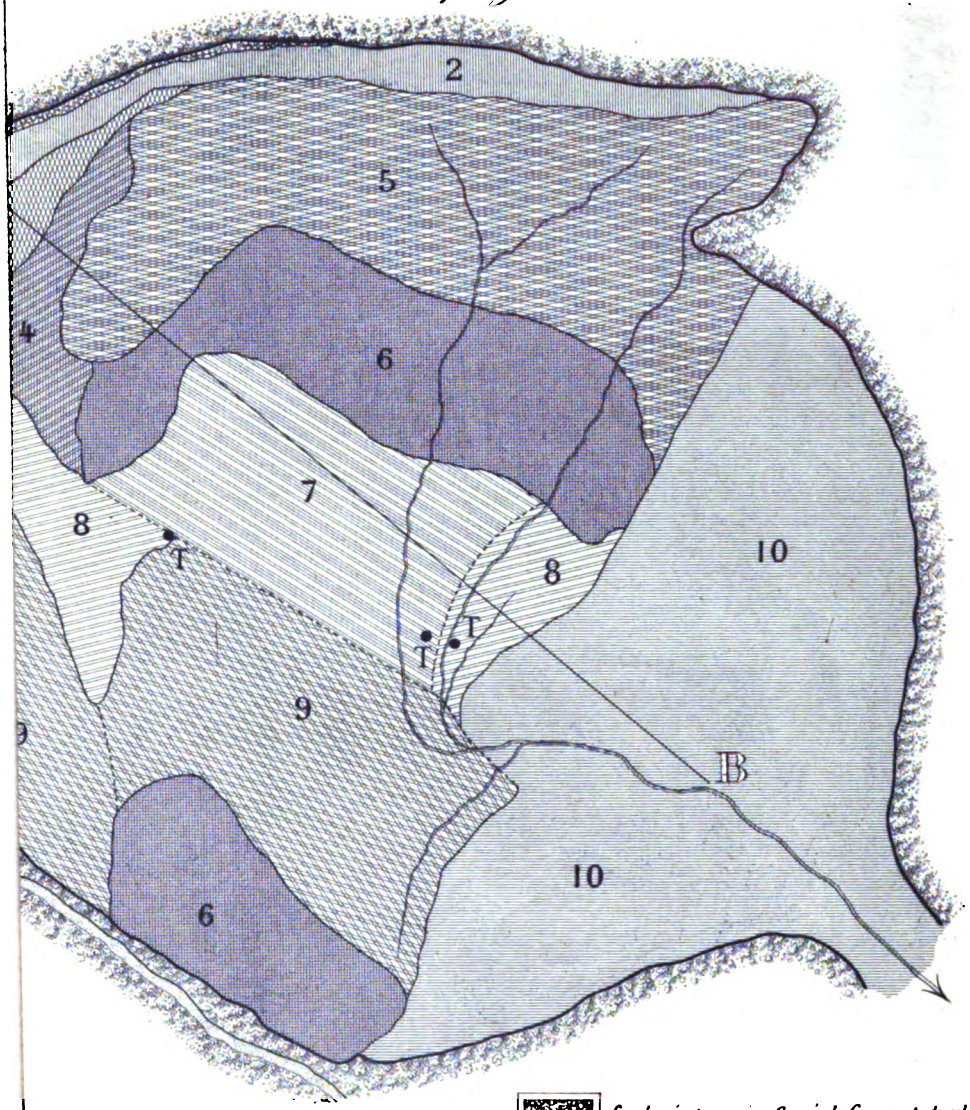


Digitized by Google



Digitized by Google

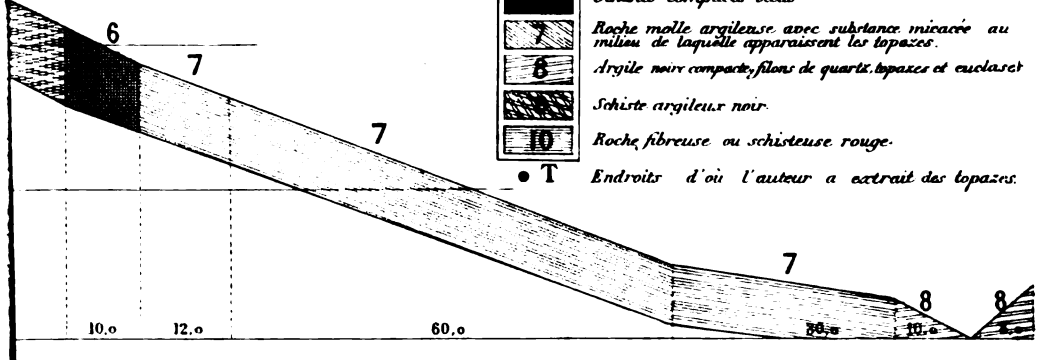
de la Carrière de Topazes de Boa-Vista



10m.o 0 10 20 30 40 50 60m.o

Fig. 2.

Coupe suivant A B



1 Conglomérat grossier formé de fragments de schiste et de quartz.
2 Sables jaunes
3 Sables mélangés avec des couches minces de schistes, contenant des pyrites altérées.
4 Sables, comme au n°3, mais avec des schistes plus abondants.
5 Roches schisto-fibreuses avec pyrophyllite et cristaux octaédriques brillants de fer oligiste.
6 Schistes compacts bleus
7 Roche molle argileuse avec substance micacée au milieu de laquelle apparaissent les topazes.
8 Argile noire compacte, filons de quartz, topazes et cuclase
9 Schiste argileux noir.
10 Roche fibreuse ou schisteuse rouge.
• T Endroits d'où l'auteur a extrait des topazes.

Paris Imp Monrocq

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

RAGE AREA

2 3 1996

Digitized by Google

Digitized by Google